This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

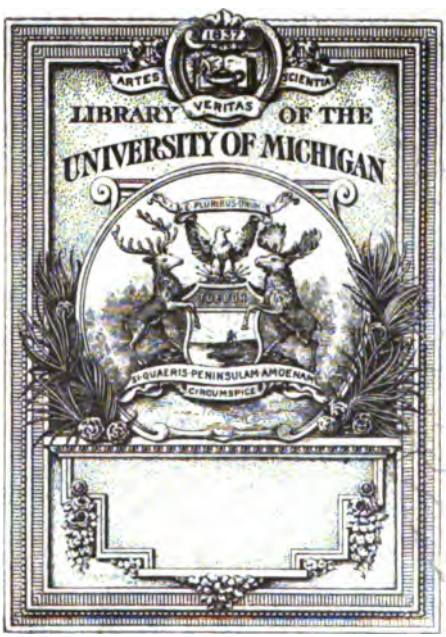
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

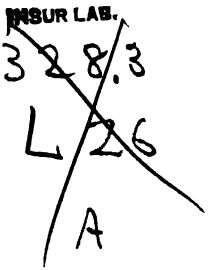
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

MSUR LAB.



Mathematisch-Technische Kapitel

zur

Lebensversicherung

von

Corneille L. Landré,

Actuar der Niederländischen Lebensversicherungsgesellschaft (Algemeene Maatschappij van Levensverzekering en Lijfrente) in Amsterdam und des Niederländischen Arbeiterfonds im Haag; **Mitglied des** Holländischen Vereins von Actuaren in Amsterdam; Redakteur des Holländischen „Archief voor de Verzekeringswetenschap"; Membre correspondent de l'Association des Actuaires Belges **à Bruxelles**; Membre correspondent de l'Institut des Actuaires français à Paris; Corresponding **Member of the** Institute of Actuaries of Great-Britain and Ireland in London; Präsident des Mathematischen Vereins in Amsterdam.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Jena.
Verlag von Gustav Fischer.
1901.

Alle Rechte vorbehalten.

Vorwort.

Mit aufrichtiger Freude habe ich die Aufgabe übernommen, die Arbeit des Herrn Corneille L. Landré bei den deutschen Versicherungs-Technikern und überhaupt bei den deutschen Mathematikern einzuführen. Ich habe alles daran gesetzt, Herrn Landré dazu zu bestimmen, eine deutsche Übersetzung seiner im Holländischen erschienenen Arbeit herauszugeben, und ich bin ihm dabei soviel wie möglich an die Hand gegangen. Nachstehende Gründe haben mich dazu veranlafst.

Es versteht sich von selbst, dafs jeder Versicherungs-Techniker nicht nur die Theorie des Faches vollkommen beherrschen, sondern auch mit der Praxis vertraut sein mufs. Der theoretische Teil seiner Aufgabe erfordert jedoch mehr Studium und wissenschaftlichen Sinn als der praktische; letzterer aber bedingt eine jahrelange und vielseitige Erfahrung und wird seinerseits der Theorie wieder neue Gegenstände zur weiteren Betrachtung und Ausarbeitung darbieten.

Die Mehrzahl der versicherungs-technischen Handbücher entspricht entweder in der einen oder in der anderen Hinsicht nicht ganz allen Anforderungen. Wenn die Theorie hauptsächlich das Wort hat, gründet sie sich oft auf Voraussetzungen, welche in der Praxis nicht, oder nicht in der betreffenden Form erscheinen. Und wo die Praxis den Ton angiebt, zeigt es sich öfters, dafs der Verfasser nicht weifs, wie man die Vorschriften der Theorie mit der Praxis in Einklang bringen soll.

Das Hauptverdienst der Arbeit des Herrn Landré liegt meines Erachtens in dem Umstand, dafs er die Lebensversicherungs-Gesellschaften als Organismen betrachtet. Wenn seine Arbeit überall Anklang findet, wird man nicht länger alle Gesellschaften auf dieselbe Weise behandeln wollen und von den vergeblichen Versuchen, allgemein gültige Regeln vorschreiben zu wollen, Abstand nehmen. Man wird einsehen, dafs jede Gesellschaft handeln und behandelt werden mufs nach ihrer eigenen

Einrichtung und nach ihren eigenen Bedürfnissen. Ebensowenig wie man eine allgemeine Lebensregel finden kann, die für jede Constitution und für alle Lebensumstände zu brauchen ist, ebensowenig wird es einem gelingen, die Praxis der Lebensversicherung mit einer sich überall gleichbleibenden Theorie in Einklang zu bringen.

Die Lebensversicherungs-Wissenschaft mufs nach und nach selbständiger werden, als sie bis jetzt gewesen ist. Die Arbeit des Herrn Landré wird gewifs nach dieser Richtung hin einen kräftigen Anstofs geben. Man kann nur wünschen, dafs Viele sich dazu berufen fühlen möchten, auf dieser festen Grundlage ein Gebäude zu errichten, in welchem der Mathematik die Ehrenstelle zugewiesen wird. Die Lebensversicherer werden dann würdiger auftreten können, als wenn sie, wie es bis jetzt der Fall war, sich mit einem sehr bescheidenen Plätzchen in dem glänzenden Gebäude der Mathematik zufrieden geben müssen.

Je mehr die Arbeit, welche dem deutschen Publikum hiermit vorgelegt wird, zur Besprechung und Kritik Anlafs giebt, um so ausgiebiger werden ihre Früchte sein. Und sie wird besprochen und kritisirt werden, denn es ist kaum zu erwarten, dafs eine Arbeit, welche sich auf einem noch so wenig bebauten Felde bewegt, gleich etwas Vollkommenes erreicht haben wird.

Was ein Handbuch der Mechanik dem Ingenieur ist, soll dieses Buch dem Lebensversicherer sein. Die Mathematik ist beider Grundlage, und der Mathematiker im engeren Sinne wird mit grofsem Interesse beobachten, wie wunderbar die Resultate seiner Wissenschaft hier zur Verwendung gelangen.

Im Interesse der Lebensversicherung wünsche ich der Arbeit des Herrn Landré die günstigste Aufnahme.

Amsterdam, im Juli 1895.

Dr. S. R. J. van Schevichaven.

Auszug aus der Vorrede des Verfassers zur ersten Auflage.

Von Zeit zu Zeit wurde mir nahegelegt, die Artikel, welche ich in verschiedenen Zeitschriften (holländischen, deutschen und französischen) veröffentlicht habe, zu einem Ganzen vereinigt herauszugeben. Diese Artikel bildeten aber noch keine vollständige Theorie; ich habe sie in Verbindung zu einander gebracht, und auf diese Weise ist die erste (holländische) Ausgabe des vorliegenden Buches entstanden, welches, wie ich hoffe, eine nicht allzu lückenhafte Übersicht der Lebensversicherungs-Mathematik darstellt. Absolute Vollständigkeit ist überhaupt nicht zu erreichen und ist auch nicht nötig. Obgleich ich nun nicht so ausführlich bin wie das englische Text Book, so sind doch auch in meinem Buche mehrere Fragen behandelt, welche dort nicht berührt sind, und darunter solche, welche zu höheren Theorien führen. Ich habe mich bestrebt, die Prinzipien deutlich hervortreten zu lassen, und meinte, dem Leser etwas zu denken und zu schaffen übrig lassen zu müssen. Ich wollte aber auch zeigen, wie erschöpfend man arbeiten kann, wenn es nötig ist, und wählte dazu die Leibrente, und dies hauptsächlich wegen der eigentümlichen mathematischen Entwickelungen, welche sie zuläfst. Dabei habe ich in Rücksicht auf die Erfordernisse der Praxis die Brutto-Prämie und die Reserve ziemlich ausführlich behandelt, damit jeder Anschauungsweise ihr Recht geschähe.

Es ist unnötig nachzuweisen, was in dem Buche mein geistiges Eigentum ist. Abgesehn von dem, was naturgemäfs in jedem Lehrbuch steht, ist vieles aus der Lektüre von Büchern und Zeitschriften hervorgegangen; so sind mir z. B. das Journal of the Institute of Actuaries, die österreichische Versicherungszeitung u. s. w. von grofsem Nutzen gewesen. Noch anderes verdanke ich dem münd-

lichen und schriftlichen Verkehr mit den holländischen Sachverständigen. Wie es wohl schon jedem Forscher gegangen ist, so habe auch ich manches gefunden, was ich früher oder später irgendwo bereits gedruckt vorfand. Jedenfalls habe ich immer versucht, auch das geistige Eigentum anderer in meiner Weise darzustellen.

Zwar fand ich es nötig, die Differenzial- und Integral-Rechnung zu benutzen, um wenigstens an einigen Beispielen zu zeigen, welche wichtigen Dienste die höhere Analysis leisten kann; jedoch sind die Hauptsachen auf eine solche Weise behandelt, dafs der Anfänger die schwierigeren Abschnitte überschlagen kann, bis er die Mathematik genügend beherrscht, um jene zu lesen. Der wissenschaftliche Lebensversicherungs-Techniker soll die höhere Mathematik verstehn, um die Werke der Neuzeit lesen zu können.

Man hat behauptet, die Prämienberechnung sei keine Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre, sondern die Prämien seien blos Mittelwerte. Zweifelsohne kann man viele Probleme lösen, ohne irgendwie die mathematische Wahrscheinlichkeit zu benutzen, und in manchem Fall habe ich es auch in diesem Buch gethan; es ist aber nicht weniger wahr, dafs die Wahrscheinlichkeitslehre öfters die Arbeit ungemein erleichtert, und dafs sie durchaus notwendig ist, wenn man auf die tieferen Probleme eingehn will. Daher habe ich die Kenntnis der Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausgesetzt.

Es war mir eine Freude, dafs mein Buch von der Kritik nicht ungünstig aufgenommen wurde; Herr Dr. **S. R. J. van Schevichaven,** Direktor der „Algemeene Maatschappij van Levensverzekering en Lijfrente“ zu Amsterdam fand denn auch, dafs eine Verbreitung in weiteren Kreisen, und daher eine Übersetzung in die deutsche Sprache nützlich sein könnte. Auf seine Anregung hin belastete sich Fräulein **G. Vreedenberg** zu Bussum mit der Übersetzung, während Herr **Otto Gutsche,** wissenschaftlicher Hilfsarbeiter am statistischen Amt der Stadt Breslau, das Manuscript und die ersten Druckproben einer weiteren Prüfung auf Sprachrichtigkeit unterzogen hat.

Für die hier und da von den genannten Herren geäufserten Wünsche in Bezug auf die Deutlichkeit des Ausdrucks, denen ich immer gern gefolgt bin, sage ich besten Dank.

Natürlich hatte ich seit dem Erscheinen der holländischen Ausgabe meine Studien fortgesetzt, es waren mir Bemerkungen von anderer Seite zugegangen, auch hatte ich selbst einige Fehler entdeckt, sodafs ich noch manches hinzufügen und verbessern konnte, auch die Anordnung habe ich mehrfach geändert. In dieser Hinsicht kann eher von einer

neuen verbesserten und vermehrten deutschen Ausgabe als von einer Übersetzung die Rede sein.

Es würde mir grofse Freude bereiten, wenn Herr van Schevichaven, Fräulein Vreedenberg und Herr Gutsche mit einiger Befriedigung auf ihre freundliche Mitarbeit zurückblicken möchten. Dies würde der Fall sein, wenn meinem Buche ein Plätzchen neben den deutschen Lehrbüchern vergönnt würde, und es einige Lücken auszufüllen geeignet wäre.

Schliefslich habe ich noch dem Herrn Herausgeber zu danken. Insbesondere hat er das Verdienst, für einen guten Druck Sorge getragen zu haben. Selten oder vielmehr nie habe ich Druckproben zu corrigiren gehabt, wo die Fehler so wenig zahlreich waren, die Correctur so gut verstanden und der mathematische Satz (la bête noire der Drucker) so ausgezeichnet ausgeführt wurde.

Über einzelne Punkte wird man wohl immer verschiedener Meinung bleiben; ich habe mich bestrebt, so unparteiisch wie möglich zu sein. Könnte mein Buch zur gegenseitigen Würdigung, welche, wie ich glaube, sich mehr und mehr Bahn bricht, etwas beitragen, damit sich die Meinungen in Zukunft weniger schroff gegenüberstehn und sich einander nähern! Möchten aufserdem die Mängel, welche meinem Buche zweifelsohne anhaften, mit Nachsicht beurteilt werden! Ich werde mich fortdauernd bestreben, dieselben abzustellen und werde für jeden Wink, welcher mich dabei unterstützt, dankbar sein.

Dordrecht, 12. Juli 1895.

Corneille L. Landré.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Mit freudiger Überraschung vernahm ich vom Herrn Verleger, daſs die erste Ausgabe meiner mathematisch-technischen Kapitel vergriffen und eine zweite Auflage erwünscht war. Daſs sich dieses Bedürfnis bei einer Arbeit dieser Art so bald fühlbar machen würde, hatte ich bis damals nicht den Mut zu glauben.

Seit der ersten Auflage hat sich auf unserem Gebiet vieles abgespielt. Es fanden drei Congresse von Actuaren statt: in Brüssel (1895), in London (1898), in Paris (1900); ich kann es nie genügend wiederholen, wie sehr es mich freut, diesen Congressen beigewohnt zu haben wegen der dadurch gebotenen Gelegenheit, nicht nur die Bekanntschaft so vieler hochgeschätzten und weitbekannten Fachmänner zu machen, sondern auch mit ihnen wissenschaftliche Fragen zu besprechen, ihren Vorträgen zuzuhören und ihre Referate zu lesen. Meines Erachtens ist der Nutzen dieser Congresse sehr groſs.

Neue Vereine von Actuaren wurden ins Leben gerufen, z. B. der deutsche Verein für Versicherungs-Wissenschaft und der Verband der österreichischen und ungarischen Versicherungs-Techniker, welcher, wie andere derartige Institute, periodischen Mitteilungen herausgibt.

Mehrere meiner geschätzten Fachgenossen haben mir die Ehre gethan, anläſslich meines Buches mir mit ihren Ratschlägen an die Hand zu gehen.

Überdies habe ich meine Studien fortgesetzt. Ich habe also an meinem Buch ziemlich viele Abänderungen vornehmen und demselben manches Problem hinzufügen müssen. Ich glaubte z. B. die Ausgleichung ausführlicher behandeln zu müssen.

Die gröſste von mir vorgenommene Abänderung ist aber die Einführung der „gemeinsamen Bezeichnungsweise“ (notation uni-

verselle). Ich habe die Einführung als Pflicht betrachtet, nachdem dieselbe auf den drei Congressen einstimmig votirt wurde, und ich glaube nicht verschweigen zu dürfen, dafs sie mir von mehreren meiner Freunde empfohlen wurde. Soll von einer allgemeinen Notation die Rede sein, so mufs man wohl zugeben, dafs wir nur die englische als solche anwenden können; alle englischen und amerikanischen Autoren bedienen sich dieser Bezeichnungsweise, bei den anderen Nationen aber hatte vor dem Abhalten der Congresse jeder Autor die seinige. Nur die englische ist wahrhaft klassisch. Es ist zu begrüfsen, dafs keine nationale Eifersucht bei uns Mathematikern und Actuaren der Anerkennung der Wahrheit in dem Wege steht. Ich hoffe, dafs man in der Einführung eine Besserung erblicken wird. Umsomehr hege ich diese Hoffnung, weil einzelne deutsche Autoren bereits angefangen haben, sich dieser Bezeichnungsweise zu bedienen und auch Prof. Dr. **J. Karup** als Mitglied des Comités zur Einführung derselben für den Londoner Congrefs wirksam war. In der Anzahl der Zeichen habe ich mich aber beschränkt.

Es kann seinen Nutzen haben, daran zu erinnern, dafs ich meinem Buche den einfachen Titel Kapitel beigelegt habe, um darauf hinzudeuten, dafs es noch viel mehr zu lernen giebt, als in diesem Werke enthalten ist. Um sich vollkommen auf die Höhe des Stoffes zu stellen, ist das Studium eines einzigen Werkes nicht genügend; man soll es z. B. nicht unterlassen, das englische Text Book (von **G. King**) — ins Französische übersetzt von **Am. Bégault** — und die Théorie des assurances sur la vie von **Potérin du Motel** zu studiren, indem auch das Studium der actuariellen Zeitschriften und der auf den Congressen gehaltenen Vorträge wärmstens Empfehlung verdienen. Zur ersten Einführung in die Lebensversicherungs-Mathematik ist **M. Cantor's** Politische Arithmetik zu empfehlen.

Das Gebiet der mathematischen Statistik habe ich nur hier und da berührt. Diesbezüglich lese man die im Text genannten Autoren und über Bevölkerungsstatistik die Schriften von **Knapp, Zeuner, W. Lexis, L. von Bortkewitsch, Westergaard, G. Eneström** u. A.

Bei dieser Gelegenheit kann ich nicht umhin, auch **Franz Carl Lukas** zu erwähnen, welcher in der Rundschau der Versicherungen und im Assecuranz-Jahrbuch manchen Artikel über diese Gegenstände veröffentlicht hat, indem der V. Teil des holländischen Archiefs (1901) einen Artikel von ihm enthält: die zukuenftigen Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherungstechnik.

Was die Fachlitteratur betrifft, wird es schwer sein, einen besseren Führer zu finden den auch im Texte genannten Artikel: Versiche-

rungs-Mathematik von **G. Bohlmann** zu Göttingen in der „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften", der auch die verschiedenen Ansichten der Autoren hervortreten läfst.

Noch habe ich die Worte des Dankes zu wiederholen, welche ich in der Vorrede zur ersten Auflage einschaltete; ich mufs dieselben jetzt aber auf alle diejenigen erstrecken, die durch irgend einen Ratschlag zur erhöhten Brauchbarkeit meines Werkes beigetragen haben, insbesondere aber auf Herrn Dr. jur. **J. van Schevichaven,** der die Güte hatte, das Deutsch des neu hinzugefügten Textes zu corrigiren.

Schliefslich habe ich zu bemerken, dafs die österreichische Regierung die Ausfüllung einer gröfseren Anzahl Staaten verlangt, als ich auf Seite 415 u. f. angegeben habe; ich habe mich ausschliefslich beschränkt auf diejenigen Staaten, welche einen speciell mathematisch-actuariellen Charakter tragen, und diejenigen, welche sich auf administrative Gegenstände beziehen, aufser Acht gelassen.

Mit dem Wunsche, dafs meiner Arbeit auch diesmal ein günstiger Empfang und eine freundliche Beurteilung zu Teil werden möge, übergebe ich diese zweite Ausgabe der Kapitel der Öffentlichkeit.

Amsterdam, im September 1901.

Corneille L. Landré.

Inhalts-Verzeichnis.

Kapitel I.

Zinsenrechnung.

Seite

Zins 1
Zinsfufs 1
Einfacher Zins 2
Zinseszins 2
Wiederholte Verzinsung im Laufe des Jahres 3
Continuirliche Verzinsung 6
Zins bei Vorauszahlung 7
Discontiren 7
Vergleich der verschiedenen Discontirungsweisen 9
Der mittlere Zahlungstermin 11

Kapitel II.

Periodische Zahlungen.

Annuitäten 12
Ewige Rente 14
Rückzahlung von Schulden durch Annuitäten 14
Bei derselben Schuld und derselben Anzahl Jahre der Tilgung ist die Annuität um so höher, je höher der Zinsfufs ist 15
Die jährlichen Tilgungen bilden eine geometrische Reihe 17
Administrationskosten 17
Annuitätentafeln 18
Berechnung des Zinsfufses bei gegebener Annuität 18
Veränderliche Annuitäten 21
Ratenzahlung 23
Unendliche Anzahl von Raten 26
Die Zahlung einer Summe in gleichen Bruchteilen an gleichmäfsig über das Jahr verteilten Terminen ist, wenn die Zahl der Termine sehr grofs ist, der Zahlung der ganzen Summe in der Mitte des Jahres nahezu gleichwertig 26
Versicherungs-Prämien in Raten 26
Die Annuität während einer gemischten Anzahl von Jahren 29
Änderung der Dauer der Annuität 30

Kapitel III.

Sterblichkeit.

Seite

Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit 31
Sterblichkeitstafel 31
Listen von Sterbenswahrscheinlichkeiten haben gröfseren Wert 32
Sterbenswahrscheinlichkeit der einzelnen Person 32
Sterblichkeitstafel, abgeleitet aus einer Tafel der Lebenswahrscheinlichkeiten . . 33
Wahrscheinlichkeiten bei zwei Leben 33
Verschiedene Tafeln für die beiden Personen 34
Tafeln für die Auflösung von Paaren 36
Wahrscheinlichkeiten bei mehr als zwei Leben 36
Sterbe-Intensität 38
Durchschnittliche jährliche Sterbenswahrscheinlichkeit während einer gewissen Zeit 40
Analytische Formel für die Sterbe-Intensität 40
Die Sterbenswahrscheinlichkeit, analytisch abgeleitet aus der Sterbe-Intensität . 42
Näherungsweise Ableitung der Sterbe-Intensität 42
Sterblichkeitskoeffizient 45
Centrales Sterbeverhältnis 47
Auflösungs-Intensität eines Paares 47
Formeln für die Sterblichkeit 48
Gompertz'sche Formel 49
Makeham'sche Formel 49
Wittstein'sche Formel 51
Die Berücksichtigung der Ausscheidenden und Eintretenden 52
Gleichmäfsiges Ausscheiden 52
Die im selben Jahre Eintretenden und Sterbenden 56
Die im selben Jahre Ein- und Austretenden 57
Das Einschätzen des Alters 58
Sterbenswahrscheinlichkeiten aus verschiedenen Beobachtungsjahren 63
Es wäre nicht zweckmäfsig, zu viele Jahre zusammenzufassen 63
Das Rechnen mit dem Gewicht der Beobachtungsjahre 65
Ermittlung der Sterblichkeit ohne Auseinanderhaltung der Beobachtungsjahre . . 67
Die Ausgleichung der Sterblichkeitstafeln 69
Graphische Methode 69
Finlaison's Formel 69
Woolhouse's Formel 70
Eigenschaften der arithmetischen Reihe höherer Ordnung 73
Allgemeine Ausgleichungsformel 74
Methode von Higham 77
Methode von Karup 79
Abrundungskraft der Formeln 82
Ausgleichung mittels der Minimumtheorie 83
Ausgleichung mittels der Differenzen 88
Methode von Fischer 90
Ausgleichung bei Annahme einer geometrischen Reihe der Differenzen . . . 91
Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate 92

Summation in Gruppen 95
Einfachheit der neuen Methode 96
Weitere Correction der ausgeglichenen Zahlen 97
Die hauptsächlichsten Sterblichkeitstafeln 97
Verschiedene Ursachen, welche die Sterblichkeit beeinflussen 100
Wahl der Sterblichkeitstafeln und des Zinsfufses 102
Vergleichung der Sterblichkeit und der Auszahlung mit der Sterblichkeitstafel . 103
Auszahlungstafel 105
Combination der Erfahrungen verschiedener Gesellschaften 105
Wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer 107
Wahrscheinlich noch zu lebende Zeit 107
Abgekürzte mittlere Lebensdauer 108
Vollständige „ „ 108
Die Sterblichkeitstafel abzuleiten aus der Tafel für die mittlere Lebensdauer . . 110

Kapitel IV.

Einmalige Prämien für die hauptsächlichsten Versicherungen auf eine Person.

Prinzipien 110
Versicherung auf den Erlebensfall 111
Discontirte Anzahl der Lebenden 112
Lebenslängliche Leibrente 113
Postnumerando zahlbar 114
Praenumerando zahlbar 114
Summe der discontirten Lebenden 114
Benutzung der Gaufsischen Logarithmen 115
Der Wert der Leibrente, für jedes Altersjahr abgeleitet aus dem für das folgende 115
Die Leibrententafel, abgeleitet aus der Tafel der mittleren Lebensdauer . . . 116
Der Wert der Leibrente, ausgedrückt durch die Lebenswahrscheinlichkeiten . . 116
Nicht zu viel Decimalstellen 117
Die aufgeschobene Leibrente (Pension) 117
Sofort beginnende temporäre Leibrente 118
Die aufgeschobene temporäre Leibrente (z. B. ein Stipendium) 118
Veränderliche Leibrente 119
Lebenslängliche Kapitalversicherung auf den Todesfall 122
Die einmalige Prämie, abgeleitet aus derjenigen für das um ein Jahr höhere Alter 123
Die einmalige Prämie, ausgedrückt in dem Wert der Leibrente 125
Zweierlei Deutung der Formel 125
Aufgeschobene Kapital-Versicherung auf den Todesfall 126
Temporäre (kurze) Versicherung auf den Todesfall 127
Temporäre Versicherung auf den Todesfall mit bestimmter Verfallzeit 128
Lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall mit veränderlicher Auszahlung . 129
Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben 131
Auszahlung am Anfang des Sterbejahres 132
Die Leibrente, zurückgeführt zu Auszahlungen im Ablebensfall 133

Seite
Leibrente bis zum Augenblick des Ablebens (vollständige Leibrente) 135
Näherungs-Formeln 136
Strenge Formeln beim gleichmäfsigen Ableben 138
Gemischte Versicherung 141
Kinder-Versorgung 142

Kapitel V.

Jährliche Prämien für die wichtigsten Versicherungen auf eine Person.

Leitende Prinzipien 143
Nicht jede Weise der Prämienzahlung ist zulässig 144
Versicherung auf den Erlebensfall 145
Aufgeschobene Leibrente (Pension) 147
Lebenslängliche Kapitalversicherung auf den Todesfall 147
Lebenslängliche gleiche Jahresprämie 147
Ein Beweis der Formel in Worten 148
Die Jahres-Prämie aus der Lebenswahrscheinlichkeit 148
Die Jahres-Prämie beim Zinsfufs null 148
Temporäre Prämie 149
Steigende Prämie 149
Temporäre abnehmende Prämie 150
Fortwährend abnehmende Prämie 150
Lebenslängliche Zahlung gleicher Jahresprämien, von denen nur die des ersten Jahres verschieden ist 151
Gemischte Versicherung 153
Die sich gleichbleibende Prämie 153
Andere Arten der Prämienzahlung 153
Temporäre Versicherung auf den Todesfall 154
Versicherung auf bestimmte Verfallzeit 154

Kapitel VI.

Versicherung auf mehrere Personen.

Versicherung eines Paares auf den Erlebensfall 155
Sofort beginnende lebenslängliche Verbindungsrente 156
Die Grundzahlen kann man verkleinern 157
Die Verbindungsrente, ausgedrückt durch die für ein Paar, das ein Jahr älter ist 158
Verbindungsrente auf zwei Personen mit gänzlichem Übergang auf die längstlebende 159
Verbindungsrente mit teilweisem Übergang auf den Längstlebenden 159
Alle Fälle abgeleitet aus den Verbindungsrenten ohne Übergang und mit gänzlichem Übergang 160
Überlebensrenten 160
Abgeleitet aus dem Wert der Pension beim Tode des Versorgers 161
Abgeleitet aus den einzelnen Auszahlungen 161
Deutung der Formel 162
Jahresprämie 162
Vollständige Witwenpension 163

Seite

Aufgeschobene Überlebensrente 162
Die Rente wird frühestens ausgezahlt n Jahre nach dem Abschliefsen der Versicherung 164
Die Rente wird nicht ausgezahlt, wenn der Versorger innerhalb der n Jahre stirbt 164
Die Rente fängt erst an einige Jahre nach dem Tode des Versorgers 164
Die Rente fängt über eine bestimmte Anzahl Jahre allein dann an, wenn der Versorger innerhalb dieser Jahre gestorben ist 165
Die Rente fängt nach einer bestimmten Anzahl Jahren nur dann an, wenn der Versorger innerhalb dieser Jahre gestorben ist 165
Temporäre Überlebensrente 166
Die Rente fängt an beim Tode des Versorgers, wird aber höchstens n Mal ausgezahlt 166
Die Rente endet innerhalb einer bestimmten Anzahl von Jahren nach dem Abschliefsen der Versicherung (Waisenpension) 167
Leibrente auf das Leben zweier Personen, beim Tode einer derselben zu reduciren 168
Die Überlebensrente kommt nur dann zur Auszahlung, wenn der Versorger innerhalb einer bestimmten Anzahl Jahre stirbt 168
Gegenseitige Überlebensrente 169
Auszahlung eines Kapitals beim Tode der zuerst sterbenden von zwei Personen (gegenseitiges Überlebenskapital) 169
Ableitung aus der Verbindungsrente 169
Ableitung aus der Auflösung der Paare 170
Auszahlung eines Kapitals beim Tode der zuletzt sterbenden von zwei Personen 170
Beim ersten Ableben eine gewisse Summe, beim zweiten die Hälfte 171
Gemischte Versicherung auf zwei Personen 171
Einseitiges Überlebenskapital 172
Verification der Formel für den Fall, dafs beide Personen gleich alt sind . . . 174
Auszahlung, wenn beide Personen in demselben Jahre sterben 174
Aufgeschobenes Überlebenskapital 174
Temporäres Überlebenskapital 175
Aussteuerversicherung 175
Stipendium 176
Stipendium mit Waisenpension combinirt 176
Leibrente auf drei Personen 177
Bis zum Tode der zuerst sterbenden 177
Bis zum Tode der längstlebenden 177
So lange wenigstens zwei der drei Personen am Leben sind 177
Überlebensrenten auf drei Personen 177
Beginnend beim Ableben von (x) und zahlbar, so lange (y) und (z) beide am Leben sind 177
Beginnend beim Ableben von (x) und zahlbar, so lange (y) und (z) oder eine von beiden noch am Leben ist 178
Beginnend nach dem Ableben von (x) und (y) zu Gunsten von (z) 178
Beginnend beim Ableben einer der drei Personen und zahlbar, so lange die zwei übrigen beide am Leben sind 178
Beginnend beim Ableben einer der drei Personen und zahlbar, so lange die beiden übrigen oder eine von beiden am Leben ist 178

Seite

Leibrente zu Gunsten der zuletzt lebenden, sobald die beiden anderen gestorben sind 178
Verification der Formeln 179
Allgemeine Formel 180
Leibrenten auf vier Personen 180
Verschiedene Formen der Leibrente auf mehrere Personen 181
Verteilung der einmaligen Prämie bei Leibrenten auf mehr als eine Person . . 182

Kapitel VII.
Rückgewähr.

Der Begriff der Sache 183
Versicherung auf den Erlebensfall gegen einmalige Prämie 184
Einmalige Extra-Prämie zur Rückgewähr der einmaligen Prämie 184
Rückgewähr der einmaligen Prämie für die Hauptversicherung 185
Rückgewähr der ganzen Prämie 185
Pension mit lebenslänglicher Versicherung auf Rückgewähr der ganzen einmaligen Prämie 187
Rückgewähr der ganzen Einlage mit Zinseszins 187
Sofort beginnende Leibrente mit Rückgewähr der teilweisen oder ganzen Einlage 188
Versicherung auf den Erlebensfall gegen Jahresprämie 190
Extra Jahresprämie zur Rückgewähr der Jahresprämien vom Betrage der Einheit 190
Rückgewähr aller Beiträge für die Hauptversicherung 191
Rückgewähr aller Beiträge 192
Der Zins der Prämie betrachtet als Jahresprämie 193
Die Jahresprämien betrachtet als einmalige Einlagen 194
Rückgewähr aller Beiträge mit Zinseszins 195
Überlebens-Rente oder Kapital 197
Aussteuer- und Stipendien-Versicherung 199
Versicherung auf den Todesfall während einer bestimmten Anzahl von Jahren, mit Rückgewähr aller Prämien auf den Erlebensfall nach Verlauf dieser Jahre 200
Lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall, bei welcher eine temporäre Jahresprämie nach Verlauf der betreffenden Jahre in eine Leibrente gleichen Betrages übergeht 201

Kapitel VIII.
Brutto-Prämien.

Zuschlag 202
Erste und dauernde Unkosten 202
Abschlufs-Provision 203
Nicht zu hohe Abschlufs-Provision 203
Mängel der verschiedenen Systeme 204
Der beste Mafsstab ist die einmalige Prämie 205
Erste Unkosten in Procenten der Versicherungssumme 205
Die fortdauernden Unkosten in Procenten der Prämie, unabhängig von deren Zahlungsweise 205
Die fortdauernden Unkosten im ersten Jahr etwas geringer 206

Seite
Erste Unkosten in Procenten der Prämie des ersten Jahres 207
Erste Unkosten in Procenten der einmaligen Prämie 208
Doppelter Vorteil der Methode 208
Die fortdauernden Unkosten im ersten Jahr etwas geringer 209
Die Unkosten des Abschliefsens und der Administration proportional der Versicherungssumme 209
Die Abschlufs-Provision über einige Jahre verteilt 210
Sonstige Bestimmungen des Zuschlags 211
Combinirte Versicherungen 212
Das Vergleichen der Prämien mit den Unkosten 214
Extra-Risikos 215
Die in Procenten der Prämie bestehende Erhöhung die unzweckmäfsigste . . 215
Frauen minderwertige Risikos 215
Anweisung einer Versicherungsweise 215
Zuschreibung eines höheren Alters 215
Unrichtige Anwendung des erhöhten Alters 216
Aufschieben der Versicherung 217
Reduktion der Versicherungssumme während einiger Jahre 218
Extra-Prämien 220
Mangel an statistischen Grundlagen für Berechnung von Extra-Prämien . . 221
Invaliditäts-Versicherung anwenden bei Lebensversicherung 222
Gefahrenklasse bei minderwertigen Leben 222
Versicherung im Ablebensfall ohne ärztliche Untersuchung 222
Gänzliche Unsicherheit in Betreff des Kriegs-Risikos 223
Ärztliche Untersuchung bei Leibrenten-Versicherung 223
Die Rechnung mit dem richtigen Alter 223
Durchschnittliche Prämien 224

Kapitel IX.

Leibrenten und Prämien in Raten und continuirlich.

Strengste Methode 226
Halbjährliche Mortalitätstafel 226
Ratenweise Leibrenten durch einfache Interpolation 227
Continuirliche Leibrente 228
Zweierlei Erklärung des Verfahrens bei Interpolation 228
Leibrente in Raten bei gleichmäfsigem Ableben im Laufe jedes Jahres . . . 229
Discontirung unter der Voraussetzung, dafs der Zins im Laufe des Jahres der Zeit proportional ist 230
Discontirung nach kaufmännischer Art 231
Reduction zuerst nach dem Ende und dann wieder nach dem Anfang des Jahres 232
Strenge Discontirungsweise 232
Übereinstimmung der vier Methoden bei Annäherung 236
Leibrente in Raten unter Aussonderung des Zins- und Rentenverlustes . . . 236
Identität mit der vorigen Methode 238
Leibrente in Raten mittels der discontirten Lebenden 239
Anwendung der Methode bei Leibrenten auf mehrere Personen 241

Seite
Analytische Formel für die Leibrente in Raten 242
Summationsformel von Mac-Laurin bzw. Euler 242
Vergleichung der analytischen und der weniger genauen Methode 244
Halb-convergente Reihen 244
Pension in Raten 244
Temporäre Leibrente in Raten 245
Leibrente in Raten bis zum Tage des Ablebens 245
Vollständige und unvollständige Leibrente in Raten mittels einer gemeinschaftlichen Formel 248
Verbindungsrente in Raten 249
Gleichmäfsige Auflösung der Paare steht im Widerspruch mit dem gleichmäfsigen Absterben 249
Richtige Formel bei gleichmäfsigem Absterben 250
Grenzwerte der Constanten für continuirliche Verbindungsrenten 254
Roheste Annäherung bei gleichmäfsigem Absterben 255
Einfachere Formel 255
Roheste Annäherung 258
Leibrente in Raten für eine Person, aus der Verbindungsrente in Raten abgeleitet 258
Witwenpension in Raten 259
Prämien in Raten 262
Lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall 263
Aufgeschobene Leibrente 263
Wöchentliche Prämie für eine wöchentliche Pension 264
Die Terminprämie ausgedrückt durch die Jahresprämie 264
Die Prämie in Raten unmittelbar aus der Jahresprämie 264
Die eigentliche Terminprämie nicht immer nötig 266
Erhöhung um Procente bei terminweiser Zahlung 266
Bei Witwenpension 267
Wöchentliche Prämie mit immer halb- oder vierteljährliche Unterbrechung der Prämienzahlung 267
Leibrenten und Prämien während einer gemischten Anzahl von Jahren 269
Pension auf zwei Personen mit gänzlichem Übergang auf die Längstlebende . 270

Kapitel X.

Prämien-Reserve.

Die Notwendigkeit der Reserve 272
Leitende Prinzipien bei der Reserve-Berechnung 273
Retrospective und Prospective Methode 274
Die Reserve = dem gegenwärtigen Wert der zukünftigen Auszahlungen, vermindert um den gegenwärtigen Wert der zukünftigen Beiträge 274
Die Reserve eine Schuld der Gesellschaft den sämtlichen Versicherten gegenüber 275
Die Reserve einer einzelnen Versicherung ist ein sehr relativer Begriff . . 276
Die Reserve einmaliger Prämien 276
Versicherung auf den Erlebensfall 276
Leibrente 277
Lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall 277

Seite

Gemischte Versicherung 277
Witwenpension 278
Versicherung auf den Erbensfall mit Rückgewähr 278
Lebenslängliche Versicherung mit steigender Auszahlung 279
Reserve von Jahresprämie als Differenz von Verpflichtungen 280
Versicherung auf den Erlebensfall 280
Lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall 280
Gemischte Versicherung 281
Versicherung auf das erste Ableben zweier Personen 281
Umformung der Reserve-Formeln 281
Die Reserve, abgeleitet aus dem Verhältnisse der Jahresprämie, die gezahlt wird, zu der Jahresprämie, die bei späterem Eingehn der Versicherung gezahlt werden müfste 283
Die Reserve, berechnet aus der Differenz der Jahresprämie, die bei späterem Eingehn der Versicherung gezahlt werden müfste, und derjenigen, die gezahlt wird 284
Die Reserve, ausgedrückt durch das Verhältnis von Renten 286
Allgemeine Formel für die Reserve bei der Versicherung auf den Erlebensfall, mit oder ohne gänzliche oder teilweise Rückgewähr der Prämie bei früherem Ableben 288
Wenn nicht allerlei praktische und theoretische Hindernisse entgegenständen, könnte die Gesellschaft dem lebenden Versicherten jederzeit die Reserve seiner Versicherung auszahlen 289
Anwendung der Methode auf Brutto-Prämie 291
Verfahrungsweisen in der Praxis 292
Die Reserve, abgeleitet aus derjenigen des Vorjahres 293
Verification bei lebenslänglicher Versicherung 294
Die Reserve, entwickelt aus dem Überschufs der Prämienzahlung über das Risiko, welches die Gesellschaft hatte 296
Irrtum bei Versicherten, die selbst ihre Reserve berechnen wollen 297
Risiko-Prämie und Spar-Prämie 298
Die kapitalisirten Differenzen zwischen den Jahres-Prämien und Risiko-Prämien bilden die Reserve 299
Das Selbstverwalten der Reserve durch die Versicherten 299
Das Selbstverwalten der Reserve ist unmöglich bei Versicherungsweisen, wo im Falle des Ablebens keine Auszahlung stattfindet 301
Die Reserve, vom Anfange der Versicherung gerechnet 301
Retrospective Methode 302
Totale und individuelle Reserve bei lebenslänglicher Versicherung auf den Todesfall gegen lebenslängliche gleichbleibende Jahresprämie 303
Laienrechnung 304
Die Verwendung der Reserve 304
Das System der natürlichen Prämien 305
Negative Netto-Reserve 305
Versicherung von jungen Kindern auf den Todesfall 306
Negative Reserve bei Überlebens-Rente oder -Kapital 307
Bei Überlebens-Rente und Waisenpension kein Vorschufs 308

Seite

Veränderliche Prämie bei Waisenpension 309
Unrichtige Methoden bei Waisenpension 310
Gebrauch der Versicherung bei Hypothek 312
Zahlung für schon gelaufenes Risiko 317
Vor- und Nachteil der Netto-Reserve 317
Methoden nach Brutto-Prämie 319
Verfügung über allen Zuschlag auf einmal 320
Vermeidung negativer Reserve 321
Unkosten-Reserve 321
Anwendung der einmaligen und jährlichen Brutto-Prämien 321
Retrospective Methode nach Brutto-Prämien 322
Die Reserve, blos aus dem Tarif berechnet 323
Die Sterblichkeitstafel abgeleitet aus dem Tarife 325
Reserve auf Grund von zwei Tafeln 326
Änderung der Sterblichkeit 326
Methode bei Arbeiterversicherung 327
Prüfung der Solvabilität 327
Anwendung der Tafeln H^M und H^{M^s} 327
Methode der Reserve-Prämie 328
Die $x+1$-Methode 330
Nutzen und Mängel 333
Eine vermittelnde Methode 334
Eine Methode für jede Zahlungsweise der Prämien 335
Mifsbrauch des Wortes Netto-Prämie 335
Netto-Reserve nicht immer hoch genug 336
Neue französische Methode 338
Die ersten Unkosten bei den Activen 338
Die ersten Unkosten über einige Jahre verteilt 339
Versicherung mit Gewinn-Anteil 340
Die Berücksichtigung des Beitritts im Laufe des Jahres 340
Jahres-Prämie zahlbar am Anfang jedes Buchjahres 341
Jahres-Prämie zahlbar am Datum des Beitritts 341
Rechnung der zukünftigen Dauer in ganzen Jahren 344
Bezahlung in Raten 344
Gruppirung nach dem Alter 345
Doppelte Gruppirung 349
Reserve, auf diejenige des vorhergehenden Jahres begründet 350
Altersgruppen 351
Rechnung mit dem Durchschnittsalter 353
Annäherung durch Interpolation 354
Correction für das Datum der Auszahlung 354
Reserve von Extra-Prämie 355
Gestundete und vorausgezahlte Prämien, geschuldete Renten 356
Ankauf des blofsen Eigentums (nuda proprietas) und des Niefsbrauchs 358
Die Stellung der Reserve in der Bilanz 361

Kapitel XI.

Einstellung der Prämien-Zahlung. Veränderung der Prämie oder der Versicherung.

Seite

Rückkauf 362
Ist die Reserve das Eigentum der Versicherten? 362
Auch der einzelnen Versicherten? 363
Unzweckmäfsige Weise des Rückkaufs 364
Rationelle Methode 365
Kein Rückkauf bei der Versicherung auf den Erlebensfall 366
Fortwährende Fortsetzung bei der Versicherung auf den Erlebensfall . . . 366
Darlehen 367
Prämienfreie Police 368
Maximum und Minimum der prämienfreien Police 369
Reduction der Police im Verhältnis der gezahlten und der zu zahlenden Prämien 370
Ein arithmetischer Satz 371
Bei gemischter Versicherung ist die Methode nicht immer empfehlenswert . 373
Temporäre Fortsetzung der Versicherung ohne weitere Prämienzahlung . . . 374
Änderung der Versicherungssumme 374
Änderung der Prämienzahlung 375
Nachzahlung des zu wenig Gezahlten bei Lebzeiten 376
Einbehalten des zu wenig Gezahlten bei der Auszahlung 376
Änderung der Versicherungsweise 377
Strenge Methode 378

Kapitel XII.

Specielle Probleme.

Einfluſs des Zinsfufses und der Sterblichkeitstafel auf Prämie und Reserve . . 379
Ein höherer Zinsfufs giebt einen kleineren Wert für die Leibrente und die Lebensversicherung 380
Ein höherer Zinsfufs giebt eine kleinere Jahres-Prämie für die Lebensversicherung; aber die Verminderung ist auch procental geringer als bei einmaliger Prämie 381
Ein höherer Zinsfufs giebt eine niedrigere Reserve 382
Eine Tafel mit geringerer Sterblichkeit macht den Wert der Leibrente gröfser, die einmalige und die Jahresprämie für die Lebensversicherung kleiner; aber der Einfluſs ist procental gröfser bei Jahresprämie als bei einmaliger Prämie . . 382
Eine Tafel mit geringerer Sterblichkeit giebt zwar kleinere Prämien, kann aber dennoch eine gröfsere Reserve geben 383
Verschiedene Prämien mit gleicher Reserve 384
Alle Lebenswahrscheinlichkeit mit demselben Factor multiplicirt 386
Die Möglichkeit, dafs bei niedrigem Zinsfufs und einer Tafel von grofser Sterblichkeit hohe Prämien mit einer niedrigen Reserve verbunden sein können . 387
Eine für jedes Alter gleiche Erhöhung der Jahres-Prämie bedingt eine Abnahme der Reserve 387
Eine nicht geringe, für jedes Alter gleiche Erhöhung der Sterbenswahrscheinlichkeit erniedrigt die Reserve 388

Seite
Gewinn oder Verlust durch die Wahl der Sterblichkeit 388
Der Gewinn durch die Wahl der Sterblichkeitstafel ist gröfser bei Jahresprämie als bei einmaliger Prämie 389
Mathematische Dauer der Versicherung 390
Damit die Gesellschaft weder Gewinn noch Verlust hat, mufs eine Versicherung dieselbe Zeit laufen bei einmaliger wie bei Jahresprämie 391
Gewinn oder Verlust durch den Zins 392
Der Gewinn durch den Zins ist gröfser bei einmaliger als bei Jahresprämie . . 393
Das jährliche mathematische Risiko 393
Das mathematische Risiko ist proportional, das relative Risiko ist umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Anzahl der Versicherten 394
Das mathematische Risiko und das relative Risiko der Auszahlung sind am kleinsten bei gleichmäfsiger Verteilung der versicherten Summen . . . 396
Die Rechnung mit der Reserve 397
Maximum der einzelnen Versicherungssummen 403
Das relative Risiko soll abnehmen 404
Das Doppelte des mittleren versicherten Betrages per Person ist ein sehr sicheres Maximum 405
Rückversicherung bei eigener Verwaltung der ganzen Reserve 407
Methode des Vereins deutscher Lebensversicherungs-Gesellschaften 407
Methode Paraira 407
Die Minimum-Anzahl von Versicherten 408
Gewinn oder Verlust durch die Weise des Ablebens, die Verzinsung u. s. w. . 408
Was man durch den Gewinn oder den Verlust zu verstehen hat 409
Bei Versicherung auf den Todesfall 409
Bei Versicherung auf den Erlebensfall 411
Bestimmung des Gewinns aus der Weise des Absterbens, den Anullirungen und Rückkäufen 413
Vorgeschriebene Öffentlichkeit 414
Vorschriften der österreichischen Regierung 414
Verteilung des Gewinns 418
Quellen des Gewinns 418
Systeme der Verteilung des Gewinns 421
Enttäuschungen 422
Verwendung des Gewinns 423

Kapitel XIII.

Die Prämien als analytische Functionen.

Die continuirliche Leibrente 424
Leibrente und lebenslängliche Versicherung im Ablebensfalle mittels der mittleren Lebensdauer 425
Der Wert einer Leibrente ist kleiner als der Wert der während der mittleren Lebensdauer zahlbaren Annuität 428
Die Prämien für ein Kapital im Ablebensfall, welche voraussetzen, dafs der Versicherte stirbt am Ende seiner mittleren Lebensdauer, sind zu niedrig . . . 429
Continuirliche Verbindungsrente 430

Seite

Einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung der Einheit, zahlbar unmittelbar nach dem Ableben 430
Einmalige Prämie für Auszahlung unmittelbar nach dem ersten Ableben einer Person aus einem Paar 432
Überlebenskapital 433
Der Wert des Überlebenskapitals ausgedrückt durch den der continuirlichen Verbindungsrente 434
Continuirlicher Zins 435
Verschiedene Formen für den Wert der Lebensversicherung nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung 436

Kapitel XIV.

Annäherungen.

Erlaubte Abkürzungen 437
Interpolation 437
Wann einfache Interpolation ausreicht 437
Methode Samot 438
Bei Rückgewährprämien 438
Interpoliren zwischen den reciproken Werten 439
Die Angabe der Prämien nicht immer nötig für jedes Alter 439
Bei zwei Leben 439
Interpoliren mit Beachtung von zweiten Differenzen 440
Abgekürzte Summation 440
Die Annäherung als bestimmtes Integral 442
Die Function unter dem Integral betrachtet als ganze algebraische Function . . 443
Anwendung der Gaufsischen Methode 444
Die Verbindungsrente für zwei Personen, zurückgeführt auf eine Leibrente für eine Person 446
Jede Verbindungsrente für zwei Personen kann nur dann genau durch eine Leibrente für eine Person nach derselben Sterblichkeitstafel ersetzt werden, wenn die Sterblichkeitstafel dem Gompertz'schen Gesetz entspricht 449
Die Verbindungsrente für drei Personen zurückgeführt auf eine für zwei Personen 449
Zurückführung ungleicher Altersstufen auf gleiche 450
Jede Verbindungsrente für mehrere Personen kann nur dann in aller Strenge ersetzt werden durch eine andere für ebenso viele, aber gleich alte Personen, wenn die Sterblichkeitstafel dem Makeham'schen Gesetz genügt 451
Annähernde Berechnung bei Änderung des Zinsfufses 453

Bezeichnungsweise 458

Kapitel I.

Zinsrechnung.

Zins.

1. Jemand, der einem andern Geld leiht, bedingt gewöhnlich, besonders wenn es dazu verwendet werden soll, Geschäfte zu machen, einen gewissen Lohn aus, der dem Geldleiher nach regelmäfsigen Fristen gezahlt wird, so lange die Schuld nicht getilgt ist; dieser Lohn, Zins genannt, wird gewöhnlich per 100 und per Jahr angedeutet. Man kann keine Ziffer feststellen, die diesen Zins per 100 ein für allemal oder auch nur für eine begrenzte Zeit angiebt. Seine Höhe hängt nicht nur von allerlei Umständen ab, wie gröfserer oder geringerer Zuverlässigkeit des Geldaufnehmers, gröfserer oder geringerer Gutwilligkeit des Geldleihers; er hängt auch oft von der Gröfse des Kapitals selbst ab.

Auch wenn man ihn ganz vom Standpunkt des Handelsgeschäfts betrachtet, ist der Zins per 100 (der Zinsfufs) verschieden und kann man höchstens von einem durchschnittlichen Zinsfufs reden.

Wenn einmal der Zins per 100 und z. B. per Jahr festgestellt ist, so mufs derselbe auch jedes Jahr gezahlt werden, bis die Schuld getilgt ist; die Zinsrechnung setzt also erst da ein, wo man besondere Übereinkünfte trifft, z. B. für den Fall, dafs der Geldaufnehmer den Zins nicht abträgt, oder für den Fall, dafs die Schuld keine ganzen Jahre läuft, u. s. w., u. s. w.

Einfacher Zins.

2. Wenn ein Kapital von a Mark auf n Jahre zu einfachem Zins ausgeliehen ist, so heifst dies, dafs die Zinsen immer in demselben Verhältnisse stehen zu der Zeit, wo das Kapital verzinst gewesen und der Zins nicht bezahlt worden ist. Ist das Kapital also dergestalt verzinst, dafs jede Mark i Mark Zinsen per Jahr einträgt (also zu 100 i Procent per Jahr), so ist der Zins per Jahr ai; sind dann die Zinsen n Jahre hindurch rückständig geblieben, so betragen sie am Ende dieser n Jahre nai Mark und das Kapital ist angewachsen auf:

$$A = a + nai = a\,(1 + ni). \tag{1}$$

Unter diesem Gesichtspunkt könnte man sagen, dafs jemand, der ein Kapital a zu dem Zins i per Jahr und per Einheit geliehen hat und der n Jahre hindurch keinen Zins bezahlt hat, am Ende der n Jahre $a\,(1 + ni)$ schuldig ist.

Zinseszins.

3. Wird jedes Jahr der Zins des Kapitals zu dem Kapital zugeschlagen, sodafs der Zins von jedem Jahr verzinslich gemacht wird, so wächst das Kapital a in n Jahren an zu:

$$A = a\,(1 + i)^n. \tag{2}$$

Fragt man umgekehrt, welches Kapital in n Jahren durch Zinseszins bei 100 i Procent per Jahr auf A anwächst, so erhält man:

$$a = \frac{A}{(1+i)^n}. \tag{3}$$

Ebenso kann man nach i fragen, wenn a, A und n gegeben sind: man erhält dann:

$$i = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1. \tag{4}$$

Oder man kann auch nach n fragen, wenn A, a und i gegeben sind; man erhält:

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log (1+i)}. \tag{5}$$

Kleine Kapitalien wird man freilich bei durchschnittlichem Zinsfufs kaum auf Zinseszins anlegen, und jemand, der eine Schuld Jahre lang

vernachlässigt hat, wird in der Regel nicht gezwungen werden, sie mit Zinseszinsen zu tilgen; bei grofsen Kapitalien aber kann man immerhin mit letzterer Möglichkeit rechnen, auch kann der Zins sogar mehrmals im Jahr verzinslich gemacht werden.

Wiederholte Verzinsung im Laufe eines Jahres.

4. Wird statt nach jedem Jahr nach jedem p^{ten} Teil des Jahres der Zins zum Kapital zugeschlagen und ist der Zins der Einheit während eines p^{ten} Teils des Jahres $= i$, so erhält man für das Kapital, wie es in n p^{ten} Teilen des Jahres geworden ist, die Formel (2).

Wird jetzt ein Kapital a auf Zinsen angelegt, dergestalt, dafs der Zins per Einheit für jeden p^{ten} Teil des Jahres $= y$ ist und wird jeden p^{ten} Teil des Jahres der Zins zum Kapital hinzugeschlagen, so ist das Kapital nach einem Jahr geworden:

$$a\,(1+y)^p. \tag{6}$$

Wird nun gefragt, wie grofs man y nehmen mufs, damit der Zins in einem ganzen Jahre i per Einheit ist, dann erhält man aus der Formel (6):

$$(1+y)^p = 1+i. \tag{7}$$

Hieraus folgt:

$$y = \sqrt[p]{1+i} - 1. \tag{8}$$

Entwickelt man das zweite Glied von (8) nach steigenden Potenzen von i, was hier möglich ist, weil man stets voraussetzen mufs, dafs $i < 1$, so hat man:

$$y = \frac{1}{p}\,i - \frac{p-1}{1\,.\,2\,.\,p^2}\,i^2 + \frac{(p-1)\,(2p-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,p^3}\,i^3 - \\ - \frac{(p-1)\,(2p-1)\,(3p-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,p^4}\,i^4 + \ldots. \tag{9}$$

Nimmt man z. B. $p = 2$, d. h. schlägt man nach jedem halben Jahr den Zins zu dem Kapital hinzu und soll der Zins während eines ganzen Jahres per Einheit i sein, so mufs man als Zins während eines halben Jahres per Einheit nehmen:

$$\sqrt{1+i} - 1 = \tfrac{1}{2}\,i - \tfrac{1}{8}\,i^2 + \tfrac{1}{16}\,i^3 - \tfrac{5}{128}\,i^4 + \ldots \tag{10}$$

5. Rechnet man mit 4 %, und ist also $i = 0.04$, so beträgt der mathematische Zins jedes Vierteljahr:

$$\sqrt[4]{1.04} - 1 = 0.00985.$$

Wendet man die Formel (9) an bis zu der zweiten Potenz von i, so kommt:

$$\tfrac{1}{4} \times 0.04 \overline{\wedge} \tfrac{3}{32} \times 0.0016 = 0.00985.$$

Rechnet man mit einfachem Zins während des Laufes des Jahres, und nimmt man den Zins 0.01 für jedes Vierteljahr, so mufs gekürzt werden:

1. Vierteljahr um 3 Vierteljahr Zins, also 0.0003
2. „ „ 2 „ „ „ 0.0002
3. „ „ 1 „ „ „ 0.0001
4. „ „ 0

Die ganze Kürzung soll also betragen: 0.0006, das ist für jedes Vierteljahr 0.00015.

Der Zins ist also jedes Vierteljahr

$$0.01 - 0.00015 = 0.00985.$$

Die drei Methoden geben also bis in den fünften Decimal dasselbe Resultat.

Die letzte Behandlung läfst sich generalisiren. Läfst man den Zins per Jahr zahlen mit $\frac{i}{p}$ jeden p^{ten} Teil des Jahres, so soll gekürzt werden in nachstehender Weise:

bei der Bezahlung am Ende des 1. Jahresteils $\frac{p-1}{p} \cdot \frac{i^2}{p}$,
„ „ „ „ „ „ 2. „ $\frac{p-2}{p} \cdot \frac{i^2}{p}$,
„ „ „ „ „ „ 3. „ $\frac{p-3}{p} \cdot \frac{i^2}{p}$,
„ „ „ „ „ „ $p-1$ „ $\frac{1}{p} \cdot \frac{i^2}{p}$,
„ „ „ „ „ „ p^{ten} „ 0.

Im ganzen beträgt die Kürzung also

$$\tfrac{1}{2} \frac{p(p-1)}{p} \cdot \frac{i^2}{p} = \tfrac{1}{2}(p-1)\frac{i^2}{p}.$$

Werden diese Kürzungen verteilt über alle Raten, so kommt für jede Rate eine Kürzung zum Betrage von

$$\tfrac{1}{2}(p-1)\frac{i^2}{p^2}.$$

Jede Rate soll also betragen:

$$\frac{1}{p}\,i - \tfrac{1}{2}(p-1)\frac{i^2}{p^2};$$

wir bekommen also die Formel (9) bis zu der zweiten Potenz von i.

Bei dieser Methode sind indefs zwei Fehler begangen; erstens ist im Laufe des Jahres einfacher Zins gerechnet; zweitens sind die Kürzungen gleichmäfsig über alle Zahlungen verteilt. Dennoch sieht man, wie gering der Fehler im ganzen ist.

6. Verzinst man die Einheit zu dem Zins i per Jahr in dem Sinne, dafs dieser jeden p^{ten} Teil des Jahres $\frac{i}{p}$ beträgt und wieder verzinslich wird, so wächst die Einheit in einem Jahre an zu $\left(1+\frac{i}{p}\right)^p$, sodafs der Zins am Ende eines Jahres ist:

$$\left(1+\frac{i}{p}\right)^p - 1. \qquad (11)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von i, so erhält man:

$$i + \frac{1}{1\,.\,2}\left(1-\frac{1}{p}\right)i^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)i^3 + \\ + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{3}{p}\right)i^4 + \ldots \qquad (12)$$

Hieraus zeigt sich also der Unterschied, ob man z. B. den Zins von 4 Procent am Ende eines Jahres zahlt, oder den Zins von 2 Procent am Ende jedes halben Jahres.

Wächst nun ein Kapital in Folge des Zinses während eines Jahres im Verhältnisse von 1 zu $1+i$ an, so ist es nach der Formel (7) richtig zu sagen, dass es während eines p^{ten} Teils des Jahres wie 1 zu $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ und deshalb während m solcher Teile des Jahres wie 1 zu $(1+i)^{\frac{m}{p}}$ wächst.

7. Ist ein Kapital während einer ganzen Anzahl von Jahren mit noch einem Bruchteil eines Jahres zu Zinseszins angelegt, dann ist es vielfach Gebrauch, während dieses Teils des Jahres, einfachen Zins zu rechnen. Wenn das Kapital also während $n+\frac{m}{p}$ Jahre auf Zinsen steht, wo $\frac{m}{p}$ ein ächter Bruch ist, dann wächst in Folge

dieser Berechnungsweise das Kapital an im Verhältnisse von 1 zu $(1+i)^n\left(1+\frac{m}{p}\,i\right)$. Mathematisch richtig ist es, dasselbe während dieser Zeit als von 1 zu $(1+i)^n(1+i)^{\frac{m}{p}} = (1+i)^{n+\frac{m}{p}}$ wachsend zu betrachten.

Bei Zinseszins ist es also rationell, die Formel

$$A = a\,(1+i)^n$$

für jeden Wert von n gelten zu lassen, mag n eine ganze, eine gebrochene oder eine gemischte Zahl sein.

8. Wenn der Zins der Einheit für ein Jahr i ist, so soll mathematisch der Zins während $\frac{1}{p}$ Jahr $(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$ sein.

Nimmt man nun für jeden p^{ten} Jahresteil den Zins gleich grofs, so ist der Zins für das ganze Jahr

$$p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right] = j_p. \qquad (13)$$

Bei unbegrenzter Zunahme von p ist die Grenze dieses Ausdrucks

$$\text{Lim}\; j_p = L\,(1+i) = \delta, \qquad (14)$$

worin L den natürlichen Logarithmus andeutet, welcher zur Basis hat:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2.718281828.$$

Continuirliche Verzinsung.

9. Wenn in dem Ausdruck $\left(1+\frac{i}{p}\right)^p$, welcher angiebt, wie grofs in einem Jahre die Einheit wird, wenn der Zins $\frac{i}{p}$ jeden p^{ten} Teil des Jahres zugeschlagen wird, die Zahl p unbegrenzt zunimmt, sodafs die Anzahl der Zuschläge bis ins Unendliche wächst, dann nähert sich dieser Ausdruck der Grenze:

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{1.2} + \frac{i^3}{1.2.3} + \frac{i^4}{1.2.3.4} + \ldots \qquad (15)$$

Das stetige (continuirliche) Zuschlagen des Zinses bei dem Zinsfufse i hat also dieselbe Wirkung wie ein einmaliger Zuschlag per Jahr bei dem Zinsfufse $e^i - 1$.

10. Umgekehrt kann man fragen, welcher Zinsfuſs v bei continuirlicher Hinzufügung dem einmal am Ende des Jahres zu zahlenden Zins i entspricht. Die Antwort ergiebt sich durch Auflösung der Gleichung:

$$e^{\delta} = 1 + i,$$

aus welcher folgt:

$$\delta = L(1+i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \ldots \qquad (16)$$

Es versteht sich von selbst, daſs δ in Formel (16) denselben Wert hat wie $\operatorname{Lim} j_p$ in Formel (14). Der continuirliche Zinsenzuschlag, der näherungsweise erreichbar ist, wenn man den Zins oft genug verzinst, hat für manche Überlegungen finanzieller Art Bedeutung.

Zins bei Vorauszahlung.

11. Es kommt bisweilen vor, daſs die Schuldner den festgesetzten jährlichen Zins im voraus zahlen müssen. Hierbei entsteht die Frage, wie groſs der Zins ist, den der Gläubiger auf diese Weise in Wirklichkeit für sein Geld bekommt.

Wenn die geliehene Summe die Einheit und der festgesetzte Zins per Jahr und Einheit i ist, so erhält der Geldleiher im Falle der Vorauszahlung des Zinses am Anfang des Jahres die Summe $1 - i$, und am Ende des Jahres ist seine Schuld 1; seine Schuld wächst also durch den Zins in einem Jahre von $1 - i$ auf 1 an, und 1 wächst deshalb an auf $\frac{1}{1-i}$. Setzen wir jetzt den in Frage stehenden Zins per Einheit und per Jahr am Ende des Jahres $= d$, so ergiebt sich die Gleichung: $\frac{1}{1-i} = 1 + d$, woraus folgt

$$d = \frac{i}{1-i}, \qquad (17)$$

was man auch ohne Lösung einer Gleichung finden konnte, denn die Schuld ist für das erhaltene Kapital $1 - i$ am Ende des Jahres 1, d. h. $1 - i$ hat im Jahre den Zins i gebracht.

Discontiren.

12. Um den gegenwärtigen Wert einer Summe A zu bestimmen, die nach $\frac{m}{p}$ Jahr zahlbar ist, vorausgesetzt, daſs $\frac{m}{p}$ ein ächter Bruch

ist, wird man bei Rechnung mit einfachem Zins die Summe A durch $1 + \frac{m}{p} i$ dividiren müssen, sodafs dieser gegenwärtige Wert ist:

$$a = \frac{A}{1 + \frac{m}{p} i}. \tag{18}$$

In der That wächst dieser Wert a während der Zeit $\frac{m}{p}$ durch den Zins zu A an.

13. Der Kaufmann wird gewöhnlich so schliefsen: der Zins von A in $\frac{m}{p}$ Jahr ist $= A \,.\, \frac{m}{p} \,.\, i$, und um den discontirten Wert zu bekommen, mufs man jenen Zins von A subtrahiren, sodafs man hat:

$$a = A \,.\, \left(1 - \frac{m}{p} i\right). \tag{19}$$

Dieser nach kaufmännischer Art berechnete Discont ist zu grofs gegenüber dem Zinsfufs; denn die Summe $A \,.\, \left(1 - \frac{m}{p} i\right)$ wächst in $\frac{m}{p}$ Jahr durch den Zins nicht an zu A, sondern nur zu:

$$A \,.\, \left(1 - \frac{m}{p} i\right)\left(1 + \frac{m}{p} i\right) = A \,.\, \left(1 - \frac{m^2}{p^2} i^2\right).$$

Der Unterschied ist von geringer Bedeutung, so lange $\frac{m}{p}$ ein kleiner Bruch ist; er wird aber von gröfserem Belang, je mehr $\frac{m}{p}$ zunimmt und besonders wenn $\frac{m}{p} > 1$ wird.

Um das Unrichtige der Methode deutlich hervortreten zu lassen, setze man $\frac{m}{p} = \frac{1}{i}$, dann ist nach der Formel (19) der discontirte Wert $= 0$. Dies ist z. B. der Fall, wenn man nach dieser Formel ein Kapital discontirt, das nach zwanzig Jahren zahlbar ist, und wenn man dabei den Zins zu 5 Procent rechnet. Ist $\frac{m}{p} > \frac{1}{i}$, so ist der discontirte Wert sogar negativ.

14. Rechnet man mit Zinseszins, so wird der discontirte Wert a eines Kapitals A, das nach n Jahren zu zahlen ist, durch die Formel (3)

$$a = \frac{A}{(1 + i)^n}$$

ausgedrückt.

Ist n aber eine gemischte Zahl, so giebt es vier verschiedene Arten der Discontirung, welche angewendet werden und die wir im Folgenden vergleichen wollen.

Ist nämlich wieder A die Summe, die jemand nach $n + \frac{m}{p}$ Jahren schuldig ist und bedeutet $\frac{m}{p}$ einen ächten Bruch, so hat man die vier nachfolgenden Formeln:

1°. $$a = \frac{A}{(1+i)^n}\left(1 - \frac{m}{p}i\right); \tag{20}$$

2°. $$a = \frac{A}{(1+i)^n\left(1+\frac{m}{p}i\right)}; \tag{21}$$

3°. $$a = \frac{A}{(1+i)^{n+1}}\left(1 + \frac{p-m}{p}i\right); \tag{22}$$

4°. $$a = \frac{A}{(1+i)^{n+\frac{m}{p}}}. \tag{23}$$

Diese vier Formeln unterscheiden sich nur durch den Faktor, durch welchen der gegenwärtige Wert der Schuld nach $n + \frac{m}{p}$ Jahren aus dem derselben Schuld nach n Jahren erhalten wird. Die Faktoren sind der Reihe nach:

1°. $1 - \frac{m}{p}i$; hierbei setzt man voraus, dafs der Zins der Zeit proportional ist, es wird aber so gerechnet, als wenn der Zins $\frac{m}{p}i$ schon am Anfange des Jahres gezahlt würde.

2°. $\frac{1}{1+\frac{m}{p}i}$; auch hier setzt man voraus, dafs der Zins der Zeit proportional ist, und bei dieser Voraussetzung ist arithmetisch alles richtig.

3°. $\frac{1+\frac{p-m}{p}i}{1+i}$ setzt auch voraus, dafs der Zins der Zeit proportional ist, reducirt aber die Zahlung zuerst auf eine solche am Ende des Jahres durch den Faktor $1 + \frac{p-m}{p}i$, und dann wieder nach dem

Anfang durch den Faktor $\frac{1}{1+i}$; man rechnet, als wenn der Schuldner seine Schuld (die Einheit) nach $\frac{m}{p}$ Jahr, den Zins $\frac{m}{p}\,i$ aber am Ende des Jahres abtrüge.

4°. $\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{p}}}$ beruht auf der consequenten Rechnung von Zins auf Zins, wo der Zins für gleiche Zeitteile mit der Zeit immer mehr zunimmt; sie ist die einzig mathematisch richtige.

15. Die Formeln 1° und 2° rechnen dem Gläubiger zum Nachteil, 1° am meisten, 3° dagegen zum Vorteil. In der Praxis aber sind die Unterschiede meistens nicht so grofs, dafs es ernstliche Schwierigkeiten verursachen könnte, wenn die Anwendung dieser oder jener Formel je nach den verschiedenen Umständen vorgezogen wird.

Um einen Begriff von der Gröfse des möglichen Fehlers bei den verschiedenen Formeln zu geben, wollen wir hier den häufig vorkommenden Fall: $\frac{m}{p} = \frac{1}{2}$ besonders betrachten und die verschiedenen Faktoren nach den steigenden Potenzen von i entwickeln. Man hat dann:

$$\left.\begin{array}{ll} 1°. & 1 - \frac{1}{2}\,i, \\ 2°. & \frac{1}{1+\frac{1}{2}\,i} = 1 - \frac{1}{2}\,i + \frac{1}{4}\,i^2 - \frac{1}{8}\,i^3 + \ldots, \\ 3°. & \frac{1+\frac{1}{2}\,i}{1+i} = 1 - \frac{1}{2}\,i + \frac{1}{2}\,i^2 - \frac{1}{2}\,i^3 + \ldots, \\ 4°. & \frac{1}{\sqrt{1+i}} = 1 - \frac{1}{2}\,i + \frac{3}{8}\,i^2 - \frac{5}{16}\,i^3 + \ldots \end{array}\right\} \quad (24)$$

Bemerkenswert ist es, dafs, selbst wenn man bis zur dritten Potenz von i geht, der richtige Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1+i}}$ das arithmethische Mittel zwischen $\frac{1}{1+\frac{1}{2}\,i}$ und $\frac{1+\frac{1}{2}\,i}{1+i}$ ist.

Die Methoden 1°, 2° und 3° gehen also alle drei von der Voraussetzung aus, dafs der Zins halbjährig $\frac{1}{2}\,i$ ist; bei dieser Voraussetzung wächst aber in einem halben Jahre

$$1 - \tfrac{1}{2}\,i \text{ zu } 1 - \tfrac{1}{4}\,i^2 \text{ an};$$

$$\frac{1+\frac{1}{2}i}{1+i} \text{ zu } \frac{(1+\frac{1}{2}i)^2}{1+i} = 1 + \frac{i^2}{4(1+i)};$$

während gerade die Einheit erreicht wird durch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}i}$.

16. Als die richtige Disconto-Formel, welche aufserdem bei wissenschaftlichen finanziellen Entwickelungen am leichtesten zu handhaben ist, erweist sich sowohl für ganze als auch für gebrochene und gemischte Werte von n:

$$a = \frac{A}{(1+i)^n}.$$

Es ist noch darauf hinzuweisen, dafs die Formel $A = a(1+i)^n$ sowohl für die Aufzinsung als für die Abzinsung gilt, wenn man für n sowohl negative als positive Werte zuläfst. Positive Werte von n beziehen sich auf die Aufzinsung, negative Werte auf das Discontiren; m. a. W. positive Werte führen von der Gegenwart in die Zukunft, negative Werte von der Zukunft in die Gegenwart.

Der mittlere Zahlungstermin.

17. Wenn jemand mehrere Summen schuldig ist: a_1 nach n_1 Jahren, a_2 nach n_2 Jahren, a_3 nach n_3 Jahren u. s. w., a_p nach n_p Jahren, so fragen wir, wann er alle Summen auf einmal zahlen kann, ohne dafs der Schuldner oder der Gläubiger einen Verlust an Zins erleiden. Der Zins per Einheit und per Jahr sei i.

Die fragliche Zeit setzen wir $= x$. Man hat jetzt einfach die Gleichung aufzustellen, welche ausdrückt, dafs der discontirte Wert (Jetztwert) der zusammengefassten Summen der Summe der Jetztwerte der einzelnen Summen gleich ist. Diese Gleichung ist:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p}{(1+i)^x} = \frac{a_1}{(1+i)^{n_1}} + \frac{a_2}{(1+i)^{n_2}} + \ldots + \frac{a_p}{(1+i)^{n_p}},$$

woraus folgt:

$$x = \left\{ \log(a_1+a_2+\ldots+a_p) - \right.$$

$$\left. - \log\left(\frac{a_1}{(1+i)^{n_1}} + \frac{a_2}{(1+i)^{n_2}} + \ldots + \frac{a_p}{(1+i)^{n_p}}\right)\right\} \cdot \frac{1}{\log(1+i)}. \quad (25)$$

Diese Formel gilt für alle Werte der Zahlen n; sind aber die Zahlen alle klein, und jedenfalls kleiner als die Einheit, so erhält

man x näherungsweise durch die Art der Discontirung nach Formel (19). Man hat dann:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)\,(1 - x\,i) = a_1\,(1 - n_1\,i) + a_2\,(1 - n_2\,i) + \ldots + a_p\,(1 - n_p\,i),$$

woraus folgt:

$$x = \frac{n_1\,a_1 + n_2\,a_2 + \ldots + n_p\,a_p}{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}, \qquad (26)$$

eine Formel, die von dem Zinsfufse unabhängig ist und auch wohl in der Praxis angewendet wird; in der Regel freilich ist diese Rechnungsweise nur anwendbar für Werte von n, die kleiner als die Einheit sind.

Die Formel (26) kann aus (25) abgeleitet werden, indem man diese letztere nach Potenzen von i entwickelt und die zweiten und höheren Potenzen von i vernachlässigt. Setzt man

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p = S,\ n_1\,a_1 + n_2\,a_2 + \ldots + n_p\,a_p = Q,$$

so ergiebt sich bei Benützung der natürlichen Logarithmen aus (25):

$$x = \left[L\,S - L\,(S - Q\,i)\right] \cdot \frac{1}{i} =$$

$$= \left[-L\left(1 - \frac{Q}{S}\,i\right)\right] \cdot \frac{1}{i} = \frac{Q}{S}\,i \cdot \frac{1}{i} = \frac{Q}{S}.$$

Kapitel II.

Periodische Zahlungen.

Annuitäten.

18. Unter Annuität oder Zeitrente versteht man eine Summe (Rente), die in regelmäfsigen Zeitperioden zahlbar ist. Wird am Ende jedes Jahres n Jahre hindurch die Summe a gezahlt und will man den Wert (Endwert) all dieser Zahlungen und zwar für das Ende dieser n Jahre bestimmen, so braucht man nur die Summe der Werte der einzelnen Zahlungen zu nehmen. Setzen wir den Zins wieder i per

Einheit und per Jahr und setzen $1+i=r$, dann hat man für den ganzen Wert:

$$ar^{n-1}+ar^{n-2}+ar^{n-3}+\ldots+a=$$

$$a.(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1})=a.\frac{r^n-1}{r-1}.$$

Setzt man wieder $r=1+i$, so erhält man als den Wert der n Zahlungen unmittelbar nach der letzten Zahlung:

$$a.\frac{(1+i)^n-1}{i}. \qquad (27)$$

Setzt man hierin $a=1$, so findet man, dafs $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ der Endwert der Annuität ist zum Betrage der Einheit postnumerando zahlbar während n Jahre.

Die Formel (27) läfst sich ohne Reihe ableiten: 1 ist der Zins des Kapitals $\frac{1}{i}$; dieses Kapital wächst in n Jahr zu

$$\frac{1}{i}\cdot(1+i)^n;$$

der Zins allein ist also gewachsen zu $\frac{1}{i}\cdot(1+i)^n-\frac{1}{i}$.

Man kann auch sagen: der Zins des Kapitals 1 ist nach n Jahren $(1+i)^n-1$, wobei es gleichgültig erscheint, ob n eine ganze oder eine gebrochene Zahl ist.

Also kommt der jährliche Zins i überein mit $(1+i)^n-1$ nach n Jahren, und der Zins 1 kommt überein mit $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ nach n Jahren.

Finden aber die Zahlungen am Anfang jedes Jahres (praenumerando) anstatt am Ende des Jahres (postnumerando) statt, dann ergiebt sich der Wert jeder Zahlung, indem man den der gleichvielen von vorhin mit $1+i$ multiplicirt. Daher ist am Ende der n Jahre der Wert der Annuität:

$$a.(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{i}. \qquad (28)$$

Hieraus folgt, dafs eine Summe

$$\frac{i}{(1+i)\,[(1+i)^n-1]}$$

wenn sie am Anfang jedes Jahres gezahlt wird, in n Jahren zu der Einheit anwächst.

Will man den Wert der Annuität am Anfang des ersten Jahres wissen, so hat man nur den Wert nach den n Jahren mit $(1+i)^n$ zu dividiren. Deshalb ist am Anfang der Wert der postnumerando zahlbaren Annuität:

$$a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \tag{29}$$

und derjenige der praenumerando zahlbaren Annuität:

$$a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}} \tag{30}$$

wie man dies auch finden kann, indem man die einzelnen Zahlungen auf den Anfang des ersten Jahres reducirt.

Ewige Rente.

19. Es nehme in den Formeln (29) und (30) die Zahl n fortdauernd zu und ermitteln wir den Grenzwert. Formel (29) läfst sich dazu schreiben:

$$a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

sodafs bei der Zunahme von n die Grenze $\frac{a}{i}$ ist.

Formel (30) läfst sich schreiben:

$$a \cdot \frac{1+i - \frac{1}{(1+i)^{n-1}}}{i},$$

wovon die Grenze $a \cdot \frac{1+i}{i}$ ist.

Deshalb: der gegenwärtige Wert einer ewigen (perpetuellen) Rente im Betrage der Einheit per Jahr ist, wenn die Rente postnumerando zahlbar ist $a_\infty = \frac{1}{i}$, und wenn die Rente praenumerando zahlbar ist:

$$1 + a_\infty = \frac{1+i}{i}. \tag{31}$$

Dies läfst sich auch ohne die vorhergehende Entwickelung begreifen.

Rückzahlung von Schulden durch Annuitäten.

20. Wenn jemand eine Schuld hat, die c beträgt, und wenn er diese vermittels einer Annuität in n Jahren abtragen will, sodafs er

während dieser n Jahre jährlich dieselbe Summe zahlt, die zugleich den Zins und einen Teil der Tilgung enthält, und er am Ende dieser n Jahre nichts mehr schuldig ist, weder an Kapital, noch an Zins, so fragt man, wie viel er jährlich zu zahlen hat.

Am Ende der n Jahre mufs die Schuld, die zu Zinseszins verzinst zu denken ist, eben so viel betragen als die sämmtlichen Zahlungen, zu Zinseszinsen verzinst; oder allgemeiner: im selben Augenblick mufs der Wert der Schuld, mit dem Zinse zusammen gerechnet, eben so grofs sein wie der Wert der sie tilgenden Annuitäten. Wir setzen voraus, dafs die Annuität am Ende des Jahres gezahlt wird.

Setzt man die jährliche Annuität $= a$, so ergiebt sich nach Formel (27) der Wert von a aus der Gleichung:

$$a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = c \cdot (1+i)^n,$$

woraus folgt:

$$a = c \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}. \tag{32}$$

Diese Formel läfst sich schreiben:

$$a = c \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} =$$

$$= c \cdot \frac{1}{n - \frac{n(n+1)}{1.2.} i + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.} i^2 - \ldots}. \tag{33}$$

Bei derselben Schuld und derselben Anzahl von Jahren der Tilgung ist die Annuität höher, je nachdem der Zinsfufs höher ist.

Dieser Satz ist zwar leicht einzusehen; um denselben aber mathematisch zu begründen, differenzire man den Ausdruck: $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ nach i, und man bekommt:

$$\frac{(1+i)^{n-1}[(1+i)^{n+1} - \{1+(n+1)i\}]}{[(1+i)^n - 1]^2}$$

Dieser Ausdruck ist positiv, weil $(1+i)^{n+1} > 1 + (n+1)i$ ist.

$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ ist also eine wachsende Funktion von i, d. h. nimmt gleichzeitig zu mit i.

In der Formel (32) vergröfsert sich deshalb a mit wachsendem i.

Setzt man in (32) $i = 0$, so wird die rechte Seite $\frac{0}{0}$, also unbestimmt, Formel (33) aber giebt dann $a = \frac{c}{n}$, wie sich aus der Sache selbst unmittelbar schliefsen läfst, weil ja dann das Anlehen ein zinsloser Vorschufs ist.

21. Wenn die Schuld c durch eine Annuität vom jährlichen Betrage a in n Jahren getilgt wird, so entsteht oft die Frage, wie grofs die augenblickliche Schuld noch ist; wenn $p < n$, so ist sie nach p Jahren, das ist unmittelbar nach der p^{ten} Zahlung, gleich dem Wert der ganzen Schuld (wie sie beim Anfange war) vermindert um den Wert der bereits gezahlten Annuitäten, d. h. sie ist:

$$c(1+i)^p - a \cdot \frac{(1+i)^p - 1}{i}. \tag{34}$$

Dieser Ausdruck wird, nachdem (32) substituirt ist:

$$c \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1} \tag{35}$$

Wenn $p = 0$, so geht (35) über in c, und wenn $p = n$, geht sie über in 0, wie dies auch offenbar der Fall sein mufs.

22. Wie sich aus der Sache selbst und auch aus der Berechnung schliefsen läfst, zahlt jemand, der eine Schuld vermittels einer Annuität tilgt, jährlich mehr als er an Zinsen zahlen würde, ohne die Schuld zu tilgen. Man kann also bezüglich einer Annuität sagen, dafs sie aus zwei Teilen besteht: 1° aus dem Zins der noch verbliebenen Schuld vom vergangenen Jahr und 2° aus einer Tilgung der Schuld.

Der Zins wird jedes Jahr kleiner, die Tilgung wird also jedes Jahr gröfser. Es läfst sich jetzt leicht finden, wie grofs bei einer bestimmten Zahlung die Tilgung ist.

Formel (34) giebt den Betrag der Schuld nach der p^{ten} Zahlung an; setzen wir in derselben $p - 1$ statt p, dann zeigt sich, dafs nach $p - 1$ Zahlungen die Schuld:

$$c(1+i)^{p-1} - a \cdot \frac{(1+i)^{p-1} - 1}{i} \tag{36}$$

war.

(36)—(34) deutet jetzt an, wie grofs bei der p^{ten} Zahlung die in der Annuität mit einbegriffene Tilgung war; man findet dafür leicht:

$$(a - ic)(1+i)^{p-1}, \tag{37}$$

was sich, indem man (32) substituirt, auf

$$ic \cdot \frac{(1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1} \qquad (38)$$

reduciren läfst.

Die Formel (37) zeigt, dafs die verschiedenen jährlichen Tilgungen eine steigende geometrische Reihe bilden, die $1+i$ zum Quotienten hat.

Bei der ersten Tilgung, also wenn $p = 1$ ist, giebt die Formel als Tilgung $a - ic$. Wirklich beträgt der Zins der Schuld c während des Jahres ic; subtrahirt man dies von der Annuität a, dann bildet der Rest $a - ic$ die erste Tilgung.

Nimmt man die Summe der n Glieder der geometrischen Reihe, die $a - ic$ als erstes Glied und $1 + i$ als Quotienten hat, dann erhält man:

$$(a - ic) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Substituirt man hierin:

$$a = c \cdot \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1},$$

dann reducirt sich diese Summe zu c, wie es sich auch gehört, weil ja durch die n Tilgungen die ganze Summe getilgt worden ist.

23. Einige Banken, die Geld auf Hypothek oder andere Sicherheiten unter der Bedingung einer Tilgung vermittels Annuitäten ausleihen, verlangen aufser der Annuität jährlich eine Entschädigung für Administrationskosten, z. B. Mk. 0,75 von Mk. 100 geliehenem Kapital. Dies ist indessen keine gute Anordnung, denn auf diese Weise bleiben die Administrationskosten jährlich gleich hoch, wie klein die Schuld auch wird. Das einzig rationelle Verfahren ist, wegen der Administrationskosten die Annuität zu etwas höherem Zinsfufs zu berechnen. Will z. B. die Gesellschaft zu 4 % ausleihen, so lasse sie sich eine Annuität zu $4\frac{1}{2}$ oder $4\frac{3}{4}$ % zahlen. Auch giebt es Banken, die in den Tarifen die Annuitäten angeben, als wenn sie am Ende des Jahres gezahlt würden, sie aber thatsächlich vorauszahlen lassen. Dies kommt auf dasselbe hinaus, als ob sie statt des Zinses i per Einheit $\frac{i}{1-i}$ nehmen (siehe No. 11). Ist z. B. der Tarif einer postnumerando zahlbaren Annuität mit 4 % berechnet, wird diese aber trotzdem vorausgezahlt, so nimmt die Bank in Wirklichkeit $\frac{4}{0.96}$ % $= 4\frac{1}{6}$ % statt 4 %.

Annuitätentafeln.

24. Die Formel (29)

$$c = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n},$$

die den Anfangswert einer Annuität angiebt, zeigt, dafs dieser Wert bei demselben Zinsfufs und derselben Zeitdauer, also bei denselben Werten von i und n dem jährlichen Betrage a der Annuität proportional ist.

Setzen wir deshalb $a = 1$, so erhalten wir also für den Wert der Annuität:

$$c = \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}. \tag{39}$$

Man hat Tafeln aufgestellt, die den Wert von c für verschiedene Werte von i und n angeben. Solche Tafeln, die man Annuitätentafeln nennt, sind sehr nützlich, um den jährlichen Betrag der Annuität zu bestimmen, welche bei bestimmtem Zinsfufse und in bestimmter Zeit eine gewisse Schuld tilgt. Man hat einfach den Betrag der Schuld mit dem angegebenen Wert von c zu dividiren. Umgekehrt kann man mit Hilfe dieser Tafeln jeden Augenblick durch einfache Multiplication den Stand der Schuld, die durch eine gegebene Annuität getilgt wird, berechnen.

Sind der Zinsfufs i und der Anfangswert c der Annuität, letztere stets zum Betrage der Einheit per Jahr genommen, bekannt, und wird nach der Zahl der Jahre gefragt, so kann auch hierbei die Annuitätentafel Dienste leisten; man kann daraus ablesen, zwischen welchen ganzen Werten von n die gesuchte Zahl begriffen ist, und diese durch Interpolation so genau wie möglich ermitteln. Auch hier ist aber eine unmittelbare Auflösung möglich, denn man erhält aus (39):

$$n = -\frac{\log(1 - ic)}{\log(1+i)}. \tag{40}$$

Weniger leicht ist die unmittelbare Auflösung und deshalb die Hilfe der Annuitätentafeln nützlicher bei der nachfolgenden Aufgabe.

Berechnung des Zinsfufses bei gegebener Annuität.

25. Es seien in der Formel (39) n und c gegeben, i erfragt, und setzen wir voraus, dafs die Anzahl der Jahre n eine ganze Zahl ist.

Setzen wir $1 + i = r$, dann ist:

$$c = \frac{r^n - 1}{(r-1)\,r^n}$$

und man hat also die Gleichung zu lösen:

$$cr^{n+1} - (c+1)r^n + 1 = 0.$$

Wenn der Wert von n einigermafsen grofs ist, so ist die Berechnung von r nach einer der bekannten Näherungsmethoden zur Lösung der numerischen Gleichungen höherer Grade eine sehr weitläufige Arbeit.

Es giebt verschiedene weniger direkte Methoden, von welchen wir die nachfolgende aufnehmen.

Besitzt man Annuitätentafeln für verschiedenen Zinsfufs, so kann man nach den Werten, zwischen welchen der gegebene Wert c liegt, beurteilen, zwischen welchen Werten von i der gesuchte Zinsfufs liegen mufs. Hat man keine Annuitätentafeln, so rechne man c für verschiedene Werte von i und die bekannte Zahl n aus und bestimme so die Grenzen, zwischen welchen das gesuchte i liegt.

Man habe auf diese Weise gefunden, dafs i zwischen i_1 und $i_1 + h$ liegen mufs (wo z. B. $i_1 = 0{,}04$, $h = 0{,}005$). Dem Zinsfufse i_1 entspreche der Wert c_1 für c, und dem Zinsfufse $i_1 + h$ der Wert c_2, sodafs das bekannte c zwischen c_1 und c_2 liegt, den engsten Grenzen, die man mit Hilfe der Annuitätentafeln hat finden können. Jetzt bestimme man noch den Wert c_3, der dem Zinsfufs $i_1 + 2h$ entspricht. Den gesuchten Zinsfufs wollen wir mit $i_1 + y$ bezeichnen.

Wir betrachten die Zahlen c_1, c_2, c_3 als Glieder einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung; c_1 als Glied der Rangordnung 0, c_2 der Rangordnung h, c_3 der Rangordnung $2h$, so ist der gegebene Wert c ein Glied der Rangordnung y. Setzt man jetzt:

$$c_2 - c_1 = \Delta c_1,\ c_3 - c_2 = \Delta c_2,\ \Delta c_2 - \Delta c_1 = \Delta^2 c_1,$$

so hat man:

$$c = c_1 + \frac{y}{h}\Delta c_1 + \tfrac{1}{2}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h} - 1\right)\Delta^2 c_1,$$

oder

$$c = c_1 + \frac{y}{h}\left(\Delta c_1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 c_1\right) + \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{h^2}\Delta^2 c_1. \qquad (41)$$

Vernachlässigt man in (41) die zweite Potenz von $\frac{y}{h}$, sodafs diese Formel übergeht in

$$c = c_1 + \frac{y}{h}\left(\Delta c_1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 c_1\right),$$

so hat man als erste Annäherung:

$$\frac{y}{h} = \frac{c - c_1}{\Delta c_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 c_1}, \qquad (42)$$

eine Annäherung, die schon genauer ist, als wenn man c zwischen c_1 und c_2 als Glied einer Reihe der ersten Ordnung interpolirt hätte, denn diese Annäherung wäre:

$$\frac{y}{h} = \frac{c - c_1}{\Delta c_1}.$$

Eine genauere Annäherung als (42) ergiebt sich, wenn man in (41) für $\frac{y^2}{h^2}$ substituirt $\frac{y}{h} \cdot \frac{c - c_1}{\Delta c_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 c_1}$, d. h. wenn man einen der Faktoren $\frac{y}{h}$ durch den angenäherten Wert (42) ersetzt.

Die Formel (41) wird hierdurch:

$$c = c_1 + \frac{y}{h} \cdot (\Delta c_1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 c_1) + \frac{y}{h} \cdot \frac{c - c_1}{\Delta c_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 c_1} \cdot \tfrac{1}{2}\Delta^2 c_1,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{y}{h} = \frac{c - c_1}{\Delta c_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 c_1 + \frac{c - c_1}{\Delta c_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 c_1} \cdot \frac{1}{2}\Delta^2 c_1},$$

was man auch so schreiben kann:

$$\frac{y}{h} = \frac{1}{\frac{\Delta c_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 c_1}{c - c_1} + \frac{\frac{1}{2}\Delta^2 c_1}{\Delta c_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 c_1}}. \qquad (43)$$

Wenn hieraus $\frac{y}{h}$ berechnet ist, so ergiebt sich der gesuchte Zinsfuſs $i = i_1 + y$.

Diese Methode ist in hohem Maſse genau, wenn die Werte von c für um $\frac{1}{4}$ Procent aus einander liegende Zinsfuſse gegeben sind, sodaſs $h = 0{,}0025$ ist.

In „Die zusammengesetzte Zinsen- und Zeitrenten- oder Annuitäten-Rechnung“ von **W. M. J. Werker** sind die Annuitätentafeln gegeben für die Zinsfuſse mit Intervallen von $\frac{1}{8}$ Procent. Dieses Werk empfiehlt sich nicht nur durch Ausführlichkeit, sondern zeichnet sich auch aus durch sehr sorgfältige Bearbeitung und viele praktische Beispiele.

Man erreicht aber eine noch gröſsere Genauigkeit, wenn man in der Formel (43) unter den c nicht die Werte der Annuitäten versteht, sondern deren reciproke Werte, sodaſs die Δ die Differenzen dieser

reciproken Werte sind; man erhält dann schon eine genügende Annäherung, wenn der Zinsfuſs der Tafeln mit Intervallen von $\frac{1}{2}$ Procent wächst, also $h = 0{,}005$ ist.

Auch kann man in Formel (43) unter den Gröſsen c die Logarithmen der Annuitäten verstehen, sodaſs auch die Δ die Differenzen dieser Logarithmen bilden; die Annäherung ist dann schon wieder genauer und noch genau genug, selbst wenn der Zinsfuſs der Annuitätentafeln um ein ganzes Procent steigt. Ist n keine ganze, sondern eine gemischte Zahl, so darf man dieselbe Methode anwenden, nur kann man dann keine Annuitätentafeln benützen, sondern muſs drei Zahlen c berechnen.

Veränderliche Annuitäten.

26. Von den verschiedenen Arten, auf welche eine Annuität veränderlich sein kann, wollen wir nur den am häufigsten vorkommenden Fall behandeln: denjenigen nämlich, wo der Betrag der Annuität jährlich um dieselbe Zahl zunimmt.

Sei dann im ersten Jahr dieser Betrag a und die jährliche Zunahme v. Setzen wir bequemlichkeitshalber $1 + i = r$, so ist der Barwert dieser veränderlichen Annuität:

$$x = \frac{a}{r} + \frac{a+v}{r^2} + \frac{a+2v}{r^3} + \ldots + \frac{a+(n-2)v}{r^{n-1}} + \frac{a+(n-1)v}{r^n}.$$

Wenn wir beide Seiten mit r dividiren, so folgt:

$$\frac{x}{r} = \frac{a}{r^2} + \frac{a+v}{r^3} + \ldots$$
$$+ \frac{a+(n-3)v}{r^{n-1}} + \frac{a+(n-2)v}{r^n} + \frac{a+(n-1)v}{r^{n+1}}.$$

Subtrahirt man die zweite dieser Gleichungen von der ersten, so ergiebt sich:

$$x - \frac{x}{r} = \frac{a}{r} - \frac{a+(n-1)v}{r^{n+1}} + \left(\frac{v}{r^2} + \frac{v}{r^3} + \ldots + \frac{v}{r^n}\right),$$

woraus folgt:

$$x \cdot \frac{r-1}{r} = \frac{a(r^n-1)}{r^{n+1}} - \frac{(n-1)v}{r^{n+1}} + \frac{v}{r^n} \cdot \frac{r^{n-1}-1}{r-1},$$

$$x = \frac{a(r^n-1)}{r^n(r-1)} + \frac{v}{r^n(r-1)^2}[r^n - n(r-1) - 1],$$

oder, wenn man wieder $r = 1 + i$ setzt:

$$x = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + v \cdot \frac{1}{i^2(1+i)^n}[(1+i)^n - ni - 1]. \quad (44)$$

Nimmt man hier $a = v = 1$, dann erhält man als Wert einer Annuität, welche im ersten Jahr 1 ist und von Jahr zu Jahr um 1 zunimmt:

$$\frac{(1+i)^{n+1} - (n+1)i - 1}{i^2(1+i)^n}. \quad (45)$$

Setzt man

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A,$$

worin dann A ist der Wert der unveränderlichen Annuität zum Betrage der Einheit während n Jahre, so ist

$$(1+i)^n = \frac{1}{1 - iA};$$

substituirt man dies in die Formel (44), so kommt:

$$x = aA + v\frac{A}{i} - v\,\frac{n}{i(1+i)^n} =$$

$$= aA + v\frac{A}{i} - \frac{vn}{i}(1 - iA) =$$

$$= \left(a + nv + \frac{v}{i}\right)A - \frac{nv}{i}. \quad (44^*)$$

Nimmt die Annuität alljährlich mit v ab, dann stellt sich v negativ, und der Wert der Annuität ist

$$\left(a - nv - \frac{v}{i}\right)A + \frac{nv}{i}. \quad (44^{**})$$

Setzt man in der abnehmenden Annuität $a = 1$, $v = \frac{1}{n}$, sodafs die Annuität, mit 1 anfangend, jährlich mit $\frac{1}{n}$ abnimmt und also die letzte Zahlung $\frac{1}{n}$ beträgt, dann ist ihr Wert:

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{ni}A = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{n}A\right).$$

Substituirt man in die Formel (45)

$$(1+i)^n = \frac{1}{1 - iA},$$

so wird sie

$$\frac{(1+i+ni)A - n}{i}. \quad (45^*)$$

Ratenzahlung.

27. Tritt an die Stelle einer Zahlung am Ende des Jahres eine Zahlung in gleichen Raten im Laufe des Jahres, so vergrößert man dadurch ihren Wert.

Man teile das Jahr in m gleiche Teile und lasse an die Stelle einer Zahlung von m am Ende des Jahres eine Zahlung von 1 am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres treten.

Die verschiedenen Zahlungen haben dann am Ende des Jahres einen Gesammtwert von

$$r^{1-\frac{1}{m}} + r^{1-\frac{2}{m}} + r^{1-\frac{3}{m}} + \ldots + r^{\frac{1}{m}} + 1 = \frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}}-1},$$

oder, weil $r - 1 = i$ ist,

$$\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}.$$

Die Zahlung der Einheit, auf m Zahlungen je zum Betrage von $\frac{1}{m}$ am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres verteilt, stimmt also überein mit einer Zahlung von

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1} \qquad (46)$$

am Ende des Jahres.

Die Zahlung von 1 am Ende des Jahres ist mit der Zahlung von

$$\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{i} \qquad (47)$$

am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres gleichwertig.

Demnach stimmt die Zahlung von 1 am Ende des Jahres auch überein mit der Zahlung von

$$\frac{\sqrt{1+i}-1}{i} \qquad (48)$$

am Ende jedes halben Jahres, was sich auch ergiebt aus der Gleichung:

$$y\sqrt{1+i} + y = 1, \text{ d. h. } y = \frac{1}{\sqrt{1+i}+1} = \frac{\sqrt{1+i}-1}{i}.$$

Entwickeln wir den Ausdruck (47) nach steigenden Potenzen von i, dann folgt:

$$\frac{1}{m} - \frac{m-1}{2m^2} i + \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^3} i^2 - \ldots\ldots$$

Vernachlässigt man die dritten und höheren Potenzen von i, dann stimmt eine Zahlung von 1 am Ende des Jahres überein mit einer Zahlung von

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4} i + \frac{1}{8} i^2) & \text{am Ende jedes halben Jahres} \\ \frac{1}{4}(1 - \frac{3}{8} i + \frac{7}{32} i^2) & \text{„ „ „ Vierteljahres} \\ \frac{1}{12}(1 - \frac{11}{24} i + \frac{25}{864} i^2) & \text{„ „ „ Monats.} \end{array}\right\} \quad (49)$$

Der Fehler ist noch gering, auch wenn man die zweite Potenz von i vernachlässigt und also statt der vorstehenden Ausdrücke der Reihe nach:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} i, \quad \frac{1}{4} - \frac{3}{32} i, \quad \frac{1}{12} - \frac{11}{288} i$$

nimmt.

Wenn eine Annuität, die am Ende jedes Jahres zahlbar ist, einen Wert A hat, dann hat nach Formel (46) dieselbe Annuität, wenn sie in m gleichen Raten zahlbar ist, den Wert:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1} \cdot A, \quad (50)$$

oder wenn man diesen Ausdruck nach Potenzen von i entwickelt:

$$\left(1 + \frac{m-1}{2m} i - \frac{m^2-1}{12m^2} i^2 + \ldots\right) \cdot A, \quad (51)$$

wobei aber in der Praxis

$$\left(1 + \frac{m-1}{2m} i\right) \cdot A \quad (52)$$

in den meisten Fällen genau genug ist.

Diese Formel läßt sich auch in folgender Weise begründen. Rechnet man mit einfachem Zins, so hat die Summe 1, welche gezahlt wird $\frac{p}{m}$ Jahr nach dem Anfange des Jahres, am Ende dieses Jahres den Wert $1 + \frac{m-p}{m} i$. Die Einheit, welche am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres gezahlt wird, hat also am Ende des Jahres den Gesammtwert:

$$\left(1+\frac{m-1}{m}\,i\right)+\left(1+\frac{m-2}{m}\,i\right)+\left(1+\frac{m-3}{m}\,i\right)+\ldots+1$$
$$= m + \tfrac{1}{2}(m-1)\,i.$$

Darum stimmt die Einheit, welche in Bruchteilen von $\frac{1}{m}$ in m gleichen Raten während des Jahres gezahlt wird, überein mit der Summe $1+\frac{m-1}{2m}\,i$, welche am Ende des Jahres gezahlt wird.

Dieser Ausdruck giebt als Näherungswerte bei

halbjährlichen Raten $1+\frac{1}{4}\,i$,
vierteljährlichen „ $1+\frac{3}{8}\,i$,
monatlichen „ $1+\frac{11}{24}\,i$.

Die Einheit, welche in m gleichen Raten am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres gezahlt wird, hat am Anfang des Jahres annähernd den Wert

$$\frac{1+\frac{m-1}{2m}\,i}{1+i},$$

welcher Wert sich wieder annähern läfst durch

$$1-\frac{m+1}{2m}\,i.$$

Es läfst sich dies auch direct folgendermafsen ableiten: die Summe 1, zahlbar $\frac{p}{m}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres, hat am Anfang des Jahres den angenäherten Wert:

$$1-\frac{p}{m}\,i.$$

Die Einheit, zahlbar am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres, hat also am Anfang des Jahres einen Gesammtwert:

$$\left(1-\frac{1}{m}\,i\right)+\left(1-\frac{2}{m}\,i\right)+\left(1-\frac{3}{m}\,i\right)+\ldots+\left(1-\frac{m}{m}\,i\right)=$$
$$= m - \tfrac{1}{2}(m+1)\,i.$$

Dividirt man mit m, so bekommt man für den Wert der Einheit, zahlbar in m gleichen Raten am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres, am Anfang des Jahres:

$$1-\frac{m+1}{2m}\,i.$$

28. Wie wir aus Formel (46) sahen, entspricht die Zahlung der Einheit, in m gleiche Teile eingeteilt, deren jeder am Ende eines m^{ten} Teils des Jahres zahlbar ist, der Zahlung:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}$$

am Ende des Jahres.

Bestimmen wir jetzt die Grenze, welcher obiger Ausdruck sich nähert, wenn die Zahl m fortdauernd zunimmt; wir schreiben ihn zu diesem Zwecke:

$$i \cdot \frac{\frac{1}{m}}{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}.$$

Für unbegrenzt zunehmende Werte von m ist

$$\operatorname{Lim} \frac{r^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} = Lr,$$

und also ist

$$\operatorname{Lim} \left(i \cdot \frac{\frac{1}{m}}{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1} \right) = \frac{i}{L(1+i)},$$

daher nach Entwickelung:

$$= \frac{i}{i - \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{3} i^3 - \ldots} = 1 + \tfrac{1}{2} i - \tfrac{1}{12} i^2 + \ldots$$

Nun ist

$$\sqrt{1+i} = 1 + \tfrac{1}{2} i - \tfrac{1}{8} i^2 + \ldots$$

Man begeht also nur einen geringen Fehler, wenn man für $\frac{i}{L(1+i)}$ substituirt $\sqrt{1+i}$.

Nun hat die Einheit, die mitten im Jahre gezahlt wird, am Ende des Jahres den Wert $\sqrt{1+i}$. Es ergiebt sich daraus folgendes: die Zahlung einer Summe in gleichen Bruchteilen an gleichmäfsig auf das Jahr verteilten Raten ist, wenn die Zahl der Raten sehr grofs ist, mit der Zahlung der ganzen Summe in der Mitte des Jahres nahezu gleichwertig.

29. Es kommt besonders bei Versicherungsprämien vor, dafs man vorzieht, eine Summe, die man am Anfange jedes Jahres schuldig ist,

im Laufe des Jahres in gleichen Raten zu zahlen. Es ist dann die Gröfse dieser teilweisen Zahlungen zu bestimmen.

Nach Formel (47) ist die Zahlung von $\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{i}$ am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres damit gleichwertig, dafs man die Einheit am Ende des Jahres zahlt.

Zahlt man nun statt am Ende am Anfang jedes m^{ten} Teils des Jahres, so wird jede Zahlung um $\frac{1}{m}$ Jahr früher geleistet; deshalb ist die Zahlung von $\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{i(1+i)^{\frac{1}{m}}}$ am Anfang jedes m^{ten} Teils des Jahres gleichwertig mit der Zahlung von 1 am Ende, d. h. von $\frac{1}{1+i}$ am Anfang des Jahres.

Die Zahlung von 1 am Anfang des Jahres entspricht also der Zahlung von

$$(1+i)\cdot\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{i(1+i)^{\frac{1}{m}}}$$

am Anfang jedes m^{ten} Teils. Diesen Ausdruck kann man leicht reduciren zu

$$\frac{1+i-(1+i)^{1-\frac{1}{m}}}{i} \qquad (53)$$

Die Zahlung von 1 am Anfang jedes Jahres ist also der Zahlung von

$$\frac{1+i-\sqrt{1+i}}{i}$$

am Anfang jedes halben Jahres gleichwertig.

Entwickeln wir Formel (53) nach Potenzen von i, so erhält man:

$$\frac{1}{m}+\frac{m-1}{2m^2}i-\frac{m^2-1}{6m^3}i^2+\ldots$$

Wenn man hierin nach einander $m=2, 4, 12$ setzt und die höheren als zweiten Potenzen von i vernachlässigt, so zeigt sich, dafs die Zahlung der Einheit am Anfang jedes Jahres entspricht der Zahlung von

$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} i - \frac{1}{16} i^2$ am Anfang jedes halben Jahres,
$\frac{1}{4} + \frac{3}{32} i - \frac{5}{128} i^2$ „ „ „ Vierteljahres,
$\frac{1}{12} + \frac{11}{288} i - \frac{143}{10368} i^2$ „ „ „ Monats.

Indessen ist es für die Praxis meistens noch genau genug, wenn man auch die zweite Potenz von i vernachlässigt und demnach folgende Ausdrücke benützt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} i, \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{32} i, \quad \frac{1}{12} + \frac{11}{288} i.$$

Will man also eine Zahlung am Anfang des Jahres reduciren auf Zahlungen am Anfang jedes halben Jahres, so mufs man dieselbe mit $1 + \frac{1}{4} i$ multipliciren und mit 2 dividiren; will man sie in Zahlungen per Vierteljahr umwandeln, so hat man mit $1 + \frac{3}{8} i$ zu multipliciren und mit 4 zu dividiren, und will man sie auf monatliche Zahlungen zurückführen, so hat man mit $1 + \frac{11}{24} i$ zu multipliciren und mit 12 zu dividiren.

Im Allgemeinen: bei Zahlung in m Raten hat man die Jahresprämie zu multipliciren mit

$$1 + \frac{m-1}{2m} i$$

und zu dividiren mit m. Es kann dies auch folgenderweise abgeleitet werden.

Rechnet mit einfachem Zins während des Laufes des Jahres, so hat jemand, der die Einheit schuldet, aber in m Raten abzahlen will, jedesmal mit der Vergütung für die zu späte Zahlung, m ungleiche Zahlungen zu leisten, deren Summe ist

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{m} i\right) + \frac{1}{m}\left(1 + \frac{2}{m} i\right) + \ldots + \frac{1}{m}\left(1 + \frac{m-1}{m} i\right) =$$

$$= m \times \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} i \left(1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1)\right) =$$

$$= 1 + \frac{m-1}{2m} i.$$

Multiplicirt man die Summe am Anfang des Jahres verschuldet, mit $1 + \frac{m-1}{2m} i$ und dividirt mit m, zur Bestimmung der Zahlung in m Raten, so rechnet man, dafs es auf dasselbe herauskommt, ob die Vergütung für die Zinsen jedesmal stattfindet bei der Zahlung der besonderen Raten, ob die ganze Vergütung auf einmal stattfindet, oder aber die Vergütung gleichmäfsig verteilt ist über die besonderen Zahlungen.

Aus Formel (53) ergiebt sich sofort: wenn P der Gesammtwert irgend welcher Zahlungen ist, welche stets am Anfang jedes Jahres stattfinden, so haben dieselben Zahlungen, aber jedes Jahr in m gleichen Raten am Anfang jedes m^{ten} Teils des Jahres, den Gesammtwert:

$$P \cdot \frac{i}{m\left[1+i-(1+i)^{1-\frac{1}{m}}\right]} \qquad 5$$

oder bis zur zweiten Potenz von i entwickelt:

$$P \cdot \left(1 - \frac{m-1}{2m} i + \frac{(m-1)(m-1)}{12m^2} i^2\right).$$

Als eine Annäherung, die in der Praxis meistens genügt, hat man für den Faktor, womit P multiplicirt werden soll, $1 - \frac{m-1}{2m} i$, also bei

halbjährlicher Zahlung	$1 - \frac{1}{4}i$,
vierteljährlicher Zahlung	$1 - \frac{3}{8}i$,
monatlicher Zahlung	$1 - \frac{11}{24}i$.

Die Annuität während einer gemischten Anzahl von Jahren.

30. Die Einheit ist am Ende jedes Jahres und zwar während $n + \frac{p}{q}$ Jahr zahlbar, heifst nach Formel (47), dafs während n Jahren am Ende jedes Jahres 1 gezahlt wird und alsdann, $\frac{p}{q}$ Jahr nach der letzten Zahlung noch einmal der Teil $\frac{(1+i)^{\frac{p}{q}} - 1}{i}$, für welchen die roheste Annäherung $\frac{p}{q}$ ist. Der gegenwärtige Wert aller Zahlungen ist nach Formel (39):

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + \frac{(1+i)^{\frac{p}{q}} - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n+\frac{p}{q}}},$$

was sich auf die Form bringen läfst:

$$\frac{(1+i)^{n+\frac{p}{q}} - 1}{i(1+i)^{n+\frac{p}{q}}}.$$

Dies ist nichts anderes als die Formel (39) für die Zeit $n + \frac{p}{q}$; diese Formel gilt also auch für gemischte Werte von n.

Die Einheit ist $n + \frac{p}{q}$ Jahre hindurch am Anfang jedes Jahres zahlbar, heifst, dafs während n Jahren am Anfang jedes Jahres die Einheit gezahlt wird, und nach Formel (53) ein Jahr nach der letzten dieser Zahlungen noch einmal der Teil

$$\frac{1 + i - (1+i)^{1-\frac{p}{q}}}{i},$$

wofür die roheste Annäherung $\frac{p}{q}$ ist. Der gegenwärtige Wert aller Zahlungen ist:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}} + \frac{1 + i - (1+i)^{1-\frac{p}{q}}}{i(1+i)^n},$$

was sich reduciren läfst zu

$$\frac{(1+i)^{n+\frac{p}{q}} - 1}{i(1+i)^{n+\frac{p}{q}-1}},$$

sodafs Formel (30) auch für gebrochene und gemischte Werte von n gilt.

Aenderung der Dauer der Annuität.

31. Wenn jemand während einer gewissen Anzahl von Jahren eine Annuität zu zahlen hat, so kann er wünschen, dafs diese Annuität durch eine Annuität während einer anderen Anzahl von Jahren ersetzt werde.

Will man z. B. die praenumerando zahlbare Annuität a per Jahr während n Jahren auf eine andere während p Jahren zum Betrage von x per Jahr reduciren, so hat man dazu nach Formel (30) die Gleichung:

$$x \cdot \frac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^{p-1}} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}};$$

hieraus ergiebt sich

$$x = a \cdot \frac{1}{(1+i)^{n-p}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^p - 1}. \qquad (55)$$

Um die Dauer der Annuität auf die Hälfte der Zeit zurückzuführen, setzen wir $p = \frac{1}{2}n$, dann ist:

$$x = a \cdot \frac{1}{(1+i)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{n}{2}} - 1} = a \cdot \left[1 + \frac{1}{(1+i)^{\frac{n}{2}}}\right]. \quad (56)$$

Um also eine 10 Jahre hindurch praenumerando zahlbare Annuität in eine solche von 5 Jahren umzuwandeln, mufs man ihren jährlichen Betrag mit $1 + \frac{1}{(1+i)^5}$ multipliciren.

Ist n eine ungerade Zahl und wird die Dauer der Annuität auf die Hälfte reducirt, so ergiebt sich die mathematische Bedeutung der reducirten Annuität, deren Dauer keine ganze Anzahl von Jahren mehr ist, aus No. 30. In der Praxis begnügt man sich hier freilich, für die letzte Zahlung die Hälfte der jährlichen Zahlungen zu nehmen.

Kapitel III.

Sterblichkeit.

Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit.

32. Was man gewöhnlich eine Sterblichkeitstafel nennt, ist eine Übersicht, die für jede ganzjährige Altersstufe die Anzahl der Personen angiebt, welche vermutlich aus der für die nächst niedrigere Altersstufe mitgeteilten Zahl von Personen nach einem Jahr noch am Leben sein werden. Sei diese Anzahl für das Alter von x Jahren l_x, also l_{x+1} für das Alter $x+1$, so bedeutet dies, dafs von den l_x x-jährigen nach einem Jahr noch l_{x+1} am Leben, die übrigen also gestorben sein werden; ebenso leben nach zwei Jahren von jenen l_x Personen noch l_{x+2}, nach drei Jahren noch l_{x+3}, u. s. w. Für eine solche Übersicht wäre offenbar Überlebenstafel eine zutreffendere Benennung.

Sehr oft giebt die Sterblichkeitstafel neben der Anzahl der Überlebenden jeden Alters auch die Anzahl der Gestorbenen an, obgleich

diese durch Subtraktion leicht zu finden ist. Solch eine Sterblichkeitstafel ist die Basis, auf welche der Lebensversicherungs-Mathematiker seine Berechnungen gründet, und von diesem Gesichtspunkte aus ist sie unentbehrlich; im übrigen aber ist die Verwendbarkeit solcher Sterblichkeitstafeln sehr beschränkt.

Darum könnte man sich eigentlich wundern, dafs die Sterblichkeits-Statistik sich soviel mit der Aufstellung von Sterblichkeitstafeln beschäftigt hat, auch da, wo man sie für die Zwecke der Lebensversicherung nicht braucht. Es läfst sich dies aber daraus erklären, dafs es eine Zeit gegeben hat, wo man meinte, Bevölkerungstafeln schon allein aus Sterblichkeitstafeln schöpfen zu können.

Wer einen deutlichen Überblick über den Verlauf der Sterblichkeit in einem gewissen Zeitabschnitt haben will, hat viel mehr Nutzen von einer Liste der Sterbenswahrscheinlichkeiten für jedes Alter während eines Jahrs, als von einer Sterblichkeitstafel. Aufserdem läfst sich aus solch einer Liste der Sterbenswahrscheinlichkeiten eine Sterblichkeitstafel leicht berechnen.

Wenn man durch Beobachtung gefunden hat, dafs von L_x Personen im Alter x nach einem Jahre noch L_{x+1} am Leben sind, dann ist nach dieser Beobachtung die Lebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen im nächsten Jahr $\frac{L_{x+1}}{L_x} = p_x$, die Sterbenswahrscheinlichkeit also $q_x = 1 - p_x$.

Wenn man von der Sterbenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen redet, dann heifst das nicht, dafs jeder x-jährige, selbst wenn er zu dem Kreise der beobachteten Personen gehört, dieselbe Sterbenswahrscheinlichkeit hat, in dem Sinne, wie alle, die ein ganzes Loos in einer Lotterie kaufen, dieselbe Wahrscheinlichkeit haben den Hauptgewinn zu ziehen. Neben dem Alter sind es ja nicht blos Gesundheitszustand, Herkunft, Beruf, sondern auch allerlei Lebensumstände, die einen grofsen Einfluſs auf die Sterbenswahrscheinlichkeit ausüben, und deren Wirkung für eine einzelne Person nur mit sehr roher Annäherung in Zahlen anzugeben ist. Wenn man also von der Sterbenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen spricht, so meint man die eines, so zu sagen, „durchschnittlichen“ x-jährigen.

33. Will man aus einer Tafel der Lebenswahrscheinlichkeiten eine Sterblichkeitstafel bilden, die mit dem Alter x anfängt, so setzt man für das Alter x die Anzahl l_x der Lebenden z. B. = 100.000, die Anzahl der Lebenden in dem Alter $x + 1$ ist dann

$$l_{x+1} = l_x p_x,$$

im Alter $x + 2$:

$$l_{x+2} = l_{x+1} p_{x+1} = l_x p_x p_{x+1},$$

im Alter $x + 3$:

$$l_{x+3} = l_{x+2} p_{x+2} = l_x p_x p_{x+1} p_{x+2}, \text{ u. s. w.}$$

Eine Sterblichkeitstafel giebt Prophezeihungen, die sicher nicht in Erfüllung gehen; eine solche Tafel, die meistens mit dem Alter 0 anfängt und bis zu ungefähr 100 Jahren fortschreitet, setzt voraus, dafs der Verlauf der Sterblichkeit während eines Jahrhunderts unveränderlich sein wird, was man gewifs nicht erwarten kann. Es wäre sehr gewagt, aus einer Sterblichkeitstafel vorher sagen zu wollen, wieviel von 100000 in demselben Jahr geborenen Kindern das Alter von 100 Jahren erreichen werden.

34. Die Lebenswahrscheinlichkeit, wie sie aus der Beobachtung hervorgeht, ist vom mathematischen Standpunkt betrachtet eine unbekannte Gröfse, welche alle Werte zwischen 0 und 1 haben kann, deren wahrscheinlichste Wert aber ist:

$$p_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}.$$

(Man siehe z. B. **Wittstein,** Mathematische Statistik.)

p_x ist nicht die Wahrscheinlichkeit à priori wie beim Lotteriespielen, sondern die Wahrscheinlichkeit à posteriori. Es stellt sich aber mehr und mehr heraus, dafs es erlaubt ist, auch die Regeln der höheren Wahrscheinlichkeitslehre auf die Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit anzuwenden, u. z. in viel höherem Maafse, als dies bisher bei der Invaliditätswahrscheinlichkeit der Fall ist. (Man sehe in der „Zeitschrift für Versicherungs-Recht und -Wissenschaft" V. Band: Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung von Dr. **J. H. Peek** und in der „Statistischen Monatschrift" von 1901: Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen von Dr. **Ernst Blaschke**.)

Wahrscheinlichkeit bei zwei Leben.

35. Die Combination von zwei Personen A und B giebt rücksichtlich der Sterblichkeit zu verschiedenen Fragen Veranlassung, z. B. welches ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach so und soviel Jahren A und B beide leben, oder auch dafs beide gestorben sein werden?

Die Person A habe das Alter x, B das Alter y; die Anzahl der Lebenden in dem Alter x sei nach den Sterblichkeitstafeln l_x, in dem Alter y sei sie l'_y (wir haben hier den Lebenden des Alters y einen Accent beigefügt, weil es oft zweckmäfsig ist, für die zwei Personen eines Paares, z. B. für Mann und Frau, verschiedene Sterblichkeitstafeln zu benützen). Bequemlichkeitshalber setzen wir voraus, dafs die x-jährigen Männer und die y-jährigen Frauen sind, obgleich ebenso gut zwei Männer (z. B. Kompagnons, Vater und Sohn) oder zwei Frauen (z. B. Schwestern) in Frage kommen können.

Denken wir uns jetzt $l_x\, l'_y$ Paare; weil von l_x Männern nach n Jahren noch l_{x+n} am Leben sind, so sind von den $l_x\, l'_y$ Männern nach n Jahren noch $l_{x+n}\, l'_y$ übrig und ebenso von den Frauen noch $l_x\, l'_{y+n}$.

Von den Männern sterben in den n Jahren $(l_x - l_{x+n})\, l'_y$ und von den Frauen $l_x\, (l'_y - l'_{y+n})$. Von den $(l_x - l_{x+n})\, l'_y$ Frauen, deren Männer in den n Jahren gestorben sind, leben am Ende dieser n Jahre $(l_x - l_{x+n})\, l'_{y+n}$. So viel Frauen sind also Witwen geworden und ähnlich $l_{x+n}\, (l'_y - l'_{y+n})$ Männer Witwer. Die Anzahl der gestorbenen Männer, deren Frauen gleichfalls gestorben sind, ist

$$(l_x - l_{x+n})\, (l'_y - l'_{y+n}).$$

Um die Anzahl der am Ende der n Jahre übrig gebliebenen Paare zu finden, mufs man die Anzahl der gestorbenen Männer und die Anzahl der gestorbenen Frauen von $l_x\, l'_y$ subtrahiren, zu dem Rest aber die Anzahl der gestorbenen Männer, deren Frauen gleichfalls gestorben sind, wieder addiren; denn bei der Subtraktion haben wir diejenigen Paare doppelt gerechnet, von denen zuerst der Mann starb, später die Frau oder umgekehrt; ein Mann, der nach seiner Frau stirbt oder umgekehrt, trägt ja nicht mehr zur Auflösung eines Paares bei. Die Anzahl der Paare, die nach n Jahren noch am Leben sind, ist also:

$$l_x\, l'_y - (l_x - l_{x+n})\, l'_y - l_x\, (l'_y - l'_{y+n}) + (l_x - l_{x+n})\, (l'_y - l'_{y+n}),$$

was sich leicht reduciren läfst zu:

$$l_{x+n}\, l'_{y+n}.$$

Die Anzahl der noch übrig gebliebenen Paare läfst sich auch bestimmen, indem man von der im Anfang anwesenden Anzahl die Anzahl der Witwer, diejenige der Witwen und diejenige der gestorbenen Paare subtrahirt:

$$l_x\, l'_y - (l_x - l_{x+n})\, l'_{y+n} - (l'_y - l'_{y+n})\, l_{x+n} - \\ - (l_x - l_{x+n})\, (l'_y - l'_{y+n}) = l_{x+n}\, l'_{y+n}.$$

Durch Division läfst sich sofort die Wahrscheinlichkeit für einen verheirateten Mann oder eine verheiratete Frau finden, nach n Jahren Witwer oder Witwe zu sein, die Wahrscheinlichkeit für ein Paar nach n Jahren noch beide am Leben zu sein u. s. w. Man kommt aber leichter zum Ziel mit Hilfe der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten.

36. Die Wahrscheinlichkeit für den Mann, nach n Jahren noch zu leben, ist $\frac{l_{x+n}}{l_x}$, für die Frau $\frac{l'_{y+n}}{l'_y}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs beide nach n Jahren noch leben werden, ist also

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+n}}{l'_y}. \tag{57}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Mann, nach n Jahren gestorben zu sein, ist $\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$; also ist die Wahrscheinlichkeit für die Frau, nach n Jahren Witwe zu sein, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dafs der Mann gestorben, die Frau am Leben sein wird

$$\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right) \cdot \frac{l'_{y+n}}{l'_y}. \tag{58}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs beide nach n Jahren gestorben sein werden, ist

$$\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right) \cdot \left(1 - \frac{l'_{y+n}}{l'_y}\right). \tag{59}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs nach n Jahren wenigstens eins von beiden am Leben sein wird, findet man am leichtesten, wenn man beachtet, dafs der Tod beider die einzig mögliche Ausnahme darstellt.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$1 - \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\left(1 - \frac{l'_{y+n}}{l'_y}\right) = \frac{l_{x+n}}{l_x} + \frac{l'_{y+n}}{l'_y} - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+n}}{l'_y}. \tag{60}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eins gestorben sein wird, ist offenbar gleich der Wahrscheinlichkeit, dafs nicht beide noch leben werden; sie ist also

$$1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+n}}{l'_y}, \tag{61}$$

mit andern Worten: dies ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach n Jahren das Paar durch den Tod aufgelöst sein wird. Wo wir hier von Auflösung der Paare reden, meinen wir natürlich immer die Auflösung

durch den Tod. Ist in dieser Beziehung eine verkehrte Auffassung kaum zu fürchten, so scheint es erforderlich, auf einen anderen Punkt hinzuweisen: bei der obigen Berechnung ist vorausgesetzt, dafs bei einem Paar der Tod des einen Teils ohne Einflufs ist auf die Sterbenszeit des andern. Ob diese Voraussetzung zutrifft, ist zweifelhaft. Es ist also keine überflüssige Aufgabe für die Statistik, zu untersuchen, in wieweit die Sterblichkeit der Witwen z. B. übereinstimmt oder verschieden ist von derjenigen der verheirateten und unverheirateten Frauen gleichen Alters.

37. Gleichwie eine Sterblichkeitstafel angiebt, wie viel Personen aus den einzelnen Altersklassen von einer gewissen Anzahl nach einem Jahr noch am Leben sein werden, so könnte man auch Tafeln aufstellen für die Anzahl der Paare, welche nach einem Jahr aus einer gewissen Anzahl von Paaren noch unaufgelöst sein werden.

Solch eine Tafel würde für die Combination der Altersstufen x und y aus den Produkten $l_x\, l'_y$, $l_{x+1}\, l'_{y+1}$, $l_{x+2}\, l'_{y+2}$ u. s. w. bestehen, oder wenn man setzt:

$$l_x\, l'_y = l_{x,\,y},$$

aus den Zahlen

$$l_{x,\,y},\ l_{x+1,\,y+1},\ l_{x+2,\,y+2},\ \text{u. s. w.}$$

Wahrscheinlichkeiten bei mehr als zwei Leben.

38. Denken wir uns jetzt drei Personen A, B, C, bezw. vom Alter x, y, z. Zur Abkürzung setzen wir ihre Lebenswahrscheinlichkeiten in den nächsten n Jahren gleich α, β, γ, sodafs

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \alpha, \text{ u. s. w.}$$

Wir wiederholen hier, dafs man auch eine Veranlassung haben kann, für die drei Personen zwei oder vielleicht sogar drei verschiedene Sterblichkeitstafeln zu benutzen.

Nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach n Jahren alle drei Personen noch leben,

$$= \alpha\beta\gamma. \tag{62}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs sie alle gestorben sein werden, ist

$$(1 - \alpha)\ (1 - \beta)\ (1 - \gamma). \tag{63}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs A gestorben sein wird, B und C aber noch am Leben sein werden, ist

$$(1 - \alpha)\,\beta\gamma. \tag{64}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs von den drei Personen noch zwei am Leben sein werden, ergiebt sich, wenn man in Formel (64) α mit β und nachher α mit γ vertauscht, und dann die drei Ausdrücke addirt; denn auf diese Weise hat man die drei Fälle berücksichtigt, welche einander ausschlieſsen, daſs entweder allein A, oder allein B, oder allein C gestorben sein wird.

Diese Wahrscheinlichkeit ist also

$$(1 - \alpha)\,\beta\gamma + (1 - \beta)\,\gamma\alpha + (1 - \gamma)\,\alpha\beta = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - 3\,\alpha\beta\gamma. \tag{65}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs A und B gestorben und C noch am Leben sein wird, ist

$$(1 - \alpha)\,(1 - \beta)\,\gamma = \gamma - \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\beta\gamma. \tag{66}$$

Läſst man in Formel (66) zuerst γ mit α die Stelle wechseln, nachher γ mit β, und addirt man die drei Formeln, so erhält man als Wahrscheinlichkeit, daſs von den drei Personen noch eine am Leben sein wird:

$$(1 - \alpha)\,(1 - \beta)\,\gamma + (1 - \gamma)\,(1 - \beta)\,\alpha + (1 - \alpha)\,(1 - \gamma)\,\beta = \\ = \alpha + \beta + \gamma - 2\,(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) + 3\,\alpha\beta\gamma. \tag{67}$$

Diese Formel ergiebt sich auch aus (65), indem man α, β und γ durch $1 - \alpha$, $1 - \beta$ und $1 - \gamma$ ersetzt.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs nach n Jahren noch wenigstens eine der drei Personen am Leben sein wird, ergiebt sich durch Addition der Wahrscheinlichkeiten (62), (65) und (67); sie ist also

$$\alpha + \beta + \gamma - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) + \alpha\beta\gamma. \tag{68}$$

Dies folgt auch daraus, daſs der einzige Ausnahmefall der ist, wo alle drei sterben; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist deshalb:

$$1 - (1 - \alpha)\,(1 - \beta)\,(1 - \gamma),$$

was ausgerechnet (68) giebt.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs wenigstens zwei am Leben sein werden, erhält man durch Addition von (62) und (65); sie ist also:

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - 2\,\alpha\beta\gamma. \tag{69}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens einer gestorben sein wird, entsteht aus (68), wenn man darin α, β und γ in $1-\alpha$, $1-\beta$ und $1-\gamma$ verändert, und ist demnach

$$1-\alpha\beta\gamma. \tag{70}$$

Dies hätte sich auch daraus schliefsen lassen, dafs es aufser den Fällen, wo wenigstens einer gestorben ist, nur noch solche giebt, wo alle drei leben. Die Formel (70) entsteht auch durch Addition von (63), (65) und (67).

Die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens zwei gestorben sein werden, ergiebt sich durch Substitution von $1-\alpha$, $1-\beta$, $1-\gamma$ für α, β, γ in (69); sie ist also

$$1-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)+2\alpha\beta\gamma. \tag{71}$$

Diese Formel entsteht auch durch Addition von (63) und (67).

Die Wahrscheinlichkeit, dafs A am Leben, B und C aber beide oder einer von beiden gestorben sein werden (Formel 61), ist

$$\alpha(1-\beta\gamma)=\alpha-\alpha\beta\gamma. \tag{72}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs A gestorben sein wird, B und C aber beide oder einer von beiden leben werden, ist (Formel 60)

$$(1-\alpha)(\beta+\gamma-\beta\gamma)=\beta+\gamma-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)+\alpha\beta\gamma, \tag{73}$$

welche Formel auch aus (72) hervorgeht, wenn man darin α, β und γ durch $1-\alpha$, $1-\beta$, $1-\gamma$ ersetzt.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs von den drei Personen entweder eine gestorben und zwei am Leben sein werden, oder dafs zwei gestorben und eine am Leben sein wird, ergiebt sich leicht auf Grund der Bemerkung, dafs aufser diesen Fällen nur noch solche möglich sind, wo alle drei gestorben oder alle drei am Leben sein werden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dafs einer gestorben und einer am Leben sein wird, der dritte entweder am Leben oder gestorben sein wird, ist also:

$$1-\alpha\beta\gamma-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=\alpha+\beta+\gamma-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta), \tag{74}$$

welche Formel dieselbe bleibt, wenn man α, β und γ durch $1-\alpha$, $1-\beta$ $1-\gamma$ ersetzt: sie läfst sich durch Addition der Formeln (65) und (67) gewinnen. Man beachte, dafs in der Formel (74) das Produkt $\alpha\beta\gamma$ nicht vorkommt.

Sterbe-Intensität.

39. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten werden gewöhnlich für die ganzen Altersjahre und für den Verlauf eines Jahres angegeben, wiel

dies in der Regel genau genug ist und mit den Gepflogenheiten des gesellschaftlichen Lebens übereinstimmt. Es ist hierbei zu bemerken, dafs es für die Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Jahres gleichgültig ist, in welchem Augenblick des Jahres der Tod eintritt.

Wo eine gröfsere Genauigkeit erforderlich ist, hat man indessen die Sterbenswahrscheinlichkeiten auch für Alter zwischen den ganzen Jahren und einen kürzeren Zeitraum als ein Jahr zusammengestellt. Namentlich ist dies für das Kindesalter geschehen, wo in den ersten Lebensjahren die Sterblichkeit allzu schnell abnimmt, als dafs man nach ganzen Jahren rechnen dürfte. Wenn man die verschiedenen Alter als Abscissen und die zugehörenden Sterbenswahrscheinlichkeiten als Ordinaten abträgt, dann erhält man für jedes Alter einen gewissen Punkt, und es ist klar, dafs durch diese Punkte unendlich viele Curven möglich sind. Jede solche Curve bestimmt zu jeder beliebigen Abscisse eine gewisse Ordinate und es mufs eine Curve geben, für welche diese Ordinate jedesmal die Sterbenswahrscheinlichkeit für das durch die entsprechende Abscisse dargestellte Alter ist. Mit Bestimmtheit angeben läfst sich aber diese Curve offenbar nicht.

Hieraus ergiebt sich, dafs, wenn in der Gleichung $q = \varphi(x)$, x das Alter darstellt, q die Sterbenswahrscheinlichkeit für dieses Alter (z. B. während eines Jahres) die Form der Function sich nicht eindeutig angeben läfst; doch hat man empirische Näherungsformeln aufgestellt, auf welche wir unten noch zurückkommen. Wenn nun aber auch die Function nicht bekannt ist, so existirt sie doch jedenfalls, und es ist auch vom praktischen Gesichtspunkte von Bedeutung, die Sterblichkeit als analytische Function zu betrachten.

Es bedeute $y = f(x)$ die Anzahl der Lebenden des Alters x, also $f(x+1)$ die Lebenden im Alter $x+1$.

Wenn wir nun das Jahr als Einheit annehmen, dann ist $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ die Wahrscheinlichkeit, dafs ein x-jähriger nach einem Jahr noch am Leben sein wird, also $1 - \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)}$ die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während des nächsten Jahres, wie sich dies auch daraus ergiebt, dafs von $f(x)$ Personen im Laufe des Jahres $f(x) - f(x+1)$ sterben.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen ist für das nächste halbe Jahr ähnlich

$$\frac{f(x) - f(x+\frac{1}{2})}{f(x)}$$

und allgemein $\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)}$ die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während h Jahr.

Um nun aber den Vergleich der Sterblichkeit in Zeitabschnitten von verschiedener Länge zu erleichtern, pflegt man sie auf das Jahr als Einheit zu reduciren. Für einen Monat z. B. von 31 Tagen, d. h. für $h = \frac{31}{365}$ mufs man daher obigen Ausdruck mit $\frac{365}{31}$ multipliciren.

Man kann den so entstehenden Ausdruck

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)}$$

als die durchschnittliche jährliche Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während h Jahr bezeichnen, mag h gröfser oder kleiner als die Einheit sein. Man darf indes diese durchschnittliche Sterbenswahrscheinlichkeit nicht verwechseln mit dem arithmetischen Mittel aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Jahre, welches von ihr mehr oder weniger abweicht.

Nähert sich h der Grenze 0, so erhält man:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x + \vartheta h),$$

wo h zugleich mit ϑ gegen 0 convergirt, oder:

$$\frac{f(x) - f(x+h)}{h} = -f'(x + \vartheta h).$$

Hieraus ergiebt sich

$$\operatorname{Lim} \frac{f(x) - f(x+h)}{h f(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Wenn also $y = f(x)$ die Anzahl der Lebenden des Alters x ist, so bedeutet der Ausdruck

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (75)$$

die auf ein Jahr reducirte Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während eines Augenblicks. Diesen Ausdruck nennen die Engländer gegenwärtig Force of Mortality; ursprünglich nannten sie ihn Intensity of Mortality oder auch Instantaneous Rate of Mortality; die Franzosen nennen ihn taux instantané de mortalité; bei den Deutschen heifst er Sterbe-Intensität oder auch Sterbe-Kraft. **Ladislaus von Bortkewitsch** (Die mittlere Lebensdauer) findet Dichtigkeit der Sterbenswahrschein-

lichkeit richtiger. Wir wollen hier den Ausdruck Sterbe-Intensität benützen. Dieser Begriff leistet in der Theorie der Lebensversicherung gute Dienste. Die Sterbe-Intensität für das Alter x werde mit μ_x bezeichnet.

40. Man kann, wenn $h > 1$ ist, die Bedeutung von

$$\frac{f(x) - f(x+h)}{h\,(f\,x)}$$

noch auf andere Weise hervortreten lassen.

Setzen wir die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während der nächsten h Jahre

$$\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)} = w,$$

und suchen wir die Sterbenswahrscheinlichkeit während eines dieser Jahre, in der Voraussetzung, dafs dieselbe während jedes dieser Jahre gleich grofs ist. Dieselbe heifse v, dann ist die Lebenswahrscheinlichkeit während eines Jahres $= 1 - v$, und deshalb die Wahrscheinlichkeit, noch h Jahre zu leben, $= (1 - v)^h$.

Man hat also die Gleichung

$$(1 - v)^h = 1 - w;$$

hieraus folgt:

$$v = 1 - \sqrt[h]{1 - w},$$

oder als roheste Annäherung

$$v = \frac{w}{h} = \frac{f(x) - f(x+h)}{h\,f(x)}.$$

Offenbar hat dies aber nur dann Sinn, wenn h gröfser als die Einheit ist.

41. Mehrere Schriftsteller haben die Begriffe Sterbe-Intensität und Sterbenswahrscheinlichkeit nicht auseinander gehalten; deshalb ist es nicht überflüssig, die analytische Beziehung zwischen beiden zu untersuchen.

Die Formel (75) läfst sich auch schreiben:

$$-\frac{d\,f(x)}{f(x)} = \mu_x\,d\,x.$$

Integrirt man zwischen den Grenzen x und $x+1$, so ergiebt sich:

$$L\frac{f(x)}{f(x+1)} = \int_x^{x+1} \mu_x \, dx,$$

also

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x \, dx}.$$

Setzen wir die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während eines Jahres $= q_x$, also $\frac{f(x+1)}{f(x)} = 1 - q_x$, so hat man als Beziehung zwischen Sterbe-Intensität und Sterbenswahrscheinlichkeit die Formel

$$q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu_x \, dx}. \tag{76}$$

42. In Ermangelung einer analytischen Function für die Sterblichkeit ist es nicht möglich, die Sterbe-Intensität anders als näherungsweise aus dem Absterben von einem Jahr zum anderen abzuleiten.

Wir wollen also die Sterbe-Intensität $-\frac{f'(x)}{f(x)}$ für das Alter x näherungsweise finden.

Dazu denke man sich eine Parabel vierten Grades durch die Punkte gelegt, deren Abscissen der Reihe nach sind:

$$x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2$$

und deren entsprechende Ordinaten:

$$f(x-2),\ f(x-1),\ f(x),\ f(x+1),\ f(x+2).$$

Mit anderen Worten, wir betrachten die fünf Zahlen $f(x-2)$, $f(x-1)$, $f(x)$, $f(x+1)$ und $f(x+2)$ als Glieder einer arithmetischen Reihe vierter Ordnung.

Setzen wir zur Abkürzung $f(x+z) = F(z)$, so ist die gesuchte Curve bestimmt durch die Gleichung

$$y = f(x+z) = F(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4,$$

worin A, B, C, D und E noch unbekannt sind, indem z die veränderliche Gröfse und x constant ist.

Nun ist $F'(z) = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3$; $f'(x+z) = F'(z)$, also $f'(x) = F'(0)$, sodafs $f'(x) = B$.

Um aus einer vorliegenden Sterblichkeitstafel die Sterbe-Intensität $-\frac{f'(x)}{f(x)}$ näherungsweise zu bestimmen, ist also nur B zu berechnen.

Man hat nun:

$$f(x-2) = F(-2) = A - 2B + 4C - 8D + 16E,$$
$$f(x-1) = F(-1) = A - B + C - D + E,$$
$$f(x+1) = F(+1) = A + B + C + D + E,$$
$$f(x+2) = F(+2) = A + 2B + 4C + 8D + 16E.$$

Aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$2B + 2D = f(x+1) - f(x-1);$$

aus der ersten und vierten:

$$4B + 16D = f(x+2) - f(x-2).$$

Hieraus:

$$12B = 8f(x+1) - 8f(x-1) - f(x+2) + f(x-2)$$

und deshalb:

$$f'(x) = B = \frac{f(x-2) - 8f(x-1) + 8f(x+1) - f(x+2)}{12}.$$

Die Sterbe-Intensität des x-jährigen ist demnach:

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{8[f(x-1) - f(x+1)] - [f(x-2) - f(x+2)]}{12 f(x)}. \quad (77)$$

Will man sich mit einer geringeren Genauigkeit begnügen, so kann man sich darauf beschränken, $f(x-1)$, $f(x)$ und $f(x+1)$ als Glieder einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung zu betrachten.

Ein Näherungswert für diesen Fall kann aus dem vorhergehenden abgeleitet werden, indem man beachtet, dafs in einer Reihe zweiter Ordnung

$$f(x-2) - 2f(x-1) + f(x) = f(x) - 2f(x+1) + f(x+2)$$

ist, woraus sich ergiebt:

$$f(x-2) - f(x+2) = 2[f(x-1) - f(x+1)]. \quad (78)$$

Formel (77) ergiebt nunmehr:

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f(x-1) - f(x+1)}{2f(x)}. \quad (79)$$

Diese Formel setzt voraus, dafs die Tangente der Curve der Lebenden in dem durch $f(x)$ bestimmten Punkte der Sehne parallel ist, welche die durch $f(x-1)$ und $f(x+1)$ bestimmten Punkte verbindet.

Setzt man $f(x-1)-f(x)=f(x)-f(x+1)$, dann ist die Reihe der Lebenden eine gewöhnliche arithmetische Reihe erster Ordnung; es ist $f(x-1)=2f(x)-f(x+1)$ und Formel (79) geht über in:

$$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)},$$

d. h. wenn die Curve der Lebenden eine gerade Linie, also die Zahl der in einem Jahr Sterbenden für jedes Alter gleich ist, dann ist die Sterbe-Intensität gleich der Sterbenswahrscheinlichkeit.

43. Bei einer Reihe zweiter Ordnung hat man:

$$f(x-3)-2f(x-2)+f(x-1)=f(x+1)-2f(x+2)+f(x+3):$$

hieraus ergiebt sich:

$$f(x-3)-f(x+3)=2\,[f(x-2)-f(x+2)]-[f(x-1)-f(x+1)]$$

folglich auf Grund von Formel (78):

$$f(x-3)-f(x+3)=3\,[f(x-1)-f(x+1)].$$

Ebenso:

$$f(x-4)-f(x+4)=4\,[f(x-1)-f(x+1)],$$
$$f(x-5)-f(x+5)=5\,[f(x-1)-f(x+1)],\text{ u. s. w.}$$

Wenn die Sterblichkeitstafel keinen sehr regelmäfsigen Verlauf hat, so erhält man für die Sterbe-Intensität eine bessere Annäherung als aus (79), wenn man dafür einen der Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{f(x-2)-f(x+2)}{4f(x)}, & \dfrac{f(x-3)-f(x+3)}{6f(x)}\\[2ex] \dfrac{f(x-4)-f(x+4)}{8f(x)}, & \dfrac{f(x-5)-f(x+5)}{10f(x)}\end{array}\right\} \qquad (80)$$

wählt. Diese sind nur dann alle (79) gleich, wenn die Reihe der Lebenden von $f(x-5)$ bis $f(x+5)$ eine Reihe erster oder zweiter Ordnung ist.

44. Für die unterste Altersstufe der Sterblichkeitstafel ist die Zahl $f(x-1)$ nicht gegeben; man kann dann die Sterbe-Intensität näherungsweise finden, wenn man eine Parabel zweiten Grades durch die Punkte $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x+2)$ gehen läfst; man setze:

$$f(x+z)=F(z)=A+Bz+Cz^2,$$

alsdann folgt

$$f'(x+z)=F'(z)=B+2Cz,$$
$$f'(x)=F'(0)=B.$$

Zur Bestimmung von B hat man die Gleichungen:

$$f(x) = F(0) = A,$$
$$f(x+1) = F(1) = A + B + C,$$
$$f(x+2) = F(2) = A + 2B + 4C.$$

Jetzt ist $4f(x+1) - f(x+2) = 3A + 2B = 3f(x) + 2B,$

also

$$B = \frac{4f(x+1) - f(x+2) - 3f(x)}{2},$$

sodafs die Sterbe-Intensität sich ergiebt

$$= -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3f(x) - 4f(x+1) + f(x+2)}{2f(x)}. \qquad (81)$$

Im allgemeinen ist der Unterschied zwischen der Sterbe-Intensität und der Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Jahres nicht grofs; aber in den ersten Jahren nach der Geburt ist er bedeutend.

Man spricht auch von dem Sterblichkeitskoeffizienten, d. h. der Zahl, welche durch Division der Zahl der Verstorbenen mit der von den entsprechenden Lebenden verlebten Zeit entsteht.

Roghé (Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten) sieht in diesem Koeffizienten die einzig richtige Grundlage für die Sterblichkeitsmessung.

Von Bortkewitsch verteidigt in oben genannter Schrift die Auffassung von **Woolhouse,** den Autoren der deutschen Sterblichkeitstafeln, u. a., und zeigt die Bedeutung der Sterbenswahrscheinlichkeit für die Versicherungstechnik.

45. Ist $f(x)$ wieder die Anzahl der Lebenden im Alter x, so ist die Gesammtzeit, welche diese $f(x)$ Personen während der Zeit dx durchleben $= f(x)\,dx$.

Deshalb wird die Zeit, welche $f(x)$ Personen während eines Jahres durchleben, angegeben durch

$$\int_x^{x+1} f(x)\,dx;$$

also ist der strenge Ausdruck für den Sterblichkeitskoeffizienten

$$\frac{f(x) - f(x+1)}{\int_x^{x+1} f(x)\,dx}. \qquad (82)$$

Eine ziemlich genaue Annäherung von

$$\int_x^{x+1} f(x)\,dx$$

ist $\frac{1}{6}[f(x) + 4f(x+\frac{1}{2}) + f(x+1)]$, sodafs eine Annäherung für den Sterblichkeitskoeffizienten sich wie folgt angeben läfst:

$$\frac{6[f(x) - f(x+1)]}{f(x) + 4f(x+\frac{1}{2}) + f(x+1)}. \tag{83}$$

$f(x+\frac{1}{2})$ kommt aber nicht in der Mortalitätstafel vor; wir wollen jetzt diese Zahl annähernd berechnen aus begrenzenden Werten von $f(x)$ für ganze Zahlen.

Wir setzen voraus, dafs $f(x)$ näherungsweise eine arithmetische Reihe dritter Ordnung bildet, sodafs die vierten Differenzen null sind.

Bequemlichkeitshalber setzen wir:

$$\begin{aligned} f(x-1) &= F(-3),\\ f(x) &= F(-1),\\ f(x+\tfrac{1}{2}) &= F(0),\\ f(x+1) &= F(+1),\\ f(x+2) &= F(+3), \end{aligned}$$

aufserdem ist $F(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3$, worin A, B, C und D unbekannt sind. Hiervon haben wir es aber nur mit A zu thun, denn

$$f(x+\tfrac{1}{2}) = F(0) = A.$$

Nimmt man nach einander $z = -1, +1, -3, +3$, so bekommt man zur Bestimmung von A, B, C und D die vier nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= F(-1) = A - B + C - D,\\ f(x+1) &= F(+1) = A + B + C + D,\\ f(x-1) &= F(-3) = A - 3B + 9C - 27D,\\ f(x+2) &= F(+3) = A + 3B + 9C + 27D. \end{aligned}$$

Hieraus:

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) &= 2A + 2C,\\ f(x-1) + f(x+2) &= 2A + 18C; \end{aligned}$$

aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich sogleich:

$$A = \frac{9[f(x) + f(x+1)] - [f(x-1) + f(x+2)]}{16} = f(x+\tfrac{1}{2}).$$

Also läfst sich der Sterblichkeitskoeffizient mit genügender Genauigkeit wie folgt angeben:

$$\frac{24[f(x) - f(x+1)]}{13[f(x) + f(x+1)] - [f(x-1) + f(x+2)]}. \tag{84}$$

Einen anderen Begriff bildet das Verhältnis zwischen der Anzahl der Todten eines Jahres und derjenigen der Lebenden in der Mitte desselben Jahres, welcher für den x-jährigen analytisch angegeben wird mit

$$\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x+\frac{1}{2})}.$$

Dieses Verhältnis werden wir das centrale Sterbeverhältnis nennen. (Die Engländer nennen es Central Death Rate).

Nimmt man für $f(x+\frac{1}{2})$ obenstehende Annäherung, so ergiebt sich dieses Verhältnis wie folgt:

$$\frac{16\,[f(x)-f(x+1)]}{9\,[f(x)+f(x+1)]-[f(x-1)+f(x+2)]}. \tag{85}$$

Nimmt man aber

$$f(x+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,[f(x)+f(x+1)],$$

so findet man für den Sterblichkeitskoeffizienten und das centrale Sterbeverhältnis die gemeinschaftliche Annäherungsformel

$$\frac{2\,[f(x)-f(x+1)]}{f(x)+f(x+1)}. \tag{86}$$

Setzt man nun die Anzahl der Todten

$$f(x)-f(x+1) = d_x$$

und die Anzahl der Lebenden $f(x) = l_x$, so erhält diese Formel nachstehende Form:

$$\frac{d_x}{l_x-\frac{1}{2}d_x}.$$

Stellt man dieselbe $= m_x$, so findet man leicht

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{2\,m_x}{2+m_x},$$

und

$$p_x = 1-q_x = \frac{2-m_x}{2+m_x}. \tag{87}$$

46. Ist $\varphi(n+z)$ die Anzahl Lebender des Alters $n+z$ nach einer Sterbetafel, $\psi(m+z)$ die Anzahl Lebender des Alters $m+z$ nach einer anderen oder auch derselben Sterbetafel, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs zwei Personen, wovon die eine $n+z$, die andere $m+z$ Jahr alt ist, nach einem Jahre noch beide am Leben sein werden:

$$\frac{\varphi(n+z+1)}{\varphi(n+z)} \cdot \frac{\psi(m+z+1)}{\psi(m+z)}$$

und die Auflösungswahrscheinlichkeit des Paares ist:

$$1 - \frac{\varphi(n+z+1)}{\varphi(n+z)} \cdot \frac{\psi(m+z+1)}{\psi(m+z)} = q_{n+z,\, m+z}.$$

Substituirt man hierin

$$\frac{\varphi(n+z+1)}{\varphi(n+z)} = 1 - q_{n+z}, \quad \frac{\psi(m+z+1}{\psi(m+z)} = 1 - q_{m+z},$$

so erhält man

$$q_{n+z,\, m+z} = q_{n+z} + q_{m+z} - q_{n+z} \cdot q_{m+z},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$q_{x,\, y} = q_x + q_y - q_x \cdot q_y. \tag{88}$$

Ist nun $F(z) = \varphi(n+z) \cdot \psi(m+z)$, so ist $-\frac{F'(z)}{F(z)}$ als die Auflösungs-Intensität des Paares während eines Jahres zu bezeichnen.

Nun ist

$$F'(z) = \psi(m+z) \cdot \varphi'(n+z) + \varphi(n+z)\, \psi'(m+z);$$

dividirt man dies mit

$$F(z) = \varphi(n+z) \cdot \psi(m+z)$$

und multiplicirt man mit -1, so erhält man:

$$-\frac{F'(z)}{F(z)} = -\frac{\varphi'(n+z)}{\varphi(n+z)} - \frac{\psi'(m+z)}{\psi(m+z)}.$$

Wir sind also zu nachstehendem Satz gekommen: Die Auflösungs-Intensität eines Paares ist gleich der Summe der Sterbe-Intensitäten der beiden Personen. Man kann dies angeben mittels der Formel:

$$\mu_{x,\, y} = \mu_x + \mu_y. \tag{89}$$

Formeln für die Sterblichkeit.

47. Wenn man auch keine feststehenden Gesetze für das Absterben angeben kann, so hat man doch experimentell verschiedene Formeln aufgestellt, die ein mehr oder weniger zutreffendes Gesetz dieser Art darstellen. Einige von diesen Formeln wollen wir erwähnen. Die Formel von **Gompertz** setzt voraus, dafs die Sterbe-Intensitäten für die verschiedenen Altersstufen eine geometrische Reihe bilden. Wenn $y = f(x)$

die Zahl der Lebenden des Alters x bezeichnet, dann ist nach dieser Voraussetzung:

$$-\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = br^x,$$

wo b und r Constanten sind, die sich aber für die verschiedenen Sterblichkeitstafeln unterscheiden. Aus

$$-\frac{dy}{y} = br^x\,dx$$

folgt, wenn c eine Constante bedeutet:

$$Lc - Ly = \frac{br^x}{Lr} \text{ oder } L\frac{c}{y} = \frac{br^x}{Lr}.$$

$\frac{b}{Lr}$ ist eine Constante, die wir f nennen wollen, sodafs man hat

$$L\frac{c}{y} = fr^x,$$

oder:
$$\frac{c}{y} = e^{fr^x} \text{ und } y = ce^{-fr^x}.$$

Die Constante e^{-f} werde mit g bezeichnet, dann ergiebt sich als **Gompertz**'sche Formel für die Anzahl der Lebenden:

$$y = cg^{r^x}.$$

Man hat mit Unrecht von dem Gompertz'schen Gesetz behauptet, es ginge von der Annahme aus, dafs die Sterbenswahrscheinlichkeiten eine geometrische Reihe bilden.

Denn wenn $f(x) = cg^{r^x}$ die Anzahl der Lebenden des Alters x ist, also

$$f(x+1) = cg^{r^{x+1}}$$

die Anzahl der Lebenden des Alters $x+1$, so ist

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = g^{r^{x+1}-r^x} = g^{(r-1)r^x}.$$

Setzt man $g^{r-1} = h$, so ergiebt sich die Lebenswahrscheinlichkeit $= h^{r^x}$ und also die Sterbenswahrscheinlichkeit $= 1 - h^{r^x}$, welcher Ausdruck offenbar nicht das allgemeine Glied einer geometrischen Reihe ist.

48. Eine Verbesserung von G.'s Formel ist die von **Makeham**, welche voraussetzt, dafs die Differenzen je zweier auf einanderfolgenden

Sterbe-Intensitäten eine geometrische Reihe bilden. Bei dieser Annahme ist

$$-\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = a + br^x,$$

wo a, b und r constante Werte bedeuten. Hiernach besteht die Sterbe-Intensität aus zwei Teilen, deren einer für alle Altersstufen gleich grofs ist und auf Einflüsse hindeutet, die bei jeder Altersstufe gleich kräftig auf die Sterblichkeit einwirken, während der andere mit dem Alter zunimmt und Einwirkungen bezeichnet, die bei zunehmendem Alter einer Person an Kraft gewinnen.

Man erhält nun die Anzahl der Lebenden auf folgende Weise. Aus

$$-\frac{dy}{y} = (a + br^x)\,dx$$

ergiebt sich durch Integration

$$L\frac{c}{y} = ax + \frac{b}{Lr}r^x, \quad \frac{c}{y} = e^{ax}\,e^{\frac{b}{Lr}r^x}.$$

$$y = ce^{-ax}\,e^{-\frac{b}{Lr}r^x},$$

Setzt man $e^{-a} = k$, $e^{-\frac{b}{Lr}} = g$, dann ist **Makeham**'s Formel für die Anzahl y der Lebenden:

$$y = c\,k^x\,g^{r^x}. \qquad (91)$$

Diese Formel schliefst sich an viele Sterblichkeitstafeln sehr gut an, besser als die Gompertz'sche, mit welcher sie aber darin übereinstimmt, dafs sie nur so lange pafst, als die Sterbenswahrscheinlichkeit mit der Höhe der Altersstufe zunimmt, dafs sie also für die ganze Dauer des menschlichen Lebens nicht verwendbar ist und am besten beim 20. bis zum 25. Jahr anzufangen. In den ersten Lebensjahren nimmt die Sterbenswahrscheinlichkeit rasch ab, und erst später (ungefähr nach dem 12. Jahr) fängt sie erst allmählich, dann schneller und schneller an zu steigen (kleine Ausnahmen, die hier vorkommen können, lassen wir aufser Betracht).

Die Formel von **Makeham** ist sowohl von **King** und **Hardy** als von **Lazarus** einigermafsen ausgedehnt, um sie auf die jüngeren Alter anwendbar zu machen; auch **Quiquet** hat im Bulletin de l'Institut des Actuaires français in dieser Richtung gearbeitet.

49. Eine Formel, welche für die ganze Dauer des menschlichen Lebens die Sterbenswahrscheinlichkeit näherungsweise darstellen und für die Lebensversicherung verwertbar sein soll, mufs also ungefähr für das Alter 12 bis 14 ein Minimum aufweisen. Solcher Formeln sind mehrere aufgestellt worden, die aber wegen der vielen Constanten unhandlich sind. Eine Ausnahme hiervon macht besonders **Th. Wittstein**'s Formel (Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit). Nach ihr ist die Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter x:

$$q = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n}. \qquad (92)$$

Diese Formel enthält vier Constanten, von denen M das höchste in der Sterblichkeitstafel vorkommende Alter bezeichnet. Man sieht, dafs das zweite Glied der Formel bei zunehmendem x immer kleiner wird, sodafs es seinen Einfluſs bei den jüngsten Altersstufen geltend macht, ihn aber bei den höchsten Altersstufen fast gänzlich verliert. So mufs es auch sein, denn für das höchste Alter mufs ja die Sterbenswahrscheinlichkeit = der Einheit sein, sodafs das zweite Glied sogar eigentlich = 0 sein müfste. Das ist freilich nicht der Fall, aber es ist dann ein so kleiner Bruch, dafs er dem ersten Gliede gegenüber verschwindet. Wenn wir q differenziren, so ergiebt sich:

$$\frac{dq}{dx} = n\,La\left[a^{-(M-x)^n}(M-x)^{n-1} - a^{-(mx)^n}(mx)^{n-1}\right].$$

Dieser Ausdruck ist augenscheinlich $= 0$, wenn $M - x = mx$; das Alter, für welches q ein Minimum ist, wird also durch $x = \frac{M}{m+1}$ gegeben. Umgekehrt: hat man das höchste Alter M der Sterblichkeitstafel nebst dem Alter x' festgestellt, für welches die Sterbenswahrscheinlichkeit ein Minimum ist, so erhält man die Constante m aus:

$$m = \frac{M - x'}{x'}.$$

Indessen zeigt sich, dafs **Makeham**'s Formel für die Altersstufen, bei denen sie angewendet werden darf, also bei zunehmender Sterbenswahrscheinlichkeit sich der Wirklichkeit besser anschmiegt als **Wittstein**'s Formel.

(Man sehe die Inaugural-Dissertation von Dr. **J. P. Janse**: „Over de Constructie en Afronding van Sterftetafels 1885.)

Aufserdem hat erstere den Vorzug, dafs sie bei Lebensversicherungs-Problemen angewendet wird, worauf wir später zurückkommen.

Die Berücksichtigung der Ausscheidenden und Eintretenden.

50. Wenn man einen Kreis von Personen in Bezug auf das Absterben beobachtet, so wird man in der Regel berücksichtigen müssen, dafs die einzelnen Altersklassen nicht nur durch den Tod, sondern auch durch den Austritt bei Lebzeiten sich lichten, sowie auch, dafs Personen neu hinzutreten. Natürlich kann eine Person nur für die Zeit zur Kennzeichnung der Sterblichkeitsverhältnisse beitragen, als sie diesbezüglich unter Beobachtung steht.

Man könnte nun jede einzelne Person ins Auge fassen und festsetzen, dafs jemand, der z. B. fünf Monate beobachtet worden ist, $= \frac{5}{12}$ Person gerechnet wird, während der ein ganzes Jahr Beobachtete $= 1$ Person zählt. Dazu mufs man aber das genaue Datum des Ausscheidens oder Eintretens in Betracht ziehen, und das ist eine allzu grofse Arbeit, welche die Mühe nicht lohnt. Dies läfst sich jedoch vermeiden, wenn man die Ausscheidenden und Eintretenden jedes Alters je in eine Gruppe vereinigt.

Betrachten wir zuerst die Ausscheidenden und setzen wir voraus, dafs dieses Ausscheiden sich gleichmäfsig über das ganze Jahr verteilt.

Nehmen wir also an, dafs das Jahr in n gleiche Teile geteilt ist und dafs im Laufe des Jahres $n-1$ Personen austreten, immer eine am Ende jedes n^{ten} Jahresteils, mit Ausnahme des letzten (denn wenn jemand am Ende des letzten n^{ten} Teils austritt, ist er das ganze Jahr hindurch unter Beobachtung gewesen). Die $n-1$ Ausscheidenden sind also der Reihe nach

$$1, 2, 3, \ldots, (n-1)$$

Bruchteile des Jahres beobachtet worden, d. h. zusammen während $\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{n}$ Jahr. Wenn man diese Zeit auf die $n-1$ Personen gleichmäfsig verteilt, kommt auf einen Ausscheidenden durchschnittlich eine Beobachtungszeit von $\frac{1}{2}$ Jahr.

Wir können daher so rechnen, als ob alle Ausscheidenden in der Mitte des Jahres aus dem Beobachtungskreise ausschieden.

Die im Laufe des Jahres Eingetretenen kann man gleichfalls betrachten, als durchschnittlich ein halbes Jahr unter Beobachtung gewesen zu sein.

Wenn also am Anfang des Jahres b Personen ein bestimmtes Alter haben und im Laufe des Jahres u derselben ausscheiden, indem i Per-

sonen neu hinzutreten, so sind $b - u$ Personen ein ganzes Jahr und $u + i$ Personen durchschnittlich ein halbes Jahr unter Beobachtung. Die Anzahl der beobachteten Personen ist also festzusetzen auf

$$b - u + \tfrac{1}{2}(u + i) = b + \tfrac{1}{2}(i - u).$$

Ist nun d die Anzahl der im Laufe des Jahres Gestorbenen, so ist die Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Jahres für dieses Alter:

$$q = \frac{d}{b + \frac{1}{2}(i - u)}. \qquad (93)$$

51. Indessen ändert sich nicht nur durch das Ausscheiden und Eintreten, sondern auch durch das Sterben die Anzahl der Beobachteten im Laufe des Jahres. Dies thut der Strenge obiger Rechnung einigermafsen Abbruch.

Wir wollen diesen Punkt daher näher untersuchen.

Am Anfang des Jahres waren unter Beobachtung b Personen im Alter von x Jahren.

Im Alter zwischen x und $x + 1$ Jahr sind von diesen b Personen u Personen ausgeschieden, i Personen neu hinzugetreten und d Personen gestorben.

Nimmt man nun auch hier an, dafs in gleichen Teilen des Jahres auch eine gleiche Anzahl eintretet, so ist die Anzahl der zwischen den Altern $x + z$ und $x + z + dz$ Eingetretenen $= i\,dz$, worin z ein echter Bruch vorstellt.

Diese Personen sind übrig geblieben von $i \frac{f(x)}{f(x+z)} dz$, welche am Anfang des Jahres gerade x Jahre und am Leben waren; denn multiplicirt man diese Zahl mit der Lebenswahrscheinlichkeit $\frac{f(x+z)}{f(x)}$ des x-jährigen während z Jahr, so bekommt man wieder $i\,dz$. Die Anzahl der Todten, welche von diesen Eingetretenen der Beobachtung entzogen sind, beträgt

$$i \left(\frac{f(x)}{f(x+z)} - 1 \right) dz;$$

z stellt alle Werte von 0 bis 1 vor; also ist die Anzahl der Todten, welche von den i Eingetretenen der Beobachtung entzogen sind:

$$i \int_0^1 \left(\frac{f(x)}{f(x+z)} - 1 \right) dz,$$

wobei man beachte, dafs die i Personen übrig geblieben sind von

$$i\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+z)}\,dz$$

Personen, welche am Anfang des Jahres gerade x Jahre alt waren, sodafs die ganze Anzahl der x-jährigen am Anfang des Jahres festzusetzen ist auf

$$b+i\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+z)}\,dz.$$

Nimmt man an, dafs auch das Ausscheiden gleichmäfsig über das Jahr verteilt ist, so sind zwischen den Altern $x+z$ und $x+z+dz$ Jahr $u\,dz$ Personen ausgeschieden; am Ende des Jahres leben von denselben noch

$$u\frac{f(x+1)}{f(x+z)}\,dz;$$

die Anzahl Todter, von den $u\,dz$ Ausgeschiedenen der Beobachtung entzogen, stellt sich also auf

$$u\left[1-\frac{f(x+1)}{f(x+z)}\right]dz.$$

Infolge der u Ausgeschiedenen sind also

$$u\int_0^1\left[1-\frac{f(x+1)}{f(x+z)}\right]dz$$

der Beobachtung entzogen.

Die Anzahl Todter aus der Anzahl

$$b+i\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+z)}\,dz$$

der Lebenden am Anfang des Jahres ist also:

$$d+i\int_0^1\left[\frac{f(x)}{f(x+z)}-1\right]dz+u\int_0^1\left[1-\frac{f(x+1)}{f(x+z)}\right]dz,$$

also ist die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen

$$q=\frac{d+i\int_0^1\left[\frac{f(x)}{f(x+z)}-1\right]dz+u\int_0^1\left[1-\frac{f(x+1)}{f(x+z)}\right]dz}{b+i\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+z)}\,dz}.$$

Stellt man

$$\int_0^1 \frac{dz}{f(x+z)} = k,$$

so kommt:

$$q = \frac{d + i\,k f(x) - i + u - u\,k f(x+1)}{b + i\,k\,(f(x)}.$$

Beachtet man, dafs $q = 1 - \frac{f(x+1)}{f(x)}$ und also $(1-q) f(x) = f(x+1)$ ist, so folgt aus obenstehender Gleichung:

$$q\,b = d - (i-u)\,[1 - k f(x+1)]$$

und also:

$$d = q\,b + (i-u)\,[1 - k f(x+1)].$$

Zur strengen Bestimmung von

$$k = \int_0^1 \frac{dz}{f(x+z)}$$

mufs man den analytischen Ausdruck für $f(x)$ kennen; man kann aber entweder einen Näherungsausdruck annehmen oder aus der Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Jahres auf die Absterbung während der Jahresteile schliefsen; so könnte man annehmen, entweder dafs die Anzahl der Sterbenden in gleichen Teilen des Jahres gleich grofs ist, oder, was etwas ganz anderes ist, dafs die Sterbe-Intensität jeden Augenblick des Jahres constant ist.

Wir wollen aber annehmen, dafs die Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Teils des Jahres einen ebenso grofsen Teil der Sterbenswahrscheinlichkeit während des ganzen Jahres bildet. Bei dieser Voraussetzung ist die Sterbenswahrscheinlichkeit des $x+z$-jährigen bis zum $x+1$. Jahr, also während $1-z$ Jahr $= (1-z)\,q$, und ist

$$\frac{f(x+1)}{f(x+z)} = 1 - (1-z)\,q.$$

Also ist

$$k f(x+1) = \int_0^1 \frac{f(x+1)}{f(x+z)}\,dz = \int_0^1 [1 - (1-z)\,q)]\,dz =$$

$$= \int_0^1 [1 + (z-1)\,q]\,dz = [z + \tfrac{1}{2}(z-1)^2 q]_0^1 = 1 - \tfrac{1}{2} q.$$

Man hat also:

$$d = q\,b + (i - u) \cdot \tfrac{1}{2}\,q,$$

woraus hervorgeht:

$$q = \frac{d}{b + \frac{1}{2}(i - u)},$$

derselbe Ausdruck, den wir oben gefunden haben, und der also genauer ist, als man vielleicht vermutete.

52. Obige Berechnung setzt voraus, dafs es sich stets um grofse Zahlen handelt, sei es auch, dafs sie auch angewendet wird bei relativ kleinen Zahlen; denn wenn i und u kleine Zahlen sind, kann ebenso wenig von einem gleichmäfsigen Ein- und Austreten als von einer Integration die Rede sein.

Hiermit fällt ein Vorwurf weg, welchen man der Formel (93) gemacht hat; man hat nämlich behauptet: sind in dieser Formel die Gröfsen b und u gleich null, indem $i = d$ ist, dann hätte man den Fall, dafs im Anfang keine Person in Beobachtung stand, und dafs im Laufe des Jahres i Personen zugetreten sind, von denen keine bei Lebzeiten ausgeschieden ist, die aber alle im Laufe des Jahres gestorben sind; man würde dann finden:

$$q = 2.$$

Nun hat man eingewendet, eine Sterbenswahrscheinlichkeit, die gröfser ist als die Einheit, habe keinen Sinn, und hat deshalb vorgeschlagen, diejenigen, welche im Laufe desselben Jahres zugetreten und gestorben sind, als ganze Personen zu rechnen. Es seien also jetzt von den i Beigetretenen d' gestorben, während die ganze Anzahl der Gestorbenen d bleibe; die Zahl der beobachteten Personen liefse sich dann in folgender Weise berechnen: von den i Eingetretenen sind $i - d'$ am Leben geblieben, und diese werden als halbe Personen gerechnet, die übrigen d' als ganze Personen; die gesuchte Zahl der beobachteten Personen würde also sein:

$$b + \tfrac{1}{2}(i - d') + d' - \tfrac{1}{2}u = b + \tfrac{1}{2}(i + d' - u),$$

und die Sterbenswahrscheinlichkeit wäre:

$$w = \frac{d}{b + \frac{1}{2}(i + d' - u)}. \qquad (94)$$

Hiergegen ist folgendes zu bemerken: die Sterbenswahrscheinlichkeit 2 während eines Jahres hat freilich an und für sich keinen Sinn; aber die Sterbenswahrscheinlichkeit 1 während eines halben Jahres hat sehr wohl einen Sinn; die Gewifsheit, innerhalb eines halben Jahres zu

sterben, weist auf eine gröfsere Sterblichkeit hin, als die Gewifsheit, innerhalb eines ganzen Jahres zu sterben, und auf eine noch viel gröfsere als die Gewifsheit, innerhalb 10 Jahren zu sterben.

Wenn man Formel (93) anwendet, wird man fast nie eine Sterbenswahrscheinlichkeit > 1 finden, und wenn dies doch einmal für die allerhöchsten Altersstufen der Fall sein sollte, so setzt man einfach die Wahrscheinlichkeit $= 1$. Bei der Ausgleichung wird sich das finden.

53. Ein anderer Vorwurf ist von gröfserer Bedeutung.

Es können sich nämlich unter den im Laufe des Jahres Zugetretenen welche befinden, die im Laufe desselben Jahres bei Lebzeiten wieder ausscheiden, und diese kommen in Formel (93) gar nicht zur Geltung, obgleich sie doch auch einige Sterbenswahrscheinlichkeit gehabt haben; die Formel giebt m. a. W. die Sterbenswahrscheinlichkeit etwas zu grofs an. Es ist nicht schwer, dem Bedenken Rechnung zu tragen.

Wir teilen dazu das Jahr in n gleiche Teile und setzen voraus, dafs am Ende jedes dieser Teile, mit Ausnahme der beiden letzten, so viele Personen zutreten, als die um 1 verminderte Zahl der ihm folgenden Jahresteile beträgt, und dafs von diesen Personen am Ende jedes folgenden Jahresteils eine austritt. Unter einer solchen Voraussetzung würde die gröfstmögliche Regelmäfsigkeit in Rücksicht des Zu- und Austretens im Laufe desselben Jahres herrschen. Wir können nun folgende Übersicht aufstellen:

Jahresteil.	Zutretende Personen.	Gesammtzahl der Jahresteile, während deren sie unter Beobachtung stehen.
1^{ter}	$n-2$	$(n-2)+(n-3)+(n-4)+\ldots+1$
2^{ter}	$n-3$	$(n-3)+(n-4)+\ldots+1$
3^{ter}	$n-4$	$(n-4)+\ldots+1$
⋮	⋮	⋮
$n-p^{\text{ter}}$	$p-1$	$(p-1)+(p-2)+\ldots+\ldots\ldots+1$
⋮	⋮	⋮
$n-3^{\text{ter}}$	2	$2+1$
$n-2^{\text{ter}}$	1	1.

Die $1+2+3+\ldots+(n-2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Personen, welche im Laufe desselben Jahres zu- und wieder ausgetreten sind sind also zusammen während

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots.+(1+2+3\ldots.(n-2))=$$
$$=\tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

Jahresteilen beobachtet worden, also hat eine Person durchschnittlich während $\frac{1}{3}n$ Jahresteilen, d. h. $\frac{1}{3}$ Jahr lang unter Beobachtung gestanden.

Sind also i' Personen im Laufe des Jahres zu- und wieder ausgetreten, dann mufs man sie als $\frac{1}{3}i'$ Personen rechnen, die während des ganzen Jahres beobachtet worden sind. Wenn demnach i die ganze Anzahl der Zu-, u die ganze Anzahl der Ausgetretenen ist, dann ist i' sowohl in i als auch in u mit einbegriffen, und man mufs deshalb die Anzahl der beobachteten Personen in (93) um $\frac{1}{3}i'$ vergröfsern; die Formel für die Sterbenswahrscheinlichkeit wird also:

$$q=\frac{d}{b+\frac{1}{2}(i-u)+\frac{1}{3}i'} \qquad (95)$$

Diese Formel könnte man zweckmäfsig anwenden, wenn viele zutretende Personen aus dem Beobachtungskreis wieder sehr bald auszuscheiden pflegen. Ist aber die Zahl i' den l und i gegenüber nur klein, — und das ist fast immer der Fall — so wird man sich besser mit Formel (93) begnügen. Es ist dies um so mehr vorzuziehen, weil man letztere Formel so umformen kann, dafs die Zahlen i und u nicht bestimmt zu werden brauchen. Sollte man wirklich eine Ungenauigkeit infolge der im Laufe des Jahres Eintretenden fürchten, so thut man besser, sie von der Beobachtung auszuschliefsen.

Sei nämlich e die Zahl der Personen am Ende des Jahres, so erhält man

$$b+i-u-d=e,$$

also
$$i-u=e-b+d,$$

und
$$b+\tfrac{1}{2}(i-u)=\tfrac{1}{2}(b+e+d),$$

sodafs die Sterbenswahrscheinlichkeit ist:

$$q=\frac{2d}{b+e+d}. \qquad (96)$$

Das Einschätzen des Alters.

54. Es versteht sich von selbst, dafs, wenn das Alter einer Person am 1. Januar 1892 auf 40 Jahre eingeschätzt wird, ihr Alter am

1. Januar 1893 mit 41 Jahren angesetzt werden mufs. Deshalb ist nur die Frage, wie das Alter im Jahr des Eintritts in die Beobachtung eingeschätzt werden soll. Dies kann auf verschiedene Weisen geschehen: man kann erstens die Beobachteten nach Geburtsjahren ordnen. Nehmen wir z. B. die im Jahre 1870 Geborenen; diese werden alle im Laufe des Jahres 1892 22 Jahre alt. Die einen werden aber in der ersten Hälfte, die anderen in der zweiten Hälfte des Jahres geboren sein. Nimmt man an, dafs die verschiedenen Geburtstage gleichmäfsig über das Jahr verteilt sind, dann kann man sagen, dafs die 1870 Geborenen am 1. Januar 1892 durchschnittlich 21½ Jahr alt waren. Hat man dann auch die Anzahl der Gestorbenen aus jedem Geburtsjahr, so lassen sich die Sterbenswahrscheinlichkeiten berechnen, aber nicht für ganze Altersjahre, sondern für die dazwischenliegenden Alter: 21½ Jahr u. s. w.

Diese Methode benutzt **Prof. Dr. A. J. van Pesch** in seinen Sterblichkeitstafeln, die 1885 durch die „Vereinigung für Statistik in Holland“ veröffentlicht worden sind, und er hat sich durch Stichproben davon überzeugt, dafs die Abweichung von der Wahrheit nur sehr gering ist, wenn man alle, die zwischen 20 und 21 Jahr alt sind, mit 20½ in Rechnung stellt. Wo sich aber die Sterbenswahrscheinlichkeit im Laufe des Jahres sehr schnell ändert, wie in den ersten 5 oder 6 Lebensjahren, und in besonders hohem Grade während des ersten Lebensjahres, da ist die Methode nicht zu brauchen. Auch bei den Lebensversicherungs-Gesellschaften wird dieselbe Methode angewendet; dafs man die Sterbenswahrscheinlichkeiten dann nicht für die gerade 20, 21, 22 u. s. w. Jahr alten Personen erhält, sondern für die durchschnittlich 20½, 21½, 22½ u. s. w. Jahr alten, verursacht denjenigen Gesellschaften keine Schwierigkeit, die sich von allen, zwischen 40 und 41 Jahr alten Personen die Prämien der 40-jährigen zahlen lassen. Indessen ist es sehr wohl möglich, die Sterbenswahrscheinlichkeiten auf den Geburtstag zu reduciren.

55. Sind nämlich die Sterbenswahrscheinlichkeiten für das Alter von 20½, 21½, 22½ u. s. w. Jahr bestimmt, dann kann man in erster Annäherung für die Sterbenswahrscheinlichkeit des 21-jährigen das Mittel zwischen denjenigen des 20½- und des 21½-jährigen nehmen. Eine bessere Annäherung ergiebt sich, wenn man je vier auf einander folgende Sterbenswahrscheinlichkeiten als Glieder einer arithmetischen Reihe der dritten Ordnung betrachtet, wie dies auch **Prof. van Pesch** bei den oben erwähnten Sterblichkeitstafeln gethan hat.

Suchen wir also auf diesem Wege die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen aus denjenigen des $x-\frac{3}{2}$, $x-\frac{1}{2}$, $x+\frac{1}{2}$, $x+\frac{3}{2}$-jährigen abzuleiten.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen sei das Glied $f(0)$ der Rangordnung 0; dann sind die der $x-\frac{3}{2}$, $x-\frac{1}{2}$, $x+\frac{1}{2}$, $x+\frac{3}{2}$-jährigen

$$f(-\tfrac{3}{2}),\ f(-\tfrac{1}{2}),\ f(\tfrac{1}{2}),\ f(\tfrac{3}{2}).$$

Wenn also $f(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ gesetzt wird, dann ist $f(0) = A$, sodafs nur die Unbekannte A zu bestimmen ist. Dazu hat man:

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{1}{2}) &= A - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}C - \tfrac{1}{8}D, \\ f(+\tfrac{1}{2}) &= A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}C + \tfrac{1}{8}D, \\ f(-\tfrac{3}{2}) &= A - \tfrac{3}{2}B + \tfrac{9}{4}C - \tfrac{27}{8}D, \\ f(+\tfrac{3}{2}) &= A + \tfrac{3}{2}B + \tfrac{9}{4}C + \tfrac{27}{8}D. \end{aligned}$$

Wenn man die zwei ersten und die zwei letzten dieser vier Gleichungen addirt, ergiebt sich:

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{1}{2}) + f(+\tfrac{1}{2}) &= 2A + \tfrac{1}{2}C, \\ f(-\tfrac{3}{2}) + f(+\tfrac{3}{2}) &= 2A + \tfrac{9}{2}C, \end{aligned}$$

und daraus:

$$f(0) = A = \frac{9[f(-\tfrac{1}{2}) + f(+\tfrac{1}{2})] - [f(-\tfrac{3}{2}) + f(+\tfrac{3}{2})]}{16}.$$

Wenn also allgemein die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen mit q_x bezeichnet wird, so ist:

$$q_x = \frac{9(q_{x-1/2} + q_{x+1/2}) - (q_{x-3/2} + q_{x+3/2})}{16}. \qquad (97)$$

56. Eine zweite bei Lebensversicherungs-Gesellschaften vorkommende Art, das Alter einzuschätzen, besteht darin, dafs man die Personen nach vollen Altersjahren einschreibt, sodafs alle, die in einem Alter zwischen 40 und 41 Jahr eintreten, mit 40 Jahr eingetragen werden. Die einen werden nämlich bei der Einschreibung nahe an 40, andere fast 41 Jahre u. s. w. alt sein. Ist also die Zahl der Beitretenden grofs, so kann man sie auf das mittlere Alter von $40\frac{1}{2}$ einschätzen. Nimmt man aufserdem an, dafs die Zugänge gleichmäfsig über das Jahr verteilt sind, so läfst sich fingiren, dafs sie alle in der Mitte des Jahres beigetreten sind. Unter diesen Annahmen sind sie am Anfang des nächsten Jahres sämmtlich 41 Jahr alt. Dies stimmt also mit dem Verfahren gut überein, dafs alle, die im Laufe des Jahres in einem Alter zwischen 40 und 41 Jahr beitreten, am 1. Januar des Jahres als genau 40-jährige zählen.

57. Man kann auch denjenigen Personen, welche im Laufe eines Kalenderjahres eingeschrieben werden, das Alter in vollen Jahren zuschreiben, welches sie am 1. Juli dieses Jahres haben, gleichviel, ob sie vor oder nach dem 1. Juli zutreten. Diejenigen Personen, welche z. B. am 1. Juli im 41. Lebensjahr stehen, werden zu den 40-jährigen gerechnet; einige derselben sind am 1. Juli wenig älter als 40 Jahre, andere beinahe 41 Jahre, sind also durchschnittlich 40½ Jahr alt, sodafs sie am 1. Januar des folgenden Jahres 41 Jahre alt zu rechnen sind.

Die Kinder, welche am 1. Juli des Jahres der Einschreibung das 1. Lebensjahr noch nicht vollendet haben oder sogar erst nach dem 1. Juli geboren wurden, werden natürlich am Jahre der Einschreibung auf 0 Jahr gerechnet. Den Kindern, welche vor dem 1. Juli geboren waren, giebt man am 1. Januar des folgenden Jahres das Alter 1; denjenigen aber, welche nach dem 1. Juli des Jahres der Einschreibung geboren sind, läfst man am 1. Januar des folgenden Jahres das Alter 0 beibehalten.

58. Eine vierte Art ist die, dafs man alle, die z. B. zwischen dem 1. Januar und dem 1. Juli 1850 geboren sind, in die Liste vom Jahre 1850 einträgt und voraussetzt, dafs sie am 1. Januar 1850 geboren sind; am 1. Januar 1893 hat man also diesen das Alter von 43 Jahren zu geben. Dagegen trägt man alle zwischen dem 1. Juli und dem 31. Dec. 1850 Geborenen in die Liste vom Jahre 1851 ein und giebt ihnen also am 1. Januar 1893 das Alter von 42 Jahren.

59. Für Gestorbene und bei Lebzeiten Ausgeschiedene mufs das Alter natürlich neuerdings bestimmt werden.

Wo die Versicherten geordnet sind nach ihrem wirklichen (Nr. 54) oder abgeschätzten (Nr. 58) Geburtsjahr, liegt es vor der Hand ebenso zu handeln beim Sterben oder Ausscheiden, welches also angenommen wird, im Alter, welches ihnen zugeschrieben wurde am 1. Januar des Jahres, in welchem das Sterben oder Ausscheiden geschieht, stattzufinden.

Ebenso kann man bei Anwendung der in Nr. 56 und 57 beschriebenen Methode das Alter der Gestorbenen und Gestrichenen nach dem Alter, das ihnen am 1. Januar des laufenden Jahres zugeschrieben wurde, festsetzen. Sie verschwinden dann aus den Listen, worin sie standen.

Man kann aber auch beim Sterben oder Ausscheiden das Alter in vollen Jahren annehmen, in welchem die Personen dann wirklich stehen, um in dieser Hinsicht so genau wie möglich zu sein; bei einer begrenzten Anzahl Beobachtungen könnte es aber bei Anwendung des in Nr. 56 entwickelten Systems geschehen, dafs man einige Personen als gestorben verzeichnen oder streichen mufs in einem Alter, worin keine

oder nicht genug Versicherte in Beobachtung sind. Bei Anwendung des in Nr. 57 entwickelten Systems könnte es vorkommen, dafs jemand z. B. im 26-jährigen Alter eingeschrieben wurde, indem er beim Sterben oder Ausscheiden nur 25 Jahre alt ist. Es verschwinden also die Gestorbenen und Gestrichenen nicht immer aus den Listen, worin sie vorkommen.

60. Bei Gesellschaften, welche ihr Geschäftsjahr nicht mit dem 1. Januar anfangen und ihre Beobachtungen nach Geschäftsjahren einrichten, kann man besonders die in Nr. 56 oder 57 beschriebene Methode empfehlen.

Fängt z. B. das Geschäftsjahr am 1. October an, so kann man alle Personen, welche z. B. zwischen 40 und 41 Jahr zutreten, auf 40 Jahre einschreiben, und ihnen am 1. October des folgenden Jahres 41 Jahre geben; oder man kann dieselben einschreiben auf das Alter in vollen Jahren, in welchem sie am 1. April des laufenden Geschäftsjahres stehen.

61. Die hier beschriebenen Methoden sind indefs alle ziemlich ungenau für die allerersten Lebensjahre, in welchen sich die Sterblichkeit stark ändert.

Man ist gelegentlich in folgender Weise vorgegangen: man setzt voraus, dafs die bei der Geburt Eingeschriebenen sich gleichmäfsig über das Jahr verteilen, sodafs man sie alle als in der Mitte des Jahres eingeschrieben und darum am Anfang des nächsten Jahres als $\frac{1}{2}$ Jahr alt betrachten kann; die im Jahre der Einschreibung Gestorbenen rechnet man dann als 0-jährige, von den übrig Gebliebenen läfst man die Hälfte am Anfang des nächsten Jahres das Alter von 0 Jahr behalten, die anderen rechnet man als einjährig.

Rücksichtlich der Lebensversicherungs-Gesellschaften ist dieses Verfahren schon deshalb bedenklich, weil bei ihnen Einschreibungen unmittelbar nach der Geburt nur ausnahmsweise stattfinden; man verfährt viel genauer sowohl bei ganzen Bevölkerungen wie auch bei Gesellschaften, wenn man wirklich auszählt, wieviel der Eingeschriebenen innerhalb des ersten Lebensjahres gestorben sind, um daraus abzuleiten, wie viele derselben das erste Lebensjahr vollendet haben. Dazu ist aber notwendig, dafs man von allen Gestorbenen auch das Jahr der Geburt weifs.

Bei Unkenntnis desselben hat man bei ganzen Bevölkerungen die aus der Erfahrung geschöpfte Regel benutzt, dafs von den Kindern, die im Laufe eines Jahres sterben, ohne das erste Lebensjahr vollendet zu haben, $\frac{2}{3}$ in demselben Jahr und $\frac{1}{3}$ im vorhergehenden Jahr geboren sind.

Besonders bei Lebensversicherungs-Gesellschaften teilt man, wo es sich um die ersten Altersjahre handelt, am zweckmäfsigsten das Jahr z. B. in vier Vierteljahre ein und verfährt mit diesen Vierteljahren

genau so wie für die älter Beitretenden mit den ganzen Jahren. Man erhält dann die Sterbenswahrscheinlichkeiten per Vierteljahr, was schon an und für sich von Belang ist, ganz abgesehen davon, dafs man die Sterbenswahrscheinlichkeiten per Jahr daraus leicht ableiten kann.

Sterbenswahrscheinlichkeiten aus verschiedenen Beobachtungsjahren.

62. Wenn für einen engeren oder weiteren Kreis nach oben angegebenen Grundsätzen bestimmt ist, wie viel Personen jeden Alters am Anfang eines Jahres lebten und wie viele jeden Alters im Laufe des Jahres gestorben sind, so erhält man dadurch die Sterbenswahrscheinlichkeiten während dieses Jahres.

Wenn nämlich l die Zahl der Lebenden in dem Alter x, d die Zahl der von diesen x-jährigen Gestorbenen ist, dann ist für das betreffende Jahr die Sterbenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen $\frac{d}{l}$ gewesen.

Um nur mit einiger Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen Folgerungen für die Zukunft ziehen zu können, ist die erste Bedingung, dafs man viele Beobachtungen gemacht hat; aber auch wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, wäre es sehr unvorsichtig, aus den Ergebnissen für ein einziges Jahr Folgerungen zu ziehen; denn allerlei Umstände wie Temperatur, Wetter, eine gute oder schlechte Ernte, Epidemien und dergleichen können einen grofsen Einfluſs auf die Sterblichkeit während eines bestimmten Jahres ausüben. Darum ist es unbedingt notwendig, mehrere Jahre in Betracht zu ziehen, also eine durchschnittlich jährliche Sterbenswahrscheinlichkeit von z. B. 20 Jahren zu benutzen.

Diese Anzahl Jahre allzu grofs zu nehmen, ist auch wieder bedenklich, denn es wäre z. B. recht gewagt, aus der durchschnittlichen Sterblichkeit während des ganzen 19. Jahrhunderts zu schliefsen, welche diejenige des 20sten sein wird; weil die Sterblichkeit während solcher langer Zeiträume grofsen Veränderungen ausgesetzt sein kann, wie dies auch die Erfahrung gelehrt hat. Man läuft weit weniger Gefahr, wenn man aus der Sterblichkeit während etwa 20 Jahren auf die während der nächsten 20 Jahre schliefst.

Hat man Tafeln für Perioden von vielleicht 10 Jahren, so kann man daraus entnehmen, ob die Sterblichkeit im Laufe der Jahrzehnte zunimmt, abnimmt, schwankt oder im allgemeinen ziemlich beständig ist; im letzteren Falle erhält man genauere und zuverlässigere Zahlen, je mehr Jahre zu einem Ganzen vereinigt sind.

63. Sehen wir jetzt zu, wie man die verschiedenen Jahre der Beobachtung zu einem Jahre vereinigen kann. Es seien für eine bestimmte Altersstufe in den verschiedenen Jahren der Beobachtung die Anzahlen der Lebenden und der Gestorbenen: l_1 und d_1, l_2 und d_2 u. s. w., und die gesuchte Sterbenswahrscheinlichkeit für dieses Alter q, dann hat man für die verschiedenen Jahre:

$$\left.\begin{aligned} q\,l_1 &= d_1, \\ q\,l_2 &= d_2, \\ q\,l_3 &= d_3, \\ &\vdots \\ q\,l_n &= d_n. \end{aligned}\right\} \qquad (98)$$

Die sich aus den verschiedenen Gleichungen ergebenden Werte von q werden in der Regel nicht gleich sein. Um den wahrscheinlichsten Wert von q zu bestimmen, hat man verschiedene Wege eingeschlagen. Man kann nämlich für q das arithmetische Mittel der n Werte nehmen, die für die einzelnen Beobachtungsjahre folgen, sodafs dann:

$$q = \frac{1}{n}\left(\frac{d_1}{l_1} + \frac{d_2}{l_2} + \frac{d_3}{l_3} + \ldots + \frac{d_n}{l_n}\right). \qquad (99)$$

Man geht dabei von der Annahme aus, dafs die Sterbenswahrscheinlichkeit die beobachtete Gröfse ist, welche von der Verschiedenartigkeit der Jahre beeinflufst wird.

Andererseits kann man davon ausgehen, dafs, wie dies auch wirklich der Fall ist, die Zahlen l und d die beobachteten Gröfsen sind, wobei nicht nur zufällige Abweichungen, sondern sogar Verzählungen stattgefunden haben können.

Darum addirt man alsdann die verschiedenen Gleichungen und findet:

$$q \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n) = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n,$$

sodafs die Sterbenswahrscheinlichkeit ist:

$$q = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n}{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}. \qquad (100)$$

Dieser Weg wird von den Lebensversicherungs-Gesellschaften bevorzugt. Zwar sind complicirtere Formeln aufgestellt und angewandt worden, man hat die Methode der kleinsten Quadrate benutzt, indem

man glaubte, damit das erhöhte Gewicht, welches den Jahren mit mehr Beobachtungen zukommt, am besten berücksichtigen zu können. So ist man gekommen zur Formel (**Dr. Heym**):

$$q = \frac{l_1 d_1 + l_2 d_2 + \ldots + l_n d_n}{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}. \qquad (101)$$

Man könnte aber mit ungefähr demselben Rechte folgende Formel benutzen:

$$q = \frac{d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2}{l_1 d_1 + l_2 d_2 + \ldots + l_n d_n}. \qquad (102)$$

Ebenso könnte man die Gleichungen (101) und (102) multipliciren und dann q bestimmen aus der Gleichung:

$$q^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2}{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}. \qquad (103)$$

Setzt man die Sterbenswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Beobachtungsjahre $= q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$, sodafs

$$q_1 = \frac{d_1}{l_1}, \; q_2 = \frac{d_2}{l_2}, \ldots q_n = \frac{d_n}{l_n},$$

so hat man auch wohl die Formel:

$$q = \frac{q_1 \sqrt{l_1} + q_2 \sqrt{l_2} + q_3 \sqrt{l_3} + \ldots + q_n \sqrt{l_n}}{\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} + \sqrt{l_3} + \ldots + \sqrt{l_n}} \qquad (104)$$

und noch andere complicirtere empfohlen.

Man bemerkt übrigens, dafs, wenn $l_1 = l_2 = l_3 = \ldots l_n$, und $d_1 = d_2 = d_3 = \ldots d_n$, alle vorstehenden Formeln dasselbe Resultat $\frac{d_1}{l_1}$ geben. Wenn also die Gröfsen l und d der verschiedenen Beobachtungsjahre keinen grofsen Unterschied aufweisen, werden auch die Sterbenswahrscheinlichkeiten nach den verschiedenen Formeln nur wenig auseinander liegen.

Indessen erscheint uns in vieler Hinsicht die Formel (100) als die beste. Dafs sie am leichtesten anzuwenden ist, springt in die Augen, und wird sich noch besser zeigen; obendrein erhält sie auch **Wittstein** in seiner „Mathematischen Statistik", indem er die verschiedenen Jahre unter Anwendung der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit combinirt.

Ohne Frage ist die Formel (100) besser als (99), weil sie (sei es auch unbeabsichtigt) Rücksicht nimmt auf die verschiedene Anzahl der beobachteten Leben in den einzelnen Jahren. Um dies zu erläutern, betrachten wir den Fall zweier Beobachtungsjahre.

Im ersten Jahre mögen wir l Personen mit d Gestorbenen beobachtet haben, sodafs die Sterbenswahrscheinlichkeit für dieses Jahr $\frac{d}{l} = q$ ist, im zweiten Jahre $2l$ Personen mit $2d + \alpha$ Gestorbenen, sodafs sich die Sterbenswahrscheinlichkeit auf $\frac{2d+\alpha}{2l} = q + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{l}$ stellt. Nun giebt Formel (99) als durchschnittliche Sterbenswahrscheinlichkeit

$$\tfrac{1}{2}\left(q + q + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha}{l}\right) = q + \tfrac{1}{4}\frac{\alpha}{l};$$

Formel (100) dagegen

$$\frac{3d+\alpha}{3l} = q + \tfrac{1}{3}\frac{\alpha}{l}.$$

Nach Formel (99) liegt die durchschnittliche Sterbenswahrscheinlichkeit genau in der Mitte zwischen den Sterbenswahrscheinlichkeiten für die beiden Jahre, nach Formel (100) liegt sie der Sterbenswahrscheinlichkeit für das Jahr mit der gröfsten Anzahl beobachteter Personen näher als dem anderen, was gewifs das zutreffendere ist.

Lehrreicher noch ist folgendes Beispiel. Im ersten Jahre seien beobachtet 100 l Personen mit 100 d Gestorbenen, im folgenden Jahre l Personen mit $2d$ Gestorbenen; die Sterbenswahrscheinlichkeiten für die zwei Jahre sind also $\frac{d}{l}$ und $\frac{2d}{l}$. Die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit ist nach Formel (99) $\frac{3}{2}\frac{d}{l}$, nach Formel (100) $\frac{102d}{101l}$, also im letzteren Falle nur wenig verschieden von $\frac{d}{l}$, wie es auch sein soll, denn das erste Jahr mit 100 l beobachteten Personen mufs viel mehr Einflufs üben als die l Personen des folgenden Jahres.

Setzt man wie oben $\frac{d_1}{l_1} = q_1$, $\frac{d_2}{l_2} = q_2$, u. s. w., so läfst sich die Formel (100) schreiben:

$$q = \frac{l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3 + \ldots + l_n q_n}{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n},$$

woraus man erkennt, dafs q hier auch ein Mittelwert ist aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Jahre, wobei aber einer

jeden ein Gewicht beigelegt ist gleich der Anzahl der beobachteten Personen.

Es ist hierbei zu bemerken, dafs die Formel (100) die Beobachtungen verschiedener Jahre auf dieselbe Weise zu einem Jahre vereinigt, als man die Beobachtungen verschiedener Gesellschaften zusammen nimmt, oder auch aus den Beobachtungen der verschiedenen Provinzen eines Landes zu der Beobachtung des ganzen Landes kommt. (Man sehe auch: Dr. J. H. **Peek**, Toepassing der Waarschijnlijkheids-Rekening op Levensverzekering en Sterfte-Statistiek.)

Ermittlung der Sterblichkeit ohne Auseinanderhaltung der Beobachtungsjahre.

64. Wenn man die Sterbenswahrscheinlichkeit per Jahr über eine Reihe von Jahren nach einer der Formeln (99), (101), (102), (103) oder (104) ermitteln will, so müssen für jedes einzelne Jahr die Zahlen l und d bekannt sein.

Es ist deshalb ein grofser Vorzug der Formel (100), dafs man bei ihr die Beobachtungs-Zahlen der einzelnen Jahre nicht braucht, sondern die notwendigen Daten ohne Unterscheidung nach Jahren in eine einzige Tafel vereinigen kann. (Man vergleiche auch: Prof. **Johannes Karup**, die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Societät.)

Die Summe $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ in Formel (100) bedeutet offenbar die Zahl der beobachteten Personen, die während der Beobachtungszeit x Jahr alt waren. Für diese Summe werden wir im Folgenden noch einen einfacheren Ausdruck finden. Die betreffenden Personen gehören sämmtlich zu der Gesammtheit (P_x) derer, die am Anfang der Beobachtungszeit im Alter a bis x (a sei das niedrigste beobachtete Alter) standen, vermehrt um die Zahl derer, die später in den Altersjahren a bis x in die Beobachtung eintraten. Von diesen haben aber alle diejenigen (Q_x) nicht im Alter x in Beobachtung gestanden, die im Alter a bis $x-1$ während der Beobachtungsjahre lebend ausgeschieden oder gestorben sind, sowie diejenigen, die am Ende der Beobachtungsjahre das Alter x noch nicht erreicht haben, d. h. die am Ende der Beobachtungszeit im Alter a bis $x-1$ stehen. Um nun die gesuchte Gröfse $P_x - Q_x = C_x$ zu bilden, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Es sei B_y die Anzahl der y-jährigen am 1. Januar des ersten Beobachtungsjahres,

I_y die Anzahl derjenigen, die während der Beobachtungsjahre im Alter von y Jahren zutraten, in dem Sinne, dafs ihr Alter y Jahre war am 1. Januar des Beitrittsjahres,

U_y die Gesammtzahl der lebend Austretenden, deren Alter y war am 1. Januar des Austrittsjahres,

T_y die Gesammtzahl der Sterbenden, deren Alter y Jahr betrug am 1. Januar ihres Sterbejahres,

D_y die Anzahl derjenigen, die am 1. Januar des letzten Jahres y Jahr alt waren und am letzten December dieses Jahres noch lebten.

Setzt man endlich

$$B_y + I_y = F_y \text{ und } U_y + T_y + D_y = G_y,$$

so erhalten wir bei der vorläufigen Annahme, dafs der Beitritt stets am 1. Januar stattfindet, der Austritt am 31. December:

$$P_x = F_a + F_{a+1} + F_{a+2} + \ldots + F_x,$$
$$Q_x = G_a + G_{a+1} + G_{a+2} + \ldots + G_{x-1},$$

woraus sich dann

$$P_x - Q_x = C_x$$

ergiebt.

Dieses C_x müssen wir jetzt noch corrigiren für die Voraussetzung, dafs die Beitritte und Austritte bei Lebzeiten sich gleichmäfsig über das Jahr verteilen; die Anzahl der beobachteten x-jährigen ist also:

$$C_x - \frac{I_x + U_x}{2}$$

und die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen demnach:

$$\frac{T_x}{C_x - \frac{I_x + U_x}{2}}. \qquad (105)$$

Hier wird die Sterbenswahrscheinlichkeit per Jahr für eine gewisse Anzahl von Beobachtungsjahren angegeben.

Wenn diese Beobachtungszeit mit der Gründung der Gesellschaft oder der Gesellschaften beginnt, sind natürlich die Zahlen $B_y = 0$ zu setzen.

Die Methode ist vor allem darum so bequem, weil man nur Rücksicht zu nehmen braucht auf das Alter im Beitritt, beim Austritt und Ableben, nicht aber auf das Jahr, wo der Beitritt etc. stattfand.

Wenn das Alter auf dieselbe Weise eingeschätzt wird, giebt diese Methode genau dasselbe Resultat wie Formel (100), in welcher die Jahre

auseinander gehalten sind und für jedes Jahr und jedes Alter die Anzahl der Lebenden bestimmt ist durch $b + \frac{1}{2}(i - u)$ (siehe Formel 93).

Man sieht, wie sich diese Methode für andere Arten, das Alter einzuschätzen, modificiren liefse.

Die Ausgleichung der Sterblichkeitstafeln.

65. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten, wie sie aus der Beobachtung abgeleitet sind, leiden oft noch daran, dafs sie Unregelmäfsigkeiten zeigen, die gröfstenteils auf die immer noch zu geringe Anzahl von Beobachtungen zurückzuführen sind, so grofs auch diese an und für sich sein mag.

Besonders für finanzielle Berechnungen empfiehlt es sich, dergleichen Unregelmäfsigkeiten zu beseitigen, oder, wie man sich ausdrückt, die Sterbenswahrscheinlichkeiten auszugleichen (zu graduiren).

Man kann in der Hauptsache drei Arten der Ausgleichungen unterscheiden: 1. die graphische, 2. die mechanische, 3. die analytische Methode.

Nach der graphischen Methode kann man die Sterbenswahrscheinlichkeiten als Ordinaten zu den als Abscissen betrachteten verschiedenen Altersstufen abtragen, sodafs die Sterbenswahrscheinlichkeiten dann durch ebensoviel Punkte angedeutet werden. Man läfst dann eine Curve zwischen den Punkten hindurchgehen, unterhalb der einen, oberhalb der anderen, sodafs etwa die Summe der Zunahmen der Ordinaten der Summe der Abnahmen gleich ist.

Die so gewonnenen neuen Ordinaten stellen alsdann in ihren zugehörigen Zahlwerten die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten dar. Diese graphische Methode erfordert sowohl grofse Gewandtheit als auch gute Hilfsmittel. Darum ziehen viele eine der in grofser Anzahl aufgestellten rechnerischen Ausgleichungsmethoden vor.

66. Die mechanischen Methoden, deren es viele giebt, unterwerfen die auszugleichenden Zahlen einer Correctur, ohne es dahin zu führen, dafs die ausgeglichenen Zahlen einem Gesetz unterliegen, welches in einer Formel ausgedrückt erscheint.

In erster Stelle nennen wir die Methode von **Finlaison,** welche auch von **Wittstein** in seiner Mathematischen Statistik empfohlen wird.

Hat man die Reihe u_0, u_1, u_2, u_3 ... u. s. w. auszugleichen, so kann man für den verbesserten Wert (y_n) von u_n nehmen den mittleren Wert von fünf Zahlen dieser Reihe, nämlich die Zahl u_n selbst, die zwei

nächst vorangehenden und die zwei nächst folgenden, sodafs der verbesserte Wert von u_n sich wie folgt ausdrücken läfst:

$$y_n = \tfrac{1}{5}(u_{n-2} + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2}). \qquad (106)$$

Ist die so entstandene Reihe der y noch zu unregelmäfsig, so kann man auf dieselbe wieder dieselbe Formel anwenden, sodafs man y_n ändert in

$$z_n = \tfrac{1}{5}(y_{n-2} + y_{n-1} + y_n + y_{n+1} + y_{n+2}).$$

Substituirt man hierin

$$\begin{aligned}
y_n &= \tfrac{1}{5}(u_{n-2} + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2}),\\
y_{n-1} &= \tfrac{1}{5}(u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n + u_{n+1}),\\
y_{n-2} &= \tfrac{1}{5}(u_{n-4} + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n),\\
y_{n+1} &= \tfrac{1}{5}(u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3}),\\
y_{n+2} &= \tfrac{1}{5}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4}),
\end{aligned}$$

so findet man den corrigirten Wert z_n, ausgedrückt in den ursprünglichen Zahlen, nämlich:

$$\begin{aligned}
z_n = \tfrac{1}{25}(&u_{n-4} + 2u_{n-3} + 3u_{n-2} + 4u_{n-1} + 5u_n +\\
&+ 4u_{n+1} + 3u_{n+2} + 2u_{n+3} + u_{n+4}).
\end{aligned} \qquad (107)$$

Eine Unregelmäfsigkeit 1 im Gliede u_n reducirt sich zu einer Unregelmäfsigkeit $\frac{5}{25}$ in z_n, eine Unregelmäfsigkeit 1 im Gliede u_{n+1} oder u_{n-1} reducirt sich zu einer Unregelmäfsigkeit $\frac{4}{25}$ in z_n u. s. w. Man sagt in diesem Falle, dafs die Unregelmäfsigkeiten sich verbreiten über zwei gerade Linien.

Diese Methode, welche sehr leicht anzuwenden ist, und ziemlich stark abrundet, hat aber den Nachteil, blos in ersten Differenzen genau zu sein, d. h. die Methode läfst nur dann die gegebene Reihe unverändert, wenn diese eine arithmetische Reihe erster Ordnung ist. Sie setzt also voraus, dafs jede aufeinander folgende Neunzahl Glieder einer Reihe erster Ordnung annähern soll.

Ist die auszugleichende Reihe schon ziemlich regelmäfsig, so macht diese Ausgleichung alle Zahlen etwas zu grofs.

67. Fordert man, dafs eine gewisse Anzahl aufeinander folgender Glieder der beobachteten Reihe sich einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung nähern soll, so kann man u_n, als unbekannt betrachtet, auf verschiedene Weisen berechnen aus einer Dreizahl benachbarter Werte der unausgeglichenen Reihe. So kann man u_n auf vier verschiedene Weisen berechnen aus drei Zahlen, deren Distanz fünf Einheiten beträgt, wovon eine dem Gliede u_n vorangeht und zwei demselben folgen oder umgekehrt und deren Distanz von u_n nicht mehr als sieben Einheiten beträgt. In diesem Falle kommt bei den vier Interpolationen keine der Zahlen zweimal vor.

Man kann nämlich u_n berechnen aus

1. u_{n-7}, u_{n-2} und u_{n+3},
2. u_{n-6}, u_{n-1} „ u_{n+4},
3. u_{n-4}, u_{n+1} „ u_{n+6},
4. u_{n-3}, u_{n+2} „ u_{n+7}.

Setzt man

$$u_{m+z} = u_m + Az + Bz^2$$

und nimmt man nach einander: $z = 5$ und $z = -5$, so ergiebt sich:

$$u_{m+5} = u_m + 5A + 25B,$$
$$u_{m-5} = u_m - 5A + 25B.$$

Löst man hieraus A und B auf, so findet man:

$$A = \tfrac{1}{10}(u_{m+5} - u_{m-5}),\quad B = \tfrac{1}{50}(u_{m+5} + u_{m-5}) - \tfrac{1}{25}u_m,$$

und demzufolge:

$$u_{m+z} = u_m + \tfrac{1}{10}(u_{m+5} - u_{m-5})z + [\tfrac{1}{50}(u_{m+5} + u_{m-5}) - \tfrac{1}{25}u_m]z^2.$$

Setzt man nun: $m + z = n$, und deshalb $m = n - z$, dann ergiebt sich:

$$u_n = u_{n-z} + \tfrac{1}{10}(u_{n-z+5} - u_{n-z-5})z + [\tfrac{1}{50}(u_{n-z+5} + u_{n-z-5}) - \tfrac{1}{25}u_{n-z}]z^2.$$

Setzt man z nach einander $z = -2, -1, +1, +2$, so findet man:

$$u_n = u_{n+2} - \tfrac{2}{10}(u_{n+7} - u_{n-3}) + \tfrac{1}{50}(u_{n+7} + u_{n-3}) - \tfrac{4}{25}u_{n+2},$$
$$u_n = u_{n+1} - \tfrac{1}{10}(u_{n+6} - u_{n-4}) + \tfrac{1}{50}(u_{n+6} + u_{n-4}) - \tfrac{1}{25}u_{n+1},$$
$$u_n = u_{n-1} + \tfrac{1}{10}(u_{n+4} - u_{n-6}) + \tfrac{1}{50}(u_{n+4} + u_{n-6}) - \tfrac{1}{25}u_{n-1},$$
$$u_n = u_{n-2} + \tfrac{2}{10}(u_{n+3} - u_{n-7}) + \tfrac{4}{50}(u_{n+3} + u_{n-7}) - \tfrac{4}{25}u_{n-2},$$

oder:

$$u_n = \tfrac{21}{25}u_{n+2} - \tfrac{3}{25}u_{n+7} + \tfrac{7}{25}u_{n-3},$$
$$u_n = \tfrac{24}{25}u_{n+1} - \tfrac{2}{25}u_{n+6} + \tfrac{3}{25}u_{n-4},$$
$$u_n = \tfrac{24}{25}u_{n-1} + \tfrac{3}{25}u_{n+4} - \tfrac{2}{25}u_{n-6},$$
$$u_n = \tfrac{21}{25}u_{n-2} + \tfrac{7}{25}u_{n+3} - \tfrac{3}{25}u_{n-7}.$$

Nun nimmt man zum corrigirten Wert (z_n) für u_n, den Mittelwert aus den vier berechneten und dem einen beobachteten Wert, und bekommt also die Ausgleichungsformel:

$$125z_n = 25u_n + 24(u_{n+1} + u_{n-1}) + 21(u_{n+2} + u_{n-2}) +$$
$$+ 7(u_{n+3} + u_{n-3}) + 3(u_{n+4} + u_{n-4}) - 2(u_{n+6} + u_{n-6})$$
$$- 3(u_{n+7} + u_{n-7}). \qquad (108)$$

Dies ist die berühmte Formel von **Woolhouse.** Er selbst hat Mittel angegeben, die Anwendung zu vereinfachen, indem er einige Koeffizienten der Formel verteilte, um auf diese Weise zu gemeinschaft-

lichen Koeffizienten mehrerer Glieder zu geraten. Die Anwendung fordert aber immer noch eine ausgebreitete Arbeit.

Es sind indefs andere Vereinfachungen vorgenommen, unter denen wir besonders diejenige von **Ackland** hervorheben wollen.

Bildet man aus der auszugleichenden Zahlenreihe zuerst die Summen von Fünfzahlen, so stellt sich das allgemeine Glied:

$$u_n + (u_{n+1} + u_{n-1}) + (u_{n+2} + u_{n-2}).$$

Geht man mit dieser neuen Reihe in der nämlichen Weise vor, so stellt sich das allgemeine Glied:

$$5\,u_n + 4\,(u_{n+1} + u_{n-1}) + 3\,(u_{n+2} + u_{n-2}) + 2\,(u_{n+3} + u_{n-3}) + (u_{n+4} + u_{n-4}).$$

Wiederholt man dasselbe Verfahren mit dieser dritten Reihe, so stellt sich das allgemeine Glied der neuen Reihe auf:

$$19\,u_n + 18\,(u_{n+1} + u_{n-1}) + 15\,(u_{n+2} + u_{n-2}) + 10\,(u_{n+3} + u_{n-3}) + 6\,(u_{n+4} + u_{n-4}) + 3\,(u_{n+5} + u_{n-5}) + (u_{n+6} + u_{n-6}).$$

Deutet man dieses Resultat an mit $\Sigma_{5,\,5,\,5}$, um anzugeben, dafs dreimal in Fünfzahlen summirt wurde, so geht aus (108) hervor:

$$125\,z_n - \Sigma_{5,\,5,\,5} = 9\,[u_n + (u_{n+1} + u_{n-1}) + (u_{n+2} + u_{n-2})] - 3\,[u_n + (u_{n+1} + u_{n-1}) + (u_{n+2} + u_{n-2}) + (u_{n+3} + u_{n-3}) + (u_{n+4} + u_{n-4}) + (u_{n+5} + u_{n-5}) + (u_{n+6} + u_{n-6}) + (u_{n+7} + u_{n-7})].$$

Deutet man die einmalige Summation in Fünfzahlen an mit Σ_5 und in Fünfzehnzahlen mit Σ_{15}, indem man jedesmal ebensoviel Glieder an beiden Seiten des Gliedes u_n zusammen nimmt, so findet man:

$$125\,z_n - \Sigma_{5,\,5,\,5} = 9\,\Sigma_5 - 3\,\Sigma_{15},$$

und also:

$$125\,z_n = \Sigma_{5,\,5,\,5} + 9\,\Sigma_5 - 3\,\Sigma_{15}. \qquad (109)$$

Hiermit ist die Anwendung von **Woolhouse**'s Formel zurückgeführt auf Additionen und eine darauf folgende Manipulation mit einfachen Koeffizienten.

68. Es versteht sich von selbst, dafs die Anwendung von **Woolhouse**'s Formel auf eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung diese Reihe unverändert lassen würde. Dafs die Glieder, welche sich in gleicher Entfernung von u_n befinden, gleiche Koeffizienten haben, mit anderen Worten, dafs die Formel symmetrisch ist, rührt daher, dafs eine arithmetische Reihe höherer Ordnung eine solche Reihe bleibt, wenn man die Ordnung der Reihe umkehrt, d. h. das erste Glied als letztes und das letzte als erstes annimmt.

Es zeigt sich aber, dafs **Woolhouse**'s Formel nicht nur eine Reihe zweiter, sondern selbst eine Reihe dritter Ordnung unverändert läfst, und

dafs sie also die Reihe in geringerem Maafse abändert, als man glauben könnte.

Wir werden jetzt den Beweis führen, dafs es sich hier nicht handelt um einen Zufall als Folge der Interpolationsmethode. Man kann nämlich folgenden algebraischen Satz beweisen:

Wenn in einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung für jeden Wert von n die Gleichung

$$A u_n = A_1 (u_{n+1} + u_{n-1}) + A_2 (u_{n+2} + u_{n-2}) + A_3 (u_{n+3} + u_{n-3}) + \ldots + \ldots + A_p (u_{n+p} + u_{n-p}) \qquad (110)$$

gilt, so ist dieselbe Relation bei denselben Werten der A auch gültig für eine arithmetische Reihe dritter Ordnung.

Setzt man nämlich in einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung

$$u_{n+1} - u_n = \triangle u_n, \quad \triangle u_{n+1} - \triangle u_n = \triangle^2 u_n, \text{ u. s. w.,}$$

dann ist:

$$u_{n+p} = u_n + p . \triangle u_n + \frac{p(p-1)}{1.2} \triangle^2 u_n + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \triangle^3 u_n + \ldots$$

$$u_{n-p} = u_n - p \triangle u_n + \frac{p(p+1)}{1.2.} \triangle^2 u_n - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3} \triangle^3 u_n + \ldots$$

Durch Addition erhält man:

$$u_{n+p} + u_{n-p} = 2 u_n + p^2 (\triangle^2 u_n - \triangle^3 u_n) + \ldots \qquad (111)$$

Suchen wir die Bedingung, welche die Koeffizienten A erfüllen müssen, damit die Formel (110) für eine arithmetische Reihe höherer Ordnung gilt. Hier wollen wir sie von dritter Ordnung annehmen, sodafs $\triangle^4 u_n$ und die folgenden Differenzen null sind.

Durch Substition von (111) in (110) erhält man:

$$A u_n = 2 (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p) u_n + (A_1 + 4 A_2 + 9 A_3 + \ldots + p^2 A_p) (\triangle^2 u_n - \triangle^3 u_n).$$

Soll also die Gleichung für jedes Glied einer Reihe dritter Ordnung gelten, so müssen die A folgenden Gleichungen genügen:

$$A = 2 (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p) \qquad (112)$$

$$A_1 + 4 A_2 + 9 A_3 + \ldots + p^2 A_p = 0. \qquad (113)$$

Weil nun in der Gleichung (111) $\triangle^2 u_n$ und $\triangle^3 u_n$ denselben Koeffizienten p^2 haben, weshalb sie auch in ein Glied $p^2 (\triangle^2 u_n - \triangle^3 u_n)$ vereinigt werden konnten, so zeigt sich, dafs jede Relation (110), die für die Reihe zweiter Ordnung gilt, zugleich für eine willkürliche Reihe dritter Ordnung gilt.

Sucht man deshalb eine Ausgleichungsformel, die genau ist in den dritten Differenzen, so braucht man nur eine Formel zu finden, die genau ist in den zweiten Differenzen.

Gilt aber blos die Gleichung (112) und nicht (113), so ist die Formel (110) nur gültig für die Reihe erster Ordnung.

Dieser Satz ist aber zu generalisiren. Wenn nämlich die Relation (110) gilt für eine arithmetische Reihe von der Ordnung $2m$, so gilt sie auch für eine Reihe der Ordnung $2m+1$, und der Beweis hierfür ist nicht schwer zu liefern. (Man sehe des Verfassers Abhandlung: „Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums“ in Ehrenzweig's Assecuranz-Jahrbuch, XXII. Jahrgang.)

Die Bedingungen, unter welchen die Gleichung (110) für eine arithmetische Reihe vierter und also auch fünfter Ordnung gilt, sind

$$A = 2(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p),$$
$$1^2 A_1 + 2^2 A_2 + 3^2 A_3 + \ldots + p^2 A_p = 0,$$
$$1^4 A_1 + 2^4 A_2 + 3^4 A_4 + \ldots + p^4 A_p = 0.$$

Soll die Gleichung gelten für eine Reihe siebenter Ordnung, so gesellt sich zu obenstehenden Bedingungen noch folgende:

$$1^6 A_1 + 2^6 A_2 + 3^6 A_4 + \ldots + p^6 A_p = 0, \text{ u. s. w.}$$

Dieser Satz wird gute Dienste leisten zur Vereinfachung des Beweises bei der Ausgleichungsmethode von **Higham.**

69. Dieser Methode liegen folgende Gedanken zu Grunde: Man summire eine arithmetische Reihe dritter Ordnung in je eine gewisse Anzahl aufeinander folgender Glieder; von der neu entstandenen Reihe summire man wieder je eine gewisse Anzahl Glieder u. s. w., und zwar so, dafs bei der letzten Summation eine ungerade Anzahl Glieder der ursprünglichen Reihe vereinigt sind; man thut dies auf zwei verschiedene Weisen, sodafs die Anzahl vereinigter Glieder gleich grofs ist. Man kann eine Relation finden zwischen dem mittelsten Glied der vereinigten Glieder und den beiden Resultaten der Summation. Diese Relation, welche streng gilt für eine Reihe dritter Ordnung, wendet **Higham** als Ausgleichungsformel bei einer gegebenen Reihe an.

Weil wir das mittelste Glied bei beiden Summationen betrachten, so ist es selbstverständlich, dafs die Ausgleichungsmethode zwei Gliedern, welche ebenso weit entfernt sind von dem zu corrigirenden Glied, denselben Einfluſs erteilt und dafs die Methode also zurückzuführen ist zur Anwendung einer Formel nachstehender Form:

$$z_n = p u_n + p_1 (u_{n+1} + u_{n-1}) + p_2 (u_{n+2} + u_{n-2}) + \ldots + p_m (u_{n+m} + u_{n-m}). \qquad (114)$$

Beachtet man dies, so kann man die Formel ableiten aus der Reihe zweiter Ordnung, weil sie dann von selbst gilt für eine Reihe dritter Ordnung.

In einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots$$

sei $S_p\, u_0$ die Summe von p aufeinander folgenden Gliedern, mit u_0 anzufangen, sodafs

$$S_p\, u_0 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1}$$

ist. Es stellt sich sodann

$$S_p\, u_0 = p\, u_0 + \frac{p(p-1)}{1.\ 2}\,\Delta\, u_0 + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1.\ 2.\ 3}\,\Delta^2 u_0 + \ldots,$$

oder symbolisch geschrieben:

$$S_p\, u_0 = \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta}\, u_0.$$

Ebenso bildet man $S_p\, u_1$, $S_p\, u_2$ u. s. w. Die Reihe

$$S_p\, u_0,\ S_p\, u_1,\ S_p\, u_2 \ldots$$

wird wieder summirt und zwar in je q Glieder, und das Resultat angedeutet mit $S_{p,\,q}\, u_0$, sodafs man findet:

$$S_{p,\,q}\, u_0 = S_p\, u_0 + S_p\, u_1 + S_p\, u_2 + \ldots + S_p\, u_{q-1}.$$

Man kann dies wieder schreiben:

$$S_{p,\,q}\, u_0 = \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta}\, u_0,$$

und kann fortfahren. Man findet dann:

$$S_{p,\,q,\,r}\, u_0 = \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^r - 1}{\Delta}\, u_0 \text{ u. s. w.}$$

Geben wir ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
S_5\, u_0 &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4,\\
S_5\, u_1 &= \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5,\\
S_5\, u_2 &= \quad\quad u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
S_5\, u_3 &= \quad\quad\quad u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7,
\end{aligned}$$

hieraus:

$$S_{5,\,4}\, u_0 = u_0 + 2\,u_1 + 3\,u_2 + 4\,u_3 + 4\,u_4 + 3\,u_5 + 2\,u_6 + u_7.$$

Man sieht also, dafs in $S_{5,\,4}\, u_0$ acht Glieder der Reihe vereinigt sind. Ebenso ist

$$S_{5,\,4}\, u_1 = u_1 + 2\,u_2 + 3\,u_3 + 4\,u_4 + 4\,u_5 + 3\,u_6 + 2\,u_7 + u_8,$$

woraus man durch Addition wieder findet:

$$S_{5,4,2}\, u_0 = u_0 + 3u_1 + 5u_2 + 7u_3 + 8u_4 + 7u_5 + 5u_6 + 3u_7 + u_8, \quad (115)$$

worin neun Glieder der Reihe vorkommen. Ebenso ist

$$S_{7,3}\, u_0 = u_0 + 2u_1 + 3u_2 + 3u_3 + 3u_4 + 3u_5 + 3u_6 + 2u_7 + u_8, \quad (116)$$

worin gleichfalls neun Glieder vorkommen.

Sowohl in (115) als in (116) ist das mittelste der aufgenommenen Glieder u_4, und die Koeffizienten der übrigen Glieder sind symmetrisch in Bezug auf u_4.

Wir drucken nun (115) und (116) aus mittels der Differenzen; weil wir aber eine Formel suchen, welche correct ist in zweiten Differenzen, gehen wir nicht weiter als $\Delta^2 u$.

Man findet dann:

$$S_5\, u_0 = 5u_0 + 10\,\Delta u_0 + 10\,\Delta^2 u_0,$$
$$S_4\, u_0 = 4u_0 + 6\,\Delta u_0 + 4\,\Delta^2 u_0,$$

und um $S_{5,4}\, u_0$ zu bilden, haben wir einfach, mit Fortlassung von u_0, S_5 und S_4 zu multipliciren, wobei Δ mit Δ^2 als Zahlen betrachtet werden, und wobei wir Δ^3 und Δ^4 auslassen. Man findet dann:

$$S_{5,4}\, u_0 = 20u_0 + 70\,\Delta u_0 + 120\,\Delta^2 u_0.$$

Beachtet man, dafs $S_2\, u_0 = 2u_0 + \Delta u_0$ ist und multiplicirt man neuerdings, so findet man:

$$\begin{aligned} S_{5,4,2}\, u_0 &= 40\, u_0 + 160\,\Delta u_0 + 310\,\Delta^2 u_0, \\ &= 40\,(u_0 + 4\,\Delta u_0) + 310\,\Delta^2 u_0. \end{aligned} \quad (117)$$

Nachdem

$$S_7\, u_0 = 7u_0 + 21\,\Delta u_0 + 35\,\Delta^2 u_0,$$
$$S_3\, u_0 = 3u_0 + 3\,\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$

findet man:

$$\begin{aligned} S_{7,3}\, u_0 &= 21\, u_0 + 84\,\Delta u_0 + 175\,\Delta^2 u_0, \\ &= 21\,(u_0 + 4\,\Delta u_0) + 175\,\Delta^2 u_0. \end{aligned} \quad (118)$$

Das mittelste der neun Glieder ist

$$u_4 = u_0 + 4\,\Delta u_0 + 6\,\Delta^2 u_0. \quad (119)$$

Man sieht, dafs in (117), (118) und (119) u_0 und Δu_0 in ein Glied $u_0 + 4\,\Delta u_0$ vereinigt werden können; darum genügen die drei Gleichungen, um u_0, Δu_0 und $\Delta^2 u_0$ zu eliminiren.

Bequemlichkeitshalber setzen wir $u_0 + 4\,\Delta u_0 = x$ und $\Delta^2 u_0 = y$. Man findet dann:

$$S_{5,4,2}\, u_0 = 40x + 310y,$$
$$S_{7,3}\, u_0 = 21x + 175y,$$
$$u_4 = x + 6y.$$

Wenn wir die x aus der dritten dieser Gleichungen substituiren in die beiden ersteren, so findet man:

$$S_{5,4,2}\, u_0 = 40u_4 + 70y,\ S_{7,3}\, u_0 = 21u_4 + 49y,$$

und hieraus:

$$\frac{S_{5,4,2}\, u_0 - 40u_4}{70} = \frac{S_{7,3}\, u_0 - 21u_4}{49},$$

woraus folgt:

$$u_4 = \frac{7\, S_{5,4,2}\, u_0 - 10\, S_{7,3}\, u_0}{70}.$$

In gleicher Weise kann man jedes Glied der arithmetischen Reihe zweiter und also auch dritter Ordnung beim vierten Glied anzufangen, ausdrucken in Function einer dreifachen und einer zweifachen Summation von neun Gliedern, worunter das Glied selbst, vier ihm vorangehende und vier ihm folgende Mitglieder; im Allgemeinen wird dies angegeben durch die Formel:

$$u_n = \tfrac{1}{10}\, S_{5,4,2}\, u_{n-4} - \tfrac{1}{7}\, S_{7,3}\, u_{n-4}.$$

Als Ausgleichungsformel findet man dann eine der Formeln von **Higham:**

$$z_n = \tfrac{1}{10}\, S_{5,4,2}\, u_{n-4} - \tfrac{1}{7}\, S_{7,3}\, u_{n-4}.$$

Nach Nr. 67 setzen wir:

$$S_{5,4,2}\, u_{n-4} = \Sigma_{5,4,2}\, u_n,\ S_{7,3}\, u_{n-4} = \Sigma_{7,3}\, u_n.$$

sodafs die Ausgleichungsformel wird:

$$70 z_n = 7\Sigma_{5,4,2}\, u_n - 10\Sigma_{7,3}\, u_n. \qquad (120)$$

Druckt man (120) in den Gliedern der Reihe aus, so findet man:

$$70 z_n = 26u_n + 19(u_{n+1} + u_{n-1}) + 5(u_{n+2} + u_{n-2}) + (u_{n+3} + u_{n-3}) - 3(u_{n+4} + u_{n-4}).$$

Man sieht also, dafs die Methode daher möglich ist, weil in den Formeln (117), (118) und (119) die Glieder u_0 und $\triangle u_0$ in ein Glied $u_0 + 4 \triangle u_0$ vereinigt werden können. Es mufs jetzt noch demonstrirt werden, dafs dies nicht irgend einem besonderen Umstande zuzuschreiben ist, welcher etwa durch die gewählte Anzahl Glieder, worin summirt wird, hervorgerufen werden kann.

Wir beabsichtigen zu diesem Zwecke das Resultat $S_{p_1 p_2 p_3 \ldots p_n}\, u_0$ zu bilden; in der letzten Summation sind dann aufgenommen:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n - (n-1)$$

Glieder der gegebenen Reihe, wenn die Anzahl der Zahlen $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n = n$ ist. Man findet

$$S_{p_1} u_0 = p_1 u_0 + \tfrac{1}{2} p_1 (p_1 - 1) \triangle u_0 + ..$$
$$S_{p_2} u_0 = p_2 u_0 + \tfrac{1}{2} p_2 (p_2 - 1) \triangle u_0 + ..$$

Man multiplicirt und findet dann:

$$S_{p_1 p_2} u_0 = p_1 p_2 [u_0 + \tfrac{1}{2} (p_1 + p_2 - 2) \triangle u_0 + \ldots].$$

Weiter

$$S_{p_1 p_2 p_3} u_0 = p_1 p_2 p_3 [u_0 + \tfrac{1}{2} (p_1 + p_2 + p_3 - 3) \triangle u_0 + \ldots]$$

und allgemein

$$S_{p_1 p_2 p_3 \ldots p_n} u_0 = p_1 p_2 p_3 .. p_n [u_0 + \tfrac{1}{2} (p_1 + p_2 + p_3 + .. + p_n - n) \triangle u_0 + ..].$$

Es können p und n derart gewählt werden, dafs die Anzahl der aufgenommenen Glieder

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n + n - 1$$

ungerade ist. Weil nun das erste Glied von der Ordnung 0 ist, ist das mittelste Glied von der Ordnung:

$$\tfrac{1}{2} (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n - n),$$

und läfst sich also wie folgt schreiben:

$$u_0 + \tfrac{1}{2} (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n - n) \triangle u_0.$$

Es kommen deshalb sowohl in dem Ausdruck für das mittelste Glied als in $S_{p_1 p_2 p_3 \ldots p_n}$ die Zahlen u_0 und $\triangle u_0$ vereinigt vor in nachstehender Form:

$$u_0 + \tfrac{1}{2} (p_1 + p_2 + p_3 + .. + p_n - n) \triangle u_0.$$

Hiermit erscheint die allgemeine Anwendbarkeit der Methode als erwiesen.

Ein sehr einfaches Beispiel der Methode von **Higham** bildet die Formel:

$$30 z_n = 3 \Sigma_{5,5} u_n - 5 \Sigma_9 u_n.$$

Interessante Beispiele sind auch die Formeln:

$$z_n = \frac{64 \Sigma_{5,5,5,5} u_n}{10000} - \frac{4 \Sigma_{5,5,9}}{300} \qquad (120^*)$$

und

$$125 z_n = 2 \Sigma_{5,5,5,4,2} u_n - 3 \Sigma_{5,5,5,5} u_n. \qquad (120^{**})$$

Es ist ausdrücklich zu bemerken, dafs das Verdienst der Methode von **Higham** darin liegt, dafs sie in der natürlichsten Weise zu einer einfachen Manipulation führt. Übrigens ist es ein unbestimmtes Problem, jede Formel der Form (110) in Summen und in Summen von Summen auszudrücken.

70. In einer Abhandlung: Über eine neue mechanische Ausgleichungsmethode, dem Londoner Kongreſs angeboten von Prof. Dr. Johannes **Karup** (Transactions of the Second International Actuarial Congress), nimmt dieser im Anfang eine Ausgleichung vor, welche er als eine vorläufige betrachtet. Wie **Woolhouse** geht Dr. **Karup** von Interpolation aus, wobei er aber die Methode von Dr. **Sprague** in Anwendung bringt.

Man will zwischen den als bekannt vorausgesetzten Gliedern u_0 und u_5 einer gegebenen Reihe die Glieder u_1, u_2, u_3 und u_4 interpoliren, und dabei die Glieder u_{-5} und u_{10} benutzen.

Man denke sich die u als Ordinaten, indem die Indices die zugehörigen Abscissen sind.

Nun kann man durch die Endpunkte von u_0 und u_5 eine parabolische Curve legen; diese Curve soll aber im Punkte u_0 dieselbe Tangente haben als die parabolische Curve zweiten Grades, welche durch die Endpunkte von u_{-5}, u_0 und u_5 gelegt wird. Ebenso soll die Curve im Punkte u_5 dieselbe Tangente haben als die parabolische Curve zweiten Grades, welche durch die Punkte u_0, u_5 und u_{10} gelegt werden kann.

Die gesuchte Curve soll also durch u_0 und u_5 gehen und in diesen Punkten eine bestimmte Tangente haben, worin wir vier Bedingungen haben; die Curve kann deshalb eine parabolische Curve dritten Grades sein. Die Gleichung dieser Curve sei:

$$u_x = u_0 + Ax + Bx^2 + Cx^3, \qquad (121)$$

worin A, B und C unbekannt sind.

Weil die Curve durch den Punkt u_5 gehen soll, ist:

$$u_5 = u_0 + 5A + 25B + 125C$$

und also:

$$5A + 25B + 125C = u_5 - u_0.$$

Die parabolische Curve, welche durch u_{-5}, u_0 und u_5 bestimmt wird, hat zur Gleichung:

$$u_z = u_0 + az + bz^2,$$

worin a und b gefunden werden sollen. Weil die Curve durch die Punkte u_{-5} und u_0 geht, können wir zur Bestimmung von a und b nachstehende Gleichungen verwenden:

$$u_{-5} = u_0 - 5a + 25b,$$
$$u_5 = u_0 + 5a + 25b,$$

woraus hervorgeht:

$$a = \frac{u_5 - u_{-5}}{10}.$$

Die Richtung der Tangente an einem willkürlichen Punkte dieser Curve wird bestimmt durch

$$\frac{du_z}{dz} = a + 2bz.$$

Im Punkte u_0 ist die Richtung dieser Tangente gegeben durch

$$\left(\frac{du_z}{dz}\right)_{z=0} = a.$$

Die Richtung der Tangente an einem willkürlichen Punkte der Curve (121) wird bestimmt durch

$$\frac{du_x}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2. \qquad (122)$$

Im Punkte u_0 stellt sich dies wie folgt:

$$\left(\frac{du_x}{dx}\right)_{x=0} = A.$$

Weil nun $\left(\frac{du_x}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{du_z}{dz}\right)_{z=0}$ sein soll, so finden wir $A = a$, und deshalb:

$$A = \frac{u_5 - u_{-5}}{10}. \qquad (123)$$

Im Punkte u_5 wird die Richtung der Tangente der Curve (121) bestimmt durch

$$\left(\frac{du_x}{dx}\right)_{x=5} = A + 10B + 75C.$$

Die Richtung der Tangente im Punkte u_5 an der parabolischen Curve zweiten Grades, welche durch die Punkte u_0, u_5 und u_{10} gelegt wird, wird bestimmt durch

$$\frac{u_{10} - u_0}{10},$$

was aus (123) sogleich hervorgeht, wenn man darin die Indices mit 5 erhöht.

Man findet demnach:

$$A + 10B + 75C = \frac{u_{10} - u_0}{10}.$$

Zur Bestimmung von B und C liegen also nachstehende Gleichungen vor:

$$B + 5C = \frac{u_5 - 2u_0 + u_{-5}}{50},$$

$$2B + 15C = \frac{u_{10} - u_5 - u_0 + u_{-5}}{50},$$

woraus hervorgeht:

$$B = \frac{-u_{10} + 4u_5 - 5u_0 + 2u_{-5}}{50},$$

$$C = \frac{u_{10} - 3u_5 + 3u_0 - u_{-5}}{250}.$$

Die Gleichung der Curve (121) ist also:

$$u_x = u_0 + \frac{u_5 - u_{-5}}{10}x + \frac{-u_{10} + 4u_5 - 5u_0 + 2u_{-5}}{50}x^2,$$
$$+ \frac{u_{10} - 3u_5 + 3u_0 - u_{-5}}{250}x^3.$$

Ordnet man die Formel nach den verschiedenen u, so gestaltet sich dieselbe wie folgt:

$$u_x = -\frac{x(x-5)^2}{250}u_{-5} + \frac{3x^3 - 25x^2 + 250}{250}u_0 +$$
$$+ \frac{25x + 20x^2 - 3x^3}{250}u_5 + \frac{x^3 - 5x^2}{250}u_{10}.$$

Erhöht man alle Indices mit $n - x$, so kommt:

$$250\,u_n = -x(x-5)^2 u_{n-x-5} + (3x^3 - 25x^2 + 250)\,u_{n-x} +$$
$$+ (25x + 20x^2 - 3x^3)\,u_{n-x+5} + (x^3 - 5x^2)\,u_{n-x+10}. \quad (124)$$

Setzt man in dieser Formel nach einander $x = 1, 2, 3, 4, 5$, so findet man für $250\,u_n$ die folgenden Ausdrücke:

$$-16\,u_{n-6} + 228\,u_{n-1} + 42\,u_{n+4} - 4\,u_{n+9},$$
$$-18\,u_{n-7} + 174\,u_{n-2} + 106\,u_{n+3} - 12\,u_{n+8},$$
$$-12\,u_{n-8} + 106\,u_{n-3} + 174\,u_{n+2} - 18\,u_{n+7},$$
$$-4\,u_{n-9} + 42\,u_{n-4} + 228\,u_{n+1} - 16\,u_{n+6},$$
$$250\,u_n.$$

Stellt man nun als corrigirten Wert für u_n (z_n) den mittleren Wert aus obenstehenden Ausdrücken und dividirt man mit 2, so findet man zur Ausgleichungsformel:

$$625\,z_n = 125\,u_n + 114\,(u_{n+1} + u_{n-1}) + 87\,(u_{n+2} + u_{n-2}) +$$
$$+ 53\,(u_{n+3} + u_{n-3}) + 21\,(u_{n+4} + u_{n-4}) -$$
$$- 8\,(u_{n+6} + u_{n-6}) - 9\,(u_{n+7} + u_{n-7}) -$$
$$- 6\,(u_{n+8} + u_{n-8}) - 2\,(u_{n+9} + u_{n-9}). \quad (125)$$

Diese von **Karup** herrührende Formel ist ebenso als diejenigen von **Woolhouse** und **Higham**, correct bis in dritten Differenzen, sodafs die Anwendung eine arithmetische Reihe dritter Ordnung unverändert läfst.

71. Die Formeln von **Finlaison, Woolhouse, Higham** und **Karup** können alle betrachtet werden als specielle Fälle der allgemeinen Ausgleichungsformel (114).

Man kann so viele Formeln dieser Art, welche eine arithmetische Reihe gegebener Ordnung unverändert lassen, bilden als man eben wünscht.

Soll die Reihe erster Ordnung unverändert bleiben, so gilt die einzige Bedingung:

$$p + 2p_1 + 2p_2 + \ldots + 2p_m = 1.$$

Soll die Reihe dritter Ordnung unverändert bleiben, so gilt die zweite Bedingung:

$$p_1 + 2^2 p_2 + 3^2 p_3 + \ldots + m^2 p_m = 0.$$

Soll die Reihe fünfter Ordnung unverändert bleiben, so gilt die dritte Bedingung:

$$p_1 + 2^4 p_2 + 3^4 p_3 + \ldots + m^4 p_m = 0$$

u. s. w.

Die Formel (114) enthält $2m+1$ Glieder der Reihe u und diese kann man stets als Glieder einer arithmetischen Reihe der Ordnung $2m$ betrachten.

Die höchste Ordnung der arithmetischen Reihe, welche durch Anwendung der Ausgleichungsformel unverändert bleiben kann, ist also $2m - 1$.

Es wird die eine Formel eine Reihe viel mehr abändern als die andere; es ist deshalb zulässig, von der Abrundungskraft einer Ausgleichungsformel zu sprechen.

Diese Abrundungskraft hängt von mehreren Umständen ab; im Allgemeinen kann man sagen, dafs die Abrundungskraft vermehrt, in demselben Maafse als mehr Glieder der Reihe aufgenommen werden und die Ordnung der arithmetischen Reihe, welche unverändert bleibt, sich niedriger stellt.

Man kann aber ein bestimmtes Maafs für die Gröfse der Abrundungskraft finden.

Setzt man den mittleren Fehler der Gröfsen u_1, u_2, u_3, u_4 u. s. w. der Einheit gleich und bildet man die Zahl

$$z = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + k_4 u_4 + \ldots,$$

so ist der mittlere Fehler von z:

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + \ldots}$$

Also ist der mittlere Fehler der z_n in der Formel (114)

$$\sqrt{p^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 + \ldots + 2p_m^2}. \qquad (126)$$

Sollte man nun eine Formel bilden, wobei der mittlere Fehler gröfser als die Einheit ist, so hätte man eine sehr unzweckmäfsige Wahl der Koeffizienten getroffen; denn man hätte die Reihe nicht verbessert, sondern die Unregelmäfsigkeiten vergröfsert. Der mittlere Fehler soll nämlich kleiner als die Einheit sein, und je kleiner derselbe ist, um so gröfser ist die Abrundungskraft der Formel; dieses Prinzip dürfen wir als Axiom annehmen.

Es ist daher nicht ohne Bedeutung, die mittleren Fehler verschiedener Formeln zu berechnen.

Dieser mittlere Fehler stellt sich in

Formel	(106)	von **Finlaison**	auf 0.447,
„	(108)	„ **Woolhouse**	„ 0.423,
„	(120**)	„ **Higham**	„ 0.413,
„	(125)	„ **Karup**	„ 0.404.

Prof. **Dr. D. J. Korteweg** hat mir den Gedanken nahe gelegt, die Koeffizienten p derart zu bestimmen, dafs die Formel (114) in z_n einen möglichst kleinen mittleren Fehler zurückläfst. Hat man einmal die Wahl der Anzahl der in die Formel aufzunehmenden Glieder und der Ordnung der arithmetischen Reihe, welche die Formel unverändert lassen soll, getroffen, so hört hiermit jede Willkür auf und ist die Ausgleichungsformel unzweideutig bestimmt.

Wir werden jetzt eine Formel bilden u. z. mit dem vollständigen Beweis derselben.

Wir wünschen also eine Ausgleichungsformel in der Form:

$$z_n = p\,u_n + p_1\,(u_{n+1} + u_{n-1}) + p_2\,(u_{n+2} + u_{n-2}), \qquad (127)$$

zu finden, welche eine Reihe dritter Ordnung unverändert liefse, sodafs für die p nachstehende Bedingungen gelten müssen:

$$\left.\begin{aligned} \psi &\equiv p + 2p_1 + 2p_2 - 1 = 0, \\ \psi_1 &\equiv p_1 + 4p_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

Der mittlere Fehler von z_n:

$$\sqrt{p^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2}$$

soll so klein wie möglich, d. h.

$$\varphi = p^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 \qquad (129)$$

soll ein Minimum sein.

Nach der Theorie des Minimums mit Nebenbedingungen soll

$$\varphi + k\,\psi + k_1\,\psi_1$$

ein absolutes Minimum werden, worin die k noch unbestimmte Zahlen vorstellen. Hierzu ist erforderlich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial p} + k\,\frac{\partial \psi}{\partial p} + k_1\,\frac{\partial \psi_1}{\partial p} &= 0,\\
\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + k\,\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + k_1\,\frac{\partial \psi_1}{\partial p_1} &= 0,\\
\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + k\,\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + k_1\,\frac{\partial \psi_1}{\partial p_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Wenn man (128) und (129) beachtet, folgt aus diesen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
2p + k &= 0\\
4p_1 + 2k + k_1 &= 0\\
4p_2 + 2k + 4k_1 &= 0
\end{aligned}\right\}. \qquad (130)$$

Es werden nun die fünf Unbekannten p, p_1, p_2, k und k_1 bestimmt aus den fünf Gleichungen (128) und (130).

Man findet dann: $p = \frac{17}{35}$, $p_1 = \frac{12}{35}$, $p_2 = -\frac{3}{35}$, sodafs sich die Ausgleichungsformel wie folgt gestaltet:

$$35\,z_n = 17\,u_n + 12\,(u_{n+1} + u_{n-1}) - 3\,(u_{n+2} + u_{n-2}). \qquad (131)$$

Der mittlere Fehler von z_n ist: $\sqrt{\frac{17}{35}} = 0.697$.

Dieser mittlere Fehler ist nicht sehr klein, die Abrundungskraft der Formel ist daher nicht grofs, sie ist viel geringer als die der Formel (106) von **Finlaison,** obgleich beide ebenso viele Glieder der Reihe aufnehmen. In beiden Formeln ist der mittlere Fehler ein Minimum, aber (106) ist genau in ersten Differenzen, (131) in dritten Differenzen. Daraus erklärt sich die geringere Abrundungskraft letzterer Formel, welche nur da anzuwenden wäre, wo sich geringe Unregelmäfsigkeiten zeigen.

Die Formeln in der Form (114) sind natürlich nicht verwendbar für die Anfangs- und Endglieder der Reihe.

Wir werden jetzt zeigen, wie man bei diesen Gliedern vorgehen kann. Man soll zu diesem Zwecke Formeln zu finden suchen, wobei das auszugleichende Glied nicht mehr das mittelste der in die Formel aufgenommenen Glieder ist. Es bleibt aber wünschenswert, auf die eine Seite nie mehr Glieder aufzunehmen als in der Hauptformel.

Es sei u_{x-1} das erste Glied der Reihe, und u_x auszugleichen. Wir können dann eine symmetrische Formel nicht mehr benutzen, weil auf die eine Seite von u_x zwei und auf die andere Seite nur ein Glied aufgenommen wird, wenn die symmetrische Formel fünf Glieder enthält.

Wir benutzen also die Formel:

$$z_x = p_{-1}\, u_{x-1} + p\, u_x + p_1\, u_{x+1} + p_2\, u_{x+2}. \qquad (132)$$

Weil vier Glieder der Reihe aufgenommen werden, können wir eine Formel bilden, welche die Reihe zweiter Ordnung unverändert läfst.

Es ist

$$u_{x+n} = u_x + n\,\Delta + \frac{n\,(n-1)}{2}\,\Delta_2,$$

also:

$$\begin{aligned} u_{x-1} &= u_x - \Delta + \Delta_2, \\ u_x &= u_x, \\ u_{x+1} &= u_x + \Delta, \\ u_{x+2} &= u_x + 2\Delta + \Delta_2. \end{aligned}$$

Substituirt man in (132), so kommt:

$$z_x = (p_{-1} + p + p_1 + p_2)\,u_x + (-p_{-1} + p_1 + 2p_2)\,\Delta + (p_{-1} + p_2)\,\Delta_2.$$

Soll nun die Reihe zweiter Ordnung unverändert bleiben, so werden die p nachstehenden drei Bedingungen unterworfen:

$$\left.\begin{aligned} p_{-1} + p + p_1 + p_2 &= 1 \\ -p_{-1} + p_1 + 2p_2 &= 0 \\ p_{-1} + p_2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (133)$$

Der mittlere Fehler von (132)

$$\sqrt{p_{-1}^2 + p^2 + p_1^2 + p_2^2}$$

und daher auch $p_{-1}^2 + p^2 + p_1^2 + p_2^2$ mufs auf ein Minimum gestellt werden. Aus den drei Gleichungen (133) geht hervor:

$$p = 1 + 3p_2,\ p_1 = -3p_2,\ p_{-1} = -p_2.$$

Es soll also

$$p_2^2 + (1 + 3p_2)^2 + 9p_2^2 + p_2^2 = 1 + 6p_2 + 20p_2^2$$

ein Minimum werden. Es ist dies der Fall, wenn man

$$6 + 40p_2 = 0,\ \text{also}\ p_2 = -\tfrac{3}{20}$$

stellt. Hieraus geht hervor:

$$p_{-1} = \tfrac{3}{20},\ p = \tfrac{11}{20},\ p_1 = \tfrac{9}{20},$$

und die Ausgleichungsformel gestaltet sich wie folgt:

$$20\, z_x = 3\, u_{x-1} + 11\, u_x + 9\, u_{x+1} - 3\, u_{x+2}. \qquad (134)$$

Der mittlere Fehler ist:

$$\sqrt{\tfrac{11}{20}} = 0.742.$$

Ist u_x das erste Glied der Reihe, und soll dasselbe ausgeglichen werden, so benutze man die Formel:

$$z_x = p\, u_x + p_1\, u_{x+1} + p_2\, u_{x+2}. \qquad (135)$$

Es kann nun aber blos eine Reihe erster Ordnung unverändert bleiben; die Bedingungen für die p sind dann erstens:

$$\left.\begin{aligned} p + p_1 + p_2 &= 1 \\ p_1 + 2p_2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (136)$$

$p^2 + p_1^2 + p_2^2$ soll auf ein Minimum gestellt werden; nun folgt aus (136): $p_1 = -2\,p_2$, $p = 1 + p_2$. Es soll also

$$(1 + p_2)^2 + 4p_2^2 + p_2^2 = 1 + 2p_2 + 6p_2^2;$$

auf ein Minimum gestellt werden. Es ist dies der Fall, wenn man $2 + 12p_2 = 0$ stellt; es ist also $p_2 = -\frac{1}{6}$ und ferner $p_1 = \frac{1}{3}$, $p = \frac{5}{6}$.

Die Ausgleichungsformel ist also:

$$6\, z_x = 5\, u_x + 2\, u_{x+1} - u_{x+2}, \qquad (137)$$

deren mittlerer Fehler ist

$$\sqrt{\tfrac{5}{6}} = 0.913.$$

Die Abrundungskraft der Formel (134) und besonders diejenige der Formel (137) ist klein. Die Formeln (131), (134) und (137) sind zum Zwecke gebildet, um Beispiele zu geben von der Berechnungsweise. Wir haben nach demselben Prinzip mehrere Formeln gebildet, in welche eine gröfsere Anzahl Glieder aufgenommen ist und die deshalb gröfsere Abrundungskraft besitzen.

Wir finden z. B. folgende Formel, welche ebensoviele Glieder aufgenommen sind als diejenige von **Karup**:

$$\begin{aligned} 2261\, z_n = {} & 269\, u_n + 264\,(u_{n+1} + u_{n-1}) + 249\,(u_{n+2} + u_{n-2}) + \\ & + 224\,(u_{n+3} + u_{n-3}) + 189\,(u_{n+4} + u_{n-4}) + \\ & + 144\,(u_{n+5} + u_{n-5}) + 89\,(u_{n+6} + u_{n-6}) + \\ & + 24\,(u_{n+7} + u_{n-7}) - 51\,(u_{n+8} + u_{n-8}) - \\ & - 136\,(u_{n+9} + u_{n-9}), \end{aligned} \qquad (138)$$

worin der mittlere Fehler sich stellt auf

$$\sqrt{\tfrac{2869}{12261}} = 0.345.$$

Setzt man diesen mittleren Fehler neben denjenigen der **Karup**'schen Formel, so tritt der Einfluſs des Minimums deutlich ans Licht. Sollte man das Verfahren mit den Koeffizienten der Formel (138) zu beschwerlich finden, so liegt keine Beschwerde dagegen vor, diese Koeffizienten auf decimale Brüche in z. B. drei Decimalen zu reduciren. Das wird der Genauigkeit auch darum nicht schaden, weil die abzurundenden Gröſsen, — hier die Sterbenswahrscheinlichkeiten — selbst nur in einer sehr begrenzten Anzahl Decimalen, z. B. eine Fünfzahl, angegeben werden.

Als ein Beispiel des Einflusses, welchen die Bedingung, daſs eine Reihe höherer Ordnung durch die Formel unverändert bleibe, übt, ist hier eine nach der Minimummethode zusammengestellte Formel aufgenommen, welche ebenso viele Glieder aufnimmt als (138), aber eine arithmetische Reihe fünfter Ordnung unverändert läſst; diese Formel ist:

$$\begin{aligned} 7429\, z_n = {} & 1393\, u_n + 1320\,(u_{n+1} + u_{n-1}) + \\ & + 1110\,(u_{n+2} + u_{n-2}) + 790\,(u_{n+3} + u_{n-3}) + \\ & + 405\,(u_{n+4} + u_{n-4}) + 18\,(u_{n+5} + u_{n-5}) - \\ & - 290\,(u_{n+6} + u_{n-6}) - 420\,(u_{n+7} + u_{n-7}) - \\ & - 255\,(u_{n+8} + u_{n-8}) + 340\,(u_{n+9} + u_{n-9}) \end{aligned} \qquad (139)$$

deren mittlerer Fehler sich auf

$$\sqrt{\tfrac{1393}{74249}} = 0.433,$$

stellt, sodaſs die abrundende Kraft der Formel (139), obgleich sie soviele Glieder aufnimmt, geringer ist als diejenige der Formeln (108), (120**) und (125) und nur wenig gröſser als diejenige der Formel (106). Dies rührt von der höheren Ordnung der Reihe, welche die Formel unverändert läſst, her.

Der Bau der Minimumformeln ist sehr regelmäſsig, denn wie sich leicht beweisen läſst, bilden die Koeffizienten p eine arithmetische Reihe höherer Ordnung, u. z. in (134) und (138) der zweiten, in (139) der vierten Ordnung.

Beiläufig möge hier ein merkwürdiger Satz Erwähnung finden, welchen es dem Verfasser gelungen ist im oben citirten Artikel: Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums zu beweisen. Der Satz lautet folgendermaaſsen:

Für die besonderen Werte von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, welche die Bedingung

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$$

und eine oder mehrere Bedingungen von der Form:

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + .. + a_n \alpha_n = 0$$

erfüllen und welche

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_n^2$$

zu einem Minimum machen, ist

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + .. + \alpha_n^2 = \alpha_0.$$

Dieser Satz hat dem Verfasser bereits gute Dienste geleistet.

72. Die Anwendung einer Ausgleichungsformel von der Form (114)

$$z_n = p\,u_n + p_1 (u_{n+1} + u_{n-1}) + p_2 (u_{n+2} + u_{n-1}) + \ldots + p_m (u_{n+m} + u_{n-m})$$

kann man auch betrachten als eine Correctur, welche das Glied u_n untergeht. Sei diese Correctur $z_n - u_n = k_n$, so ist

$$k_n = (p-1)\,u_n + p_1 (u_{n+1} + u_{n-1}) + p_2 (u_{n+2} + u_{n-2}) + \ldots + p_m (u_{n+m} + u_{n-m}).$$

Setzen wir wie gewöhnlich

$$u_{n+1} - u_n = \Delta u_n,\ u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1},$$
$$u_{n+2} - u_{n+1} = \Delta u_{n+1},\ \text{u. s. w.}$$
$$\Delta u_{n+1} - \Delta u_n = \Delta^2 u_n,\ \Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1},$$

so ist es unschwer zu beweisen, dafs

$$k_n = [p + 2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_m) - 1]\,u_n + \alpha_1 \Delta^2 u_{n-1} + \alpha_2 (\Delta^2 u_n + \Delta^2 u_{n-2}) + \alpha_3 (\Delta^2 u_{n+1} + \Delta^2 u_{n-3}) + \ldots + \alpha_m (\Delta^2 u_{n+m-2} + \Delta^2 u_{n-m}).$$

Ist die Formel (114) wenigstens in ersten Differenzen genau, so ist

$$p + 2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_m) = 1,$$

und reducirt sich die Correctur k_n auf

$$k_n = \alpha_1 \Delta^2 u_{n-1} + \alpha_2 (\Delta^2 u_n + \Delta^2 u_{n-2}) + \alpha_3 (\Delta^2 u_{n+1} + \Delta^2 u_{n-3}) + \ldots + \alpha_m (\Delta^2 u_{n+m-2} + \Delta^2 u_{n-m}). \qquad (140)$$

Hierin sind die α lineäre Functionen der Koeffizienten p.

Man kann leicht folgenden Satz beweisen.

Jede Correctionsformel in der Form (140), welche eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung unverändert läfst,

läfst auch eine solche Reihe dritter Ordnung unverändert, und die Bedingung, welcher die α dazu unterworfen werden sollen, ist

$$\alpha_1 + 2(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_m) = 0. \qquad (141)$$

Umgekehrt kann jede Correctionsformel in der Form (140), worin die α die Bedingung (141) erfüllen, umgesetzt werden in eine Ausgleichungsformel (114), welche eine arithmetische Reihe dritter Ordnung unverändert läfst.

(Man sehe des Verfassers Abhandlung im holländischen „Archief voor de Verzekerings-Wetenschap" IV. Teil: Afronding van Sterftecijfers zonder een wet van afsterving ten grondslag te leggen.)

Ein einziges Beispiel erscheint nicht überflüssig. Wenn eine schon ausgeglichene Reihe noch einzelne kleine Unregelmäfsigkeiten zeigte, wurde von **Woolhouse** die Correcturformel

$$k_n = \tfrac{1}{6}[2\,\Delta^2 u_{n-1} - (\Delta^2 u_n + \Delta^2 u_{n-2})] \qquad (142)$$

verwendet, welche die Reihe dritter Ordnung unverändert läfst. Diese Formel werden wir in eine Ausgleichungsformel umsetzen und zu diesem Zwecke substituiren:

$$\Delta^2 u_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1},$$
$$\Delta^2 u_n + \Delta^2 u_{n-2} = 2u_n - 2(u_{n+1} + u_{n-1}) + (u_{n+2} + u_{n-2}).$$

Man findet dann:

$$6k_n = -6u_n + 4(u_{n+1} + u_{n-1}) - (u_{n+2} + u_{n-2}).$$

Weil nun $6z_n = 6u_n + 6k_n$ ist, so stellt sich die Ausgleichungsformel wie folgt:

$$6z_n = 4(u_{n+1} + u_{n-1}) - (u_{n+2} + u_{n-2}). \qquad (143)$$

Diese Formel räumt also dem auszugleichenden Glied u_n gar keinen Einfluſs ein, was eben als ihre schwache Seite zu betrachten ist. Die Abrundungskraft ist ebenfalls gering, denn der mittlere Fehler beträgt

$$\sqrt{\tfrac{34}{36}} = 0.972.$$

Wie man systematisch von Differenzen zu Summationen kommt, läfst sich aus Prof. **Karup**'s oben genannter Abhandlung ersehen.

Noch ist zu bemerken, daſs man eine der vorgenannten Methoden mit groſsem Erfolg auf die Logarithmen der Sterbenswahrscheinlichkeiten statt auf letztere selbst anwenden könnte, wobei man von der Annahme ausgehen würde, daſs eine gewisse Anzahl Glieder der Reihe der Sterbenswahrscheinlichkeiten sich einer geometrischen Reihe höherer

oder niederer Ordnung nähert. Hierbei würde die Anwendung von **Finlaison**'s Formel in vielen Fällen geeignet erscheinen.

73. Wenn von Ausgleichung von Sterblichkeitstafeln die Rede ist, darf die Methode von **Dr. Ph. Fischer** nicht unerwähnt bleiben (Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens). Derselbe corrigirt die Sterbenswahrscheinlichkeiten auf graphischem Wege und gleicht dann die bereits corrigirten Zahlen durch Rechnung aus, ohne irgend ein Gesetz vorauszusetzen.

Wenn die Differenz von u_n und anderen Gliedern der Reihe u bekannt wäre, so würde u_n sogleich aus diesen anderen Gliedern hervorgehen.

Bildet man nun durch graphische Ausgleichung eine corrigirte Reihe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \cdots$$

so kann man $y_{n+m} - y_n = v_m$ als einen Näherungswert für die unbekannte Differenz betrachten; es stellt sich dann:

$$y_n = y_{n+m} - v_m.$$

Man hat also in $u_{n+m} - v_m$ einen neuen Wert für u_n gefunden.

Bilden wir nun die Differenzen:

$$\begin{aligned} y_{n-2} - y_n &= v_{-2}, \\ y_{n-1} - y_n &= v_{-1}, \\ y_{n+1} - y_n &= v_1, \\ y_{n+2} - y_n &= v_2, \end{aligned}$$

so findet man vier neue Werte für u_n, nämlich

$$\begin{aligned} u_{n-2} - v_{-2}, \\ u_{n-1} - v_{-1}, \\ u_{n+1} - v_1, \\ u_{n+2} - v_2. \end{aligned}$$

Nimmt man zum corrigirten Wert für u_n (z_n) das arithmetische Mittel zwischen diesen vier Werten und das wahrgenommene u_n, so findet man als Ausgleichungsformel

$$z_n = \tfrac{1}{5}(u_{n-2} + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2}) - \tfrac{1}{5}(v_{-2} + v_{-1} + v_1 + v_2). \quad (144)$$

Fischer giebt indefs bei der Berechnung den verschiedenen Werten der u_n ein Gewicht, welches der Quadratwurzel aus der Anzahl auf jedem Alter wahrgenommenen Lebenden gleich kommt; wir bezweifeln aber die Genauigkeit dieses Gewichtes und wenn die Alter nicht zu weit auseinander liegen, wird der Fehler nicht grofs, wenn man, wie wir gethan haben, die Gewichte gleich grofs nimmt.

Fischer nimmt als Regel zehn Glieder in seine Formel auf, und erteilt den Rat, die Methode zu wiederholen, wenn die ausgeglichene Reihe noch zu unregelmäfsig sein sollte. (Man sehe die oben citirte Inaugural-Dissertation des **Dr. J. P. Janse**.)

Wir haben uns auf fünf Glieder beschränkt, auch um den Unterschied mit der Formel von **Finlaison** ans Licht treten zu lassen.

Wenn die Glieder

$$y_{n-2},\ y_{n-1},\ y_n,\ y_{n+1},\ y_{n+2}$$

eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden würde, so wäre

$$v_{-2} + v_{-1} + v_{+1} + v_{+2} = 0$$

und die Formel (144) ginge in **Finlaison**'s Formel über. Es bestätigt dies die Berechnung letzterer Formel.

74. Die nach einer der vorangehenden Methoden ausgeglichene Zahlenreihe hat einen mehr und weniger regelmäfsigen Verlauf, aber ist keinem bestimmten Gesetz unterworfen. Hingegen ist dies wohl der Fall bei der analytischen Methode. So könnte man z. B. dafür sorgen, dafs die ausgeglichene Reihe eine arithmetische oder auch eine geometrische Reihe höherer Ordnung bilden würde. Viele Sterblichkeitstafeln wurden nach dieser analytischen Methode ausgeglichen mittels der Formel von **Makeham**.

Wir werden aber einen etwas anderen Weg einschlagen; wir werden nämlich die beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten derart corrigiren, dafs die ersten Differenzen derselben, nach der Ausgleichung, eine geometrische Reihe bilden.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen wird dann durch die Formel

$$q_x = a + b\,r^x$$

angedeutet, worin a, b und r Constanten sind, die aus den beobachteten Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden müssen.

Es genügen offenbar zur näherungsweisen Bestimmung von a, b und r drei beobachtete Sterbenswahrscheinlichkeiten, wozu man zweckmäfsig drei Altersstufen wählt, je eine ungefähr am Anfang, in der Mitte und am Ende der Tafel. Am besten trifft man die Wahl so, dafs eine Altersstufe gerade die Mitte ist zwischen den beiden anderen, doch ist es nicht ratsam, eine Altersstufe zu wählen, deren beobachtete Sterbenswahrscheinlichkeit allzusehr von den zunächst liegenden abweicht. Besser noch verfährt man so: wir wollen a, b und r aus den Altersstufen 21, 51 und 81 berechnen, aber nicht unmittelbar aus den be-

obachteten q'_{21}, q'_{51} und q'_{81}, sondern, wie dies auch **Wittstein** thut in seinem Werke: Das mathematische Gesetz der menschsichen Sterblichkeit, aus den verbesserten Werten:

$$q''_{21} = \tfrac{1}{3}(q'_{20} + q'_{21} + q'_{22}),$$
$$q''_{51} = \tfrac{1}{3}(q'_{50} + q'_{51} + q'_{52}),$$
$$q''_{81} = \tfrac{1}{3}(q'_{80} + q'_{81} + q'_{82}).$$

Man erhält so zur Bestimmung von a, b und r die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} q''_{21} &= a + b\,r^{21} \\ q''_{51} &= a + b\,r^{51} \\ q''_{81} &= a + b\,r^{81} \end{aligned}\right\}. \qquad (145)$$

Um a zu bestimmen, bildet man die Gleichung:

$$\frac{q''_{21} - a}{q''_{51} - a} = \frac{q''_{51} - a}{q''_{81} - a}, \qquad (146)$$

aus welcher folgt:

$$a = \frac{(q''_{51})^2 - q''_{21}\,q''_{81}}{2\,q''_{51} - (q''_{21} + q''_{81})}. \qquad (147)$$

Ferner ist

$$r^{30} = \frac{q''_{81} - q''_{51}}{q''_{51} - q''_{21}}, \qquad (148)$$

also:

$$\log r = \tfrac{1}{30} \log \frac{q''_{81} - q''_{51}}{q''_{51} - q''_{21}};$$

$$\log b = \log (q''_{21} - a) - 21 \log r =$$
$$= \log (q''_{51} - a) - 51 \log r =$$
$$= \log (q''_{81} - a) - 81 \log r;$$

woraus sich auch ergiebt:

$$\log b = \tfrac{1}{3}[\log (q''_{21} - a) + \log (q''_{51} - a) + \log (q''_{81} - a)] - 51 \log r. \qquad (149)$$

Die so bestimmten Werte von a, b und r beruhen nur auf drei Sterbenswahrscheinlichkeiten und können deshalb nicht als die definitiven gelten, mit Hilfe deren man die Sterbenswahrscheinlichkeiten berechnen könnte.

Nun giebt es verschiedene Methoden, a, b und r unter Benutzung sämmtlicher Beobachtungen zu bestimmen. Wir können aber er-

warten, dafs die auf obige Weise ermittelten a, b und r nur Verbesserungen brauchen, die im Vergleich zu den Gröfsen selbst sehr klein zu denken sind. Bezeichnen wir die Verbesserungen mit Δa, Δb und Δr und setzen wir $q_x = a + b r^x = f(a, b, r)$, so ist, mit Vernachlässigung der Potenzen der Δ:

$$f(a+\Delta a, b+\Delta b, r+\Delta r) =$$

$$= f(a, b, r) + \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial f}{\partial r}\Delta r. \qquad (150)$$

Nun ist

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1, \frac{\partial f}{\partial b} = r^x, \frac{\partial f}{\partial r} = x\, b\, r^{x-1},$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung $r^x = \frac{q_x - a}{b}$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1, \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{q_x - a}{b}, \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x(q_x - a)}{r}.$$

Setzen wir nun noch:

$$f(a+\Delta a, b+\Delta b, r+\Delta r) - f(a, b, r) = \Delta q_x,$$

dann ist

$$\Delta q_x = \Delta a + \frac{q_x - a}{b}\Delta b + \frac{x(q_x - a)}{r}\Delta r. \qquad (151)$$

Setzt man endlich in dem Ausdruck $q_x = a + b r^x$, in welchem a, b und r die vorläufig nach den Formeln (147), (148) und (149) berechneten Werte haben, nach einander $n = 20, 21, 22$ u. s. w., dann entsteht die berechnete Reihe:

$$q_{20}, q_{21}, q_{22} \cdots,$$

während die beobachtete Reihe ist:

$$q'_{20}, q'_{21}, q'_{22} \cdots.$$

Darum mufs man setzen:

$$q'_{20} - q_{20} = \Delta q_{20}, \quad q'_{21} - q_{21} = \Delta q_{21} \text{ u. s. w.}$$

Wir erhalten auf diese Weise:

$$\left.\begin{aligned} \Delta a + \frac{q_{20} - a}{b}\Delta b + \frac{20(q_{20} - a)}{r}\Delta r &= \Delta q_{20} \\ \Delta a + \frac{q_{21} - a}{b}\Delta b + \frac{21(q_{21} - a)}{r}\Delta r &= \Delta q_{21} \\ \vdots \end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

In (152) haben wir nunmehr zur Bestimmung der drei Unbekannten $\triangle a$, $\triangle b$ und $\triangle r$ ebenso viele Gleichungen, wie wir Altersstufen beobachtet haben. Zur Abkürzung schreiben wir diese Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle a + h_{20}\triangle b + k_{20}\triangle r = m_{20} \\ \triangle a + h_{21}\triangle b + k_{21}\triangle r = m_{21} \\ \triangle a + h_{22}\triangle b + k_{22}\triangle r = m_{22} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array}\right\} \qquad (153)$$

Um nun hieraus die besten Werte für $\triangle a$, $\triangle b$ und $\triangle r$ zu finden, wollen wir keine Beobachtung der andern vorziehen und darum den Weg einschlagen, der bei der Methode der kleinsten Quadrate befolgt wird. Es seien für drei Unbekannten (x, y, z) n lineäre Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = f_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = f_2, \\ \quad\vdots \\ a_n x + b_n y + c_n z = f_n \end{array}$$

gegeben.

Diese Gleichungen seien durch Beobachtung entstanden und mögen alle gleiches Daseinsrecht haben; jedoch habe auch jede ihre Ungenauigkeit

Man multiplicirt die Gleichungen der Reihe nach mit a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ und addirt, so ergiebt sich:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\, x + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)\, y +$$
$$+ (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n)\, z = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n,$$

was wir kurz schreiben wollen:

$$x \Sigma a^2 + y \Sigma a b + z \Sigma a c = \Sigma a f;$$

auf dieselbe Weise bilden wir die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} x \Sigma a b + y \Sigma b^2 + z \Sigma b c = \Sigma b f, \\ x \Sigma a c + y \Sigma b c + z \Sigma c^2 = \Sigma c f, \end{array}$$

und haben dann drei Gleichungen zur Bestimmung von x, y, z.

Wendet man dieselbe Methode an auf die Gleichungen (153), deren Anzahl n sei, so ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot \triangle a + \Sigma h \cdot \triangle b + \Sigma k \cdot \triangle r = \Sigma m \\ \Sigma h \cdot \triangle a + \Sigma h^2 \cdot \triangle b + \Sigma h k \cdot \triangle r = \Sigma h m \\ \Sigma k \cdot \triangle a + \Sigma h k \cdot \triangle b + \Sigma k^2 \cdot \triangle r = \Sigma k m \end{array}\right\} \qquad (154)$$

Hat man aus diesen drei Gleichungen die Werte von $\triangle a$, $\triangle b$ und $\triangle r$ ermittelt, so werden die genaueren Werte von a, b und r gefunden, wenn man die vorläufigen um die berechneten Werte von $\triangle a$, $\triangle b$ und $\triangle r$ zunehmen läfst.

Um die Ausgleichung zum Abschlufs zu bringen, hat man jetzt nur noch die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x aufs Neue aus der Formel

$$q_x = a + b\,r^x$$

mit Hilfe der verbesserten Werte a, b, r zu berechnen.

75. Die oben benutzte Methode, die Gröfsen a, b und r der Gleichung $q_x = a + b\,r^x$ zu bestimmen, ist bisweilen schwer anzuwenden; es kann nämlich vorkommen, dafs $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle r$, die wir als klein voraussetzten, zu grofs sind, als dafs sich die zweiten Potenzen vernachlässigen liefsen. In seinem oben genannten Werke giebt **Wittstein** ein Beispiel hiervon.

Wir wollen darum eine einfachere Methode vorschlagen, nach der, welche von **King** und **Hardy** angewandt ist beim Ausgleichen der Lebenden nach **Makeham**'s Formel.

Es mögen die beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten für die auf einander folgenden Altersstufen von 20 bis 80 Jahren vorliegen, wobei dafür gesorgt ist, dafs die Anzahl der Altersstufen sich mit 3 teilen läfst. Besonders in beschränkten Personenkreisen hat die Beobachtung der Altersstufen über 80 hinaus im Allgemeinen wenig Wert; hat man aber genügend viele alte Personen, so kann man auch bis zu höheren Altersstufen gehen. Zur Bestimmung der drei constanten Werte a, b und r der Gleichung $q_x = a + b\,r^x$ haben wir die 60 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
q_{20} &= a + b\,r^{20},\\
q_{21} &= a + b\,r^{21},\\
q_{22} &= a + b\,r^{22},\\
&\vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots\\
q_{79} &= a + b\,r^{79}.
\end{aligned}$$

Diese 60 Gleichungen vereinigen wir der Reihe nach in drei Gruppen von je 20 und addiren die Gleichungen jeder Gruppe.

Setzen wir dann:

$$\left.\begin{aligned}
q_{20} + q_{21} + \ldots + q_{39} &= A\\
q_{40} + q_{41} + \ldots + q_{59} &= B\\
q_{60} + q_{61} + \ldots + q_{79} &= C,
\end{aligned}\right\} \qquad (155)$$

dann sind selbstverständlich A, B und C, weil aus den beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten zusammengesetzt, als bekannt aufzufassen, sodafs nunmehr drei Gleichungen zur Bestimmung der drei constanten Gröfsen vorliegen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} 20a + b \cdot \frac{r^{40} - r^{20}}{r - 1} &= A \\ 20a + b \cdot \frac{r^{60} - r^{40}}{r - 1} &= B \\ 20a + b \cdot \frac{r^{80} - r^{60}}{r - 1} &= C. \end{aligned}\right\} \qquad (156)$$

Hieraus ergiebt sich leicht:

$$\frac{C - 20a}{B - 20a} = \frac{B - 20a}{A - 20a} = r^{20}, \qquad (157)$$

sodafs

$$A \cdot C - 20a \cdot (A + C) = B^2 - 40a \cdot B,$$

also

$$20a = \frac{A \cdot C - B^2}{A + C - 2B}. \qquad (158)$$

Weiter ergiebt sich aus (157)

$$r^{20} = \frac{C - B}{B - A}. \qquad (159)$$

Weil jetzt a und r aus den beobachteten Zahlen bestimmt sind, können wir auch b finden, sei es aus einer der drei Gleichungen (156) oder aus der durch Addiren dieser Gleichungen gewonnenen Gleichung:

$$60a + b \cdot \frac{r^{80} - r^{20}}{r - 1} = A + B + C =$$
$$= q_{20} + q_{21} + q_{22} + \cdots q_{79}. \qquad (160)$$

Die Bestimmung der a, b und r aus den beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten ist hiernach eine ziemlich einfache Arbeit.

Weil der Unterschied zwischen Sterbe-Intensität und Sterbenswahrscheinlichkeit für die meisten Altersstufen sehr gering ist, kann es nur wenig Unterschied machen, ob man bei der Ausgleichung von der Sterbenswahrscheinlichkeit oder nach der **Makeham**'schen Hypothese von der Sterbe-Intensität als Grundlage ausgeht; die erste Methode ist aber viel einfacher, und zeigt nach einigen angestellten Versuchen befriedigende Ergebnisse.

Dieselbe ist besonders empfehlenswert bei beschränkten Kreisen und bei Lebensversicherungs-Gesellschaften, wo man aus practischen Rücksichten Schwankungen in der Sterbenswahrscheinlichkeit nicht gern sieht, sondern eine allmähliche Steigerung derselben wünscht.

76. Bei jeder Ausgleichungsmethode ist es möglich, dafs die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten im Allgemeinen etwas zu grofs oder zu klein sind, wenn auch die eine Methode dazu häufiger Veranlassung giebt als die andere.

Um dies zu untersuchen, multiplicire man die Anzahl der Lebenden jedes Alters mit der ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeit des betreffenden Alters und addire die Produkte. Auf diese Weise erhält man die Gesammtzahl derjenigen, die nach diesen Sterbenswahrscheinlichkeiten hätten sterben sollen. Ist nun die Anzahl der in Wirklichkeit Gestorbenen aller beobachteten Altersstufen zusammen $= s$ während sie nach den ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten $(1 + \alpha)\, s$ wäre, so erzielt man durch Division der ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten mit $1 + \alpha$ eine bessere Übereinstimmung der Beobachtung und der Ausgleichung, ohne dafs der Gewinn des regelmäfsigen Verlaufs der Wahrscheinlichkeiten wieder verloren geht.

Die hauptsächlichsten Sterblichkeitstafeln.

77. Aus der grofsen Zahl von Sterblichkeitstafeln, welche existiren, wollen wir nur diejenigen erwähnen, welche die meiste Verwendung bei Lebensversicherungs-Gesellschaften gefunden haben und noch finden, oder einen grofsen historischen Wert haben.

Es sind dies folgende:

Die Tafel von **Halley** für Breslau (1693).

„ „ „ **Simpson** für London.

„ „ „ **Bauman** für Kurmark.

Die Tafel der Lebens-Intensität von **Willem Kerfseboom** (1742) nach Leibrentnern.

Die Tafel von **Nicolaas Struyck** (1753) nach Leibrentnern.

Die Tafel von **Wargentin** für Schweden (1766).

Déparcieux Tafeln für Rentner, von **Florencourt** verbessert (1781).

Die Northampton-table von **Dr. Price** (Observation on reversionary Payments, 1783), später von **Dr. Farr** nach einer genaueren Methode verbessert.

Die Carlisle-table von **Milne** (Treatise on the valuation of annuities, 1815).

Die **Duvillard**-Tafeln (Analyse de l'influence de la petite variole sur la mortalité, 1806).

Die Tafeln von **Demontferrand** über die ganze Bevölkerung Frankreichs (1832).

Die Tafeln der Equitable Society von **G. Davies** (1825), **Ch. Babagge** (1826) und **A. Morgan** (1834).

Die Tafeln der 17 englischen Gesellschaften (1843).

Die Tafeln von **Finlaison** nach Tontinen in England und Irland (1829 und 1860) (Tontines and Life Annuities, Report and Observations on the mortality of the Government Annuitants).

Die Tafeln von **Alexander John Finlaison** (dem Sohne des Vorgenannten) (Life Annuities, Report on the mortality of Government Life annuitants).

Die Sterblichkeitstafeln für Holland von **Dr. M. M. van Baumhauer** (1856 und 1876).

Die Tafeln der Schottischen Gesellschaften (Observations on the rate of mortality of assured lives, as experienced by ten Assurance Companies in Scotland) 1869 von **J. Meikle.**

Die Tafeln der 20 englischen Gesellschaften (Tables deduced from the Mortality Experience of Life Assurance Companies 1872) nach einem grofsen Material aufgestellt und ausgeglichen von **W. S. B. Woolhouse,** herausgegeben im Auftrage des „Institute of Actuaries of Great-Britain and Ireland".

Die in vorgenanntem Buche enthaltenen Sterblichkeitstafeln sind die nachfolgenden

Tafel H^M (Healthy male Lives — gesunde männliche Leben),
„ H^F (Healthy female Lives — gesunde weibliche Leben),
„ H^{MF} (Healthy male and female Lives — gesunde männliche und weibliche Leben),
„ $H^{M(5)}$ (Healthy male Lives, omitting the first five years of assurance — gesunde männliche Leben unter Weglassung der ersten 5 Jahre der Versicherung).

Diese Tafeln werden noch ergänzt durch die Select Mortality Tables von **T. B. Sprague.**

Die englischen Life tables von **Dr. Farr** (1864).

Die Tafeln von **Brune,** von **Heym,** von **Fischer** nach der Preufsischen Witwen-Verpflegungs-Anstalt in Berlin.

Die Tafeln der 30 amerikanischen Gesellschaften (System and Tables of Life Assurance by **Levi S. Meech**) (1881).

Die deutschen Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Collegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin (1883).

Die Executiv-Commission bestand aus den Herren **Dr. Zillmer, Dr. Langheinrich, G. Hartmann, Gerkrath, L. Buro.**

Die Tafeln sind ausgeglichen von **Dr. A. Zillmer,** der auch die Anregung zu ihrer Aufstellung gegeben hat.

Diese Tafeln sind folgende:

Tafel M I. (Normal versicherte Männer mit vollständiger ärztlicher Untersuchung),

„ W I. (Normal versicherte Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung),

„ M u. W. I. (Normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung),

„ M II. (Gegen erhöhte Prämien versicherte Männer mit vollständiger ärztlicher Untersuchung),

„ W II. (Gegen erhöhte Prämien versicherte Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung),

„ M u. W II. (Gegen erhöhte Prämien versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung),

„ M III. (Männer mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung [Sterbekassen-Versicherung]),

„ W III. (Frauen mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung [Sterbekassen-Versicherung]),

„ M u. W III. (Männer und Frauen mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung [Sterbekassen-Versicherung]).

In diesem Werke ist ausführlich angegeben, wie man am besten die Angaben zur Aufstellung der Sterblichkeitstafeln beschaffen und verwerten kann.

Die verschiedenen Sterblichkeitstafeln für Holland von **Prof. Dr. A. J. van Pesch** (1885—1892).

Die Tafeln der 4 französischen Gesellschaften (Assurances Générales, Union, Nationale, Phénix) (1890); es sind folgende:

Tafel R F. (Rentiers français, table de mortalité des rentiers viagers),

Tafel A F. (Assurés français, table de mortalité en cas de décès).

In beiden nach den Anweisungen von **E. Kertanguy** angefertigten Tafeln sind die Geschlechter zusammengefafst.

Die belgischen Sterblichkeitstafeln von **J. M. J. Leclerc** (1894).

Die deutschen Rentner-Sterbetafeln für Männer und Frauen (1891).

Als Tafeln entstanden aus Beobachtung engerer Kreise mögen noch besonders erwähnt werden die Tafel von **Beauvisage** nach den Tontinen von **Lafarge** (1867), die American Experience Table von **Homan** (1868), die der Lebensversicherungsbank zu Gotha (1880), die neue Sterblichkeitstafel von **Dr. A. J. van Pesch** nach den Beobachtungen bei der „Holländischen Societät der Lebensversicherung“ (1890), die Tafeln von **Dr. J. H. Peek** nach Beobachtung der Civilbeamten und ihrer Witwen in Holland (1896), die Sterblichkeitstafel der Niederländisch-Indischen Civilbeamten von **Dr. R. H. van Dorsten** (1899).

Schliefslich nennen wir wegen ihres grofsen Interesses die Sterblichkeitstafeln für Männer, Witwen, verheiratete Frauen und Kinder, die in der „Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Societät von **Prof. Dr. Johannes Karup**“ (1893) vorkommen, einem Buche, welches namentlich für die Lebensversicherung sehr lehrsam ist.

In den Jahren 1899 und 1900 sind erschienen die noch unausgeglichenen Resultate (unadjusted Data) der „Joint mortality Investigation“ von „the Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries“ herausgegeben; dieselben heifsen

Combined Experience (1863—1893);
of Life Annuitants
„ Assured Lives, Whole-Life assurance, males;
„ „ „ „ „ females;
„ „ „ Endowment assurances and minor Classes of assurance.

Aus diesen Daten werden voraussichtlich wichtige neue Mortalitätstafeln abgeleitet werden.

Auch Österreich-Ungarn schickt sich an, uns Sterbetafeln nach Beobachtungen bei Gesellschaften zu verschaffen.

Verschiedene Ursachen, welche die Sterblichkeit beeinflussen.

78. Nach der Sterblichkeitstafel für einen bestimmten Kreis von Personen hängt die Sterbenswahrscheinlichkeit einer Person ausschliefslich von derem Alter ab; dies bedeutet aber nicht, dafs alle gleichaltrigen Individuen dieselbe Sterbenswahrscheinlichkeit haben; diese hängt für jede derselben aufser von dem Alter, von mehreren Umständen ab, sodafs die Sterbenswahrscheinlichkeit eines Individuums nicht mittels einer Zahl auszudrücken ist.

Es ist aber eine andere Frage, ob nicht die Personen eines selben Kreises in Gruppen eingeteilt werden können, welche eine Absterbeordnung aufweisen, sodafs man verschiedene Sterbetafeln zusammenstellen kann.

In erster Linie ist zu wiederholen, dafs öfters separate Tafeln zusammengestellt werden für die beiden Geschlechte.

Viel mehr noch als der Geschlechtsunterschied wird die Art der Versicherung die Absterbeordnung beeinflussen. Es ist also angezeigt, lebenslängliche Versicherungen auf Ableben, Versicherungen auf Erleben, einschliefslich Renteversicherungen und gemischte Versicherungen separat zu beobachten.

Es giebt aber noch andere Umstände, welche die Mortalität ebenso stark beeinflussen. So lehrt die Erfahrung, dafs die Mortalität gleichaltriger Personen bei derselben Gesellschaft gänzlich verschieden ist für neu Zugetretene und für schon längere Zeit Versicherte. Man fängt daher mehr und mehr an, die Versicherten nicht blos nach dem Alter zu ordnen, sondern auch nach der Dauer, während welcher sie beobachtet wurden; je länger die Dauer der Beobachtung ist, desto geringer wird der Unterschied zwischen den Mortalitätsverhältnissen, und man könnte behaupten, dafs nach ungefähr zehn Jahren der Unterschied wegfällt. In dieser Hinsicht ist die Sterbenswahrscheinlichkeit eine Function, nicht nur des Alters, sondern des Alters und der Beobachtungsdauer. (**Léon Marie** im Congress zu Brüssel 1895, **Potérin du Motel** über tables à double entrée in seinem Werke: „Théorie des assurances sur la vie".)

Schon die 20 englischen Gesellschaften hielten Rechnung mit diesem Umstand in ihrer Tafel $H^{M(5)}$ und die „Combined Experience" giebt ausführliche Resultate in dieser Richtung; ebenso die amerikanischen Tafeln der 30 Gesellschaften. **Dr. Sprague**'s selected Tables sind sogar gegründet auf den Modificationen der Sterblichkeit mit Bezug auf die Dauer der Versicherung.

Eine andere Ursache der Verschiedenheit in der Mortalität findet man in den verschiedenen Berufen; der Pariser Congrefs hatte diesen Punkt auf ihre Agenda gestellt und demzufolge wurden sowohl von deutscher (von der „Gotha") als von französischer, englischer und amerikanischer Seite Berichte eingereicht. In der Zukunft darf man von den in Aussicht gestellten Untersuchungen grofse Erwartungen hegen.

Versicherungen auf das Leben von Personen, welche entweder auf Grund ihres Gesundheitszustandes oder auf Grund einer erblichen Belastung nicht gegen die normalen Prämien angenommen werden können, müssen entweder durch die versichernde Gesellschaft verweigert oder

unter besonderen Bedingungen angenommen werden. Bei der Festsetzung dieser Bedingungen ist eine gewisse Willkür nicht zu leugnen. Es mufs hier die sehr verdienstliche Arbeit als „Denkschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben", welche **Prof. Dr. Ernst Blaschke** über dieses Thema veröffentlichte, hervorgehoben werden. Der Verfasser teilt die abnormalen Leben in Gefahrenklassen ein und stellt für jede derselben eine separate Sterblichkeitstafel zusammen.

Wahl der Sterblichkeitstafeln und des Zinsfufses.

79. Aus der Sache selbst läfst sich verstehen, dafs es für die Wahl der Tafel von wesentlichem Einflufs ist, ob es sich um Versicherungen handelt, bei denen im Fall des Ablebens oder um solche, bei denen für den Fall des Erlebens eines gewissen Alters eine Zahlung erfolgen soll. Die Tafeln, welche auf den Erfahrungen der Gesellschaften beruhen, sind die geeignetsten.

Manche halten es für notwendig, für die beiden Geschlechter verschiedene Tarife festzustellen, also eine Tafel für Männer und eine andere für Frauen zu benutzen; es wird aber die Ansicht immer allgemeiner, dafs es sicherer ist, für die beiden Geschlechter denselben und zwar den höchsten Tarif zu wählen. Obgleich im Allgemeinen die Sterblichkeit unter den Männern gröfser ist als unter den Frauen, haben mehrere Gesellschaften die entgegengesetzte Erfahrung gemacht und fordern für Versicherungen auf den Todesfall von den Frauen eine höhere Prämie als von den Männern.

In vielen Hinsichten und namentlich für die Mathematiker der Gesellschaften wäre es bequem, für jede Versicherungsweise dieselbe Sterblichkeitstafel wählen zu können. Wenn man annehmen dürfte, dafs die nach den einzelnen Tarifen Versicherten gleich zahlreich wären und auf die Wahl der Tarifklasse keinerlei Gesundheits- oder andere Gründe bestimmend einwirkten, dann wäre dies sogar vorzuziehen. Da aber eine solche Annahme mit den Thatsachen in Widerspruch steht, ist es besser, die Sterblichkeitstafeln für die verschiedenen Versicherungsweisen so zu wählen, dafs die Prämien keinesfalls zu niedrig werden. Um den Einflufs der Selbstwahl zu beschränken, ist es notwendig (wenn dies auch eine nicht zu leugnende schwache Seite der Lebensversicherung bildet), dafs die Gesellschaft die genügende Gesundheit des Versicherungsnehmers feststellen läfst, wenn dieser eine Versicherung eingehen will, bei welcher auf den Todesfall ein Kapital oder eine Rente zur Auszahlung kommen soll.

Man begreife wohl, dafs es sich hier handelt um die Wahl der Tafel bei sich neu gründenden Gesellschaften, nicht um die Wahl der Tafeln bei älteren Gesellschaften, wovon später die Rede sein wird.

80. Was den Zinsfufs betrifft, so giebt es sehr gute Gesellschaften, die noch immer mit 4 % rechnen, weil sie wirklich ihre Gelder gegen mehr als 4 % anzulegen wissen. In allen Ländern braucht zwar der Zinsfufs nicht notwendig derselbe zu sein; auch gesetzliche Verpflichtungen bestimmen oft die Wahl. Indessen möchte ich dem nicht widersprechen, dafs einige Gesellschaften diesbezüglich allzu optimistisch sind.

Mehr und mehr rechnet man mit $3\frac{1}{2}$ oder selbst 3 %. Die Zeit mufs lehren, ob man in jedem Lande und für jede Gesellschaft zu einem sehr niedrigen Zinsfufs übergehen mufs.

Obgleich es nun nicht gerade wissenschaftlich ist, suchen einige Gesellschaften in der vorsichtigen Wahl des Zinsfufses einen teilweisen Ausgleich für den Mangel an einer völlig zutreffenden Sterblichkeitstafel z. B. für Leibrente. Viele Gesellschaften machen die Erfahrung, dafs Leibrentner im Allgemeinen länger leben, als die Sterblichkeitstafeln erwarten lassen.

Vergleichung der Sterblichkeit und der Auszahlung mit der Sterblichkeitstafel.

81. Bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft ist in der Regel die Zahl der Versicherten zu gering, um nach dem eigenen Material eine Sterblichkeitstafel aufzustellen, der man trauen könnte; vielen Wert aber hat ein Vergleich der beobachteten Sterblichkeit mit derjenigen, die nach einer bestimmten Sterblichkeitstafel hätte stattfinden sollen, um daraus zu schliefsen, ob die Sterblichkeitsverhältnisse günstig liegen oder nicht.

Man mufs dazu die Zahl der für jede Altersstufe z. B. nach Formel $\frac{1}{2}(b+e+d)$ berechneten in Beobachtung gewesenen Personen mit der entsprechenden Sterbenswahrscheinlichkeit der Sterblichkeitstafel multipliciren. Wenn auch natürlich die Zahl der Gestorbenen eine ganze Zahl ist, berechnet man sie hierbei zweckmäfsig bis auf zwei Decimalen. Addirt man die für die verschiedenen Altersstufen gewonnenen Zahlen, so ergiebt sich die Zahl der nach der Sterblichkeitstafel erwartungsmäfsig Gestorbenen, die man nunmehr unter Weglassung der Decimalen mit der Zahl der thatsächlich Gestorbenen vergleichen kann.

82. Die Lebensversicherungs-Gesellschaften machen oft die Erfahrung, dafs die Sterblichkeit unter den auf den Todesfall Versicherten

geringer ist, als die Sterblichkeitstafel erwarten läfst, und doch die Auszahlung sich ungünstig stellt. Dies wird stattfinden, wenn der Tod vorzugsweise die hoch Versicherten heimgesucht hat.

Darum ist es von grofser Bedeutung, nicht nur die Sterblichkeit, sondern auch die Auszahlung mit der Sterblichkeitstafel zu vergleichen. Dazu bestimme man zu jeder Altersstufe das beobachtete Kapital nach der Formel

$$\tfrac{1}{2}(B+E+D),$$

wo B das versicherte Kapital am Anfang, E am Ende des Jahres, D das ausgezahlte Kapital ist; wenn man dann diese Zahl mit der Sterbenswahrscheinlichkeit für das betreffende Alter multiplicirt, so erhält man die erwartungsmäfsige Auszahlung für dieses Alter.

Ist z. B. für ein gewisses Alter das beobachtete Kapital 50 000 M., und ist nach der angenommenen Tafel die Sterbenswahrscheinlichkeit für dieses Alter 0.0134, so beträgt auf Grund der Tafel die Auszahlung 670 M.

Addirt man die so für die verschiedenen Altersstufen ermittelten Beträge, so kann man nun die wirkliche Auszahlung mit der nach der Sterblichkeitstafel zu erwartenden vergleichen. Dafs man ein Zurückbleiben der ersteren hinter der letzteren nicht mit Gewinn und das Gegenteil mit Verlust aus Anlafs der Sterblichkeitsverhältnisse verwechseln darf, wird sich später zeigen.

Ob die Auszahlung vorzugsweise die hoch oder die niedrig Versicherten betroffen hat, läfst sich auch finden, wenn man den durchschnittlich versicherten Betrag der Beobachteten mit demjenigen der Gestorbenen vergleicht.

Die Anzahl der im Laufe des Jahres Beobachteten wird auf $\frac{1}{2}(b+e+d)$ geschätzt, das versicherte Kapital auf $\frac{1}{2}(B+E+D)$ — hierbei können die vorkommenden Gröfsen sich auf alle Altersstufen zusammen beziehen — der mittlere versicherte Betrag ist also pro Kopf:

$$\frac{B+E+D}{b+e+d},$$

während $\frac{D}{d}$ der mittlere versicherte Betrag der Gestorbenen ist.

Wenn
$$\frac{D}{d} < \frac{B+E+D}{b+e+d},$$

so hat die Sterblichkeit vorzugsweise die niedrig Versicherten, wenn

$$\frac{D}{d} > \frac{B+E+D}{b+e+d},$$

so hat die Sterblichkeit vorzugsweise die hoch Versicherten betroffen.

Auszahlungstafel.

83. Für eine Lebensversicherungs-Gesellschaft ist eine höhere oder geringere Sterblichkeit nur von untergeordnetem Interesse in Vergleich mit einer höheren oder niedrigeren Auszahlung.

Darum hat man statt Sterblichkeitstafeln auch wohl Auszahlungstafeln aufgestellt, dies ist geschehen durch die Amerikaner in ihren Tafeln nach den 30 Gesellschaften.

Ersetzt man, wie dies schon oben geschehen ist, für jede Altersstufe b, e und d durch B, E und D, so ist

$$\frac{2D}{B+E+D}$$

die Auszahlungswahrscheinlichkeit, die einen ganz anderen Verlauf haben kann wie die Sterbenswahrscheinlichkeit

$$\frac{2d}{b+e+d}.$$

Beide würden aber übereinstimmen, wenn die Versicherungssummen pro Kopf gleich wären.

Man kann nun offenbar eine Tafel aufstellen, die mit einer Versicherungssumme von 100000 M. bei der ersten Altersstufe, die beobachtet ist, anfängt und angiebt, wieviel von diesem Betrag auf jeder nachfolgenden Altersstufe in Folge der Auszahlung noch übrig ist.

Diese Methode hat den Vorteil, dafs man bei dem Combiniren der Beobachtungen verschiedener Gesellschaften nicht darauf zu achten braucht, ob dieselbe Person bei mehreren von ihnen versichert ist, eine Sache, die sonst viele Mühe verursacht; man hat es ja nur mit den Kapitalien in jedem Alter zu thun. Dagegen mufs man für jedes Alter genau wissen, welcher Betrag bei anderen Gesellschaften rückversichert ist und wieviel man also auf der eigenen Rechnung behalten hat.

Eine solche Tafel könnte man sehr gut zur Aufstellung der Tarife benutzen, genau so wie eine Sterblichkeitstafel.

Combination der Erfahrungen verschiedener Gesellschaften.

84. Aus den Sterblichkeitstafeln mehrerer Gesellschaften kann man nicht ohne Weiteres eine genaue Tafel für alle zusammen ableiten, und zwar aus verschiedenen Gründen nicht:

1°. Werden die Anzahlen der wahrgenommenen Gestorbenen bei den verschiedenen Gesellschaften sehr verschieden sein.

2°. Kann das Alter auf sehr verschiedene Weise eingeschätzt sein.

3°. Ist oft eine und dieselbe Person bei mehreren Gesellschaften versichert. Sind z. B. bei der einen Gesellschaft 7 von 400 Beobachteten gestorben, bei einer anderen 11 von 500, also zusammen 18 von 900, so würde dies eine Sterblichkeit von 2 % bedeuten, vorausgesetzt, dafs keine Doppelversicherungen darunter sind; wenn aber z. B. von jenen Personen 10 bei beiden Gesellschaften versichert und 2 von ihnen gestorben wären, so würden von 890 Personen 16, d. h. 1,8 % gestorben sein.

4°. Können die Methoden, nach denen die verschiedenen Tafeln aufgestellt sind, sehr verschieden sein.

Wenn man die Erfahrungen von verschiedenen Gesellschaften zu einem Ganzen vereinigen will, so ist ein Haupterfordernis, dafs alle diese Gesellschaften genau ihre Aufzeichnungen auf dieselbe Weise machen. Am besten lassen die Gesellschaften für jede eingeschriebene Person eine Karte anlegen (wenigstens in duplo, eine für den eigenen Gebrauch, eine zur Einlieferung) mit folgenden Angaben:

1°. Namen, Vornamen, Geschlecht, Geburtsort, Beruf, Wohnort;
2°. Datum der Geburt;
3°. Datum der Einschreibung;
4°. Datum des Austritts bei Lebzeiten mit Andeutung des Grundes (Ablauf der Versicherung, Rücklauf u. s. w.);
5°. Datum des Ablebens mit oder ohne Auszahlung;
6°. die Art der Versicherung;
7°. die Versicherungssumme oder die versicherte Rente mit Angabe, welcher Teil für eigene Rechnung behalten ist;
8°. die Angabe, ob des Gesundheitszustandes wegen oder aus anderen Gründen eine erhöhte Prämie gezahlt wird;
9°. die Art der Prämienzahlung;
10°. die Angabe der Änderungen, die in der Versicherung stattfinden könnten, wie Zu- oder Abnahme des Betrags; Änderung in der Prämienzahlung u. s. w.

Name, Vorname u. s. w. ist deshalb nötig, damit dieselbe Person nicht mehr als einmal gezählt wird; die Versicherungssumme und die Art der Prämienzahlung müssen angegeben werden, weil gerade darin oft ein kennzeichnender Unterschied der Versicherten liegt und man dadurch auch zu einer Auszahlungstafel gelangen kann (No. 83).

Hat man solche Karten für die Versicherten ausgefüllt, so kann

man diese dann nach den verschiedensten Gesichtspunkten gruppiren, man kann diejenigen zusammenfassen, die zu einem gewissen Zeitpunkte am Leben sind, die in demselben Jahre beigetreten, ausgetreten, gestorben sind u. s. w. Wollen jetzt doch sogar manche für jeden Angehörigen ganzer Bevölkerungen durch die Standesämter Karten ausgefüllt sehen, welche ihm bei Umzügen von einem Ort zum andern folgen und auf welchen ihn betreffende Aufzeichnungen gemacht sind über Geburt, Verheiratung, Beruf, Confession, Angehörige u. s. w.

Wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer.

85. Es sei die Anzahl der Lebenden in dem Alter x nach einer bestimmten Sterblichkeitstafel l_x, so bezeichnet man als die wahrscheinliche Lebensdauer (vie probable, probable life-time) des x-jährigen nach dieser Tafel die Zeit, nach welcher diese Anzahl l_x durch Ableben bis auf die Hälfte zurückgegangen sein wird. Setzen wir diese wahrscheinliche Lebensdauer $= m$, so bestimmt sich x aus der Gleichung

$$l_{x+m} = \tfrac{1}{2} l_x.$$

Diese Zahl ist in der Regel keine ganze, sondern eine gemischte und wird leicht aus der Sterblichkeitstafel interpolirt, indem man, um l_{x+m} zu erhalten, die zwei Werte der l aufsucht, die $\frac{1}{2} l_x$ einschliefsen und ihm am nächsten liegen.

Wenn m die wahrscheinliche Lebensdauer des x-jährigen ist, so hat dieser dieselbe Wahrscheinlichkeit, nach m Jahren zu leben oder gestorben zu sein. Man sieht, dafs die Art der Sterblichkeit nach dem wahrscheinlich zu erreichenden Alter keinen Einfluſs hat auf die wahrscheinliche Lebensdauer.

Man soll die wahrscheinliche Lebensdauer nicht verwechseln mit der wahrscheinlichste noch zu lebenden Zeit (most probable after-life time). Sei d_{x+n} die gröfste dem Alter x folgende Anzahl Todte nach der Sterblichkeitstafel, so liegt diese wahrscheinlichste noch zu lebende Zeit des x-jährigen zwischen n und $n+1$ Jahr.

86. Ein anderer Begriff ist die mittlere Lebensdauer. Wir gehen wieder aus von den x-jährigen; von l_x Personen dieses Alters lebt nach der Sterblichkeitstafel eine gewisse Anzahl noch 1 Jahr, eine geringere Anzahl noch 2 Jahre u. s. w. Um jetzt die durchschnittliche Anzahl der Jahre zu erhalten, während deren ein x-jähriger noch lebt, mufs man die Anzahl der Jahre, welche die x-jährigen zusammen noch verleben, mit ihrer Anzahl l_x dividiren.

Um die mittlere Lebensdauer nach einer gegebenen Sterblichkeitstafel zu bestimmen, werden wir von zwei verschiedenen Voraussetzungen ausgehen. Nach der Sterblichkeitstafel leben von l_x Personen des x-jährigen Alters nach einem Jahre noch l_{x+1} Personen, nach zwei Jahren noch l_{x+2} Personen u. s. w. Findet nun das Absterben stets im Anfang des Sterbejahres statt, so durchleben die l_x Personen im ersten Jahre zusammen l_{x+1} Jahre, im zweiten Jahre l_{x+2} Jahre, u. s. w. Die l_x Personen durchleben also im Ganzen

$$l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots \text{ Jahre}$$

und daher ist die mittlere Lebensdauer

$$\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x}. \tag{161}$$

Diesen Ausdruck, welchen die Engländer curtate expectation of life nennen und mit e_x bezeichnen, könnte man mit dem Namen „abgekürzte mittlere Lebensdauer“ andeuten.

Setzt man dagegen voraus, dafs das Ableben stets am Ende des Sterbejahres stattfindet, so ist die mittlere Lebensdauer

$$\frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots}{l_x}. \tag{162}$$

Man ist also nicht weit von der Wahrheit entfernt, wenn man für die eigentliche mittlere Lebensdauer das arithmetische Mittel zwischen (161) und (162) nimmt. Weil die Differenz zwischen (161) und (162) die Einheit ist, findet man für diese mittlere Lebensdauer

$$\tfrac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x}. \tag{163}$$

Dieser Ausdruck ist die vollständige mittlere Lebensdauer (complete expectation of life bei den Engländern) und mit $\mathring{e}_x$ zu bezeichnen. Man findet also

$$\mathring{e}_x = e_x + \tfrac{1}{2}. \tag{164}$$

Die Formel (163) setzt voraus, dafs bei Verteilung des Jahres in gleiche Teile, in der Mitte jedes Jahresteils eine gleiche Anzahl Sterbefälle stattfindet, woraus hervorgeht, dafs diejenigen, welche im Laufe eines Jahres sterben, durchschnittlich noch die Hälfte dieses Jahres durchlebt haben.

87. Bei den meisten Sterblichkeitstafeln ist für einige Altersstufen die wahrscheinliche, für andere die mittlere Lebensdauer die gröfste, für noch andere Altersstufen sind beide ungefähr gleich. Dafs sie für

einige Sterblichkeitstafeln im Allgemeinen nur wenig von einander verschieden sind, kann man daraus erklären, dafs sie ganz gleich sein würden, wenn die Anzahl der Lebenden in den nach einander folgenden Altersstufen eine arithmetische Reihe bildete, die Anzahl der Gestorbenen also für jedes Alter gleich wäre.

Wenn nämlich die Zahlen l_x, l_{x+1}, l_{x+2} u. s. w. eine arithmetische Reihe bilden, $x+m$ das höchste Alter der Sterblichkeitstafel ist, sodafs $l_{x+m+1}=0$, und wenn wir endlich $l_{x+m}=\delta$ setzen, so ist die Reihe der Lebenden, beim Alter $x+1$ angefangen:

$$m\,\delta,\ (m-1)\,\delta,\ (m-2)\,\delta\ \ldots\ .\ 2\,\delta,\ \delta.$$

Also folgt:

$$l_{x+1}+l_{x+2}+l_{x+3}+\ldots\ .=\tfrac{1}{2}\,m\,(m+1)\,\delta.$$

Durch Division mit $l_x=(m+1)\,\delta$ und nachheriger Addition von $\frac{1}{2}$ ergiebt sich als die mittlere Lebensdauer:

$$\mathring{e}_x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\,m=\tfrac{1}{2}\,(m+1).$$

Dies ist aber zugleich die wahrscheinliche Lebensdauer, denn das Glied der Reihe von der Rangordnung $\frac{1}{2}\,(m+1)$ ist

$$\tfrac{1}{2}\,(m+1)\,\delta=\tfrac{1}{2}\,l_x.$$

Bedeutet $f(x)$ die Anzahl der Lebenden im Alter x und denkt man jetzt das Jahr in n gleiche Teile zerlegt, so ist leicht einzusehen, dafs sich die strenge mittlere Lebensdauer des x-jährigen darstellt in der Form:

$$\frac{1}{2\,n}+\frac{1}{n}\,\frac{f(x+\frac{1}{n})+f(x+\frac{2}{n})+f(x+\frac{3}{n})+\ldots.}{f(x)}$$

oder, wenn n unbegrenzt zunimmt:

$$\mathring{e}_x=\frac{1}{f(x)}\int_x^{\infty} f(z)\,dz. \qquad (165)$$

Diese Formel ist die mathematisch einzig richtige, die vorhergehende nur eine Annäherung.

Die obere Grenze ist zwar nicht höher als das höchste Alter, welche die längst Lebenden erreichen, weil aber dieses Alter nach der Schnelligkeit des Absterbens verschieden ist, so ist es am bequemsten, die höchste Grenze $=\infty$ zu nehmen, was ja keinen Bedenken unterliegt, weil die Elemente des Integrales nach dem höchsten Alter doch $=0$ sind. Man pflegt das höchste Alter der Sterbetafel oft mit ω anzudeuten, welches ω natürlich eine ganze Zahl ist. Die obere Grenze des

Integrales (165) ist aber gröfser als ω und kleiner als $\omega + 1$. Es ist dies neuerdings ein Grund desto mehr, nicht die Grenze ω, sondern ∞ zu wählen.

Es ist leicht zu sehen, dafs man hat:

$$e_x \, l_x = (e_{x+1} + 1) \, l_{x+1},$$

und hieraus:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{e_x}{e_{x+1} + 1} = \frac{\mathring{e}_x - \frac{1}{2}}{\mathring{e}_{x+1} + \frac{1}{2}}, \tag{166}$$

sodafs aus einer Tafel, welche die mittlere Lebensdauer für jedes Alter angiebt, die Lebenswahrscheinlichkeiten und somit auch die Sterbenswahrscheinlichkeiten abgeleitet werden können; aus einer Tafel der mittleren Lebensdauer läfst sich also eine Sterblichkeitstafel entwickeln.

Kapitel IV.

Einmalige Prämien für die hauptsächlichsten Versicherungen auf eine Person.

Prinzipien.

88. Die Aufstellung eines Lebensversicherungstarifs fängt damit an, dafs man eine Sterblichkeitstafel auswählt. Dabei ist auf die Art der Versicherung Rücksicht zu nehmen. Sodann beschliefst man über den Zinsfufs, der zu Grunde gelegt werden soll. Jedenfalls nimmt man ihn nicht höher, sondern eher etwas niedriger als den Zins, welchen man gegenwärtig für verzinste Kapitalien erhält. (Siehe Nr. 80.)

Wenn die Sterblichkeitstafel und der Zinsfufs feststehen, wird der Tarif so berechnet, dafs, wenn eine sehr grofse Anzahl von Personen des betreffenden Alters gleichzeitig beitreten würde, die ihnen auferlegten Zahlungen an die Versicherungs-Anstalt zusammen gleichwertig sind den Auszahlungen, welche von der Anstalt nach den angenommenen Grundlagen in Folge des Lebens und Sterbens zu leisten sein werden. Dabei ist natürlich der Verzinsung Rechnung zu tragen. Zur Vereinfachung denkt man sich die Zahl der Beitretenden gerade gleich der

Zahl der Lebenden nach der Sterbetafel. Es versteht sich von selbst, dafs bei derselben Art der Versicherung und bei derselben Altersstufe die Prämie dem versicherten Kapital oder der versicherten Rente proportional ist. Darum werden in der Regel die Formeln für die Einheit von Kapital oder Rente angegeben; diese Einheit kann dann eben so gut 1 M. oder 1000 M. darstellen.

Versicherung auf den Erlebensfall.

89. Diese Art der Versicherung ist nicht die häufigste, freilich auch nicht die nützlichste, weil sie im Allgemeinen weniger als z. B. die Versicherung auf den Todesfall dem Zweck der Versicherung entspricht: das Unglück von Wenigen durch Viele zu lindern.

Wir schicken die Versicherung auf den Erlebensfall voraus, weil sie die Aufstellung der Formeln auch für andere Versicherungsarten vorbereitet.

Die Frage ist also die: was hat ein x-jähriger auf einmal zu zahlen, um, falls er nach n Jahren noch lebt, die Anwartschaft auf Auszahlung der Summe 1 zu haben; während seine Einlage der Gesellschaft verfällt, falls er innerhalb der n Jahre stirbt.

Die Anzahl der Lebenden im Alter x nach der Sterblichkeitstafel sei l_x, die Anzahl der von ihnen zufolge derselben Tafel nach n Jahren noch Lebenden l_{x+n}.

Wenn nun jede der l_x Personen eine Versicherung der gekennzeichneten Art abschliefst und das Ableben nach der gewählten Tafel stattfindet, so hat die Gesellschaft nach n Jahren die Summe l_{x+n} auszuzahlen.

Rechnet man mit dem Zins i per Einheit und per Jahr, so ist der Wert der Summe l_{x+n} im Augenblicke, wo die Versicherungen abgeschlossen werden:

$$\frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}$$

und folglich ist der Wert jeder der l_x Versicherungen in dem Augenblicke, wo die Versicherung abgeschlossen wird:

$$\frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}. \qquad (167)$$

Wenn wir, wie dies öfters geschehen wird, die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden, so können wir zu demselben Resultate auf folgende

Weise gelangen: falls die Summe 1 nach n Jahren unbedingt ausgezahlt werden müfste, wäre ihr gegenwärtiger Wert

$$\frac{1}{(1+i)^n} = v^n,$$

wenn man $\frac{1}{1+i} = v$ setzen; die Wahrscheinlichkeit für eine Person, die Summe ausgezahlt zu erhalten, ist aber

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_np_x,$$

die Wahrscheinlichkeit des x-jährigen, nach n Jahren noch am Leben zu sein; also ist der gegenwärtige Wert:

$$\frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot {}_np_x.$$

Wenn ein ganzer Tarif aufgestellt werden soll, thut man gut, den Ausdruck (167) in folgende Form zu bringen:

$$\frac{l_{x+n}}{(1+i)^{x+n}} : \frac{l_x}{(1+i)^x} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}.$$

Setzt man jetzt $v^x l_x = D_x$, und also entsprechend

$$v^{x+n} l_{x+n} = D_{x+n},$$

dann geht die Formel für die einmalige Prämie der Versicherung auf den Erlebensfall nach n Jahren über in

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x \text{ oder } A_{x\,\overline{n}|}. \qquad (168)$$

Um nunmehr den Tarif aufzustellen, d. h. für die verschiedenen Werte von x und n die einmalige Prämie anzugeben, construirt man eine Tafel, welche $D_x = v^x l_x$ für alle Werte von x enthält. Man hat dann nach Formel (168) nur mit zwei Zahlen zu thun, während nach Formel (167) mit drei Zahlen zu rechnen wäre.

Discontirte Anzahl der Lebenden.

90. Die Zahlen $D_x = \frac{l_x}{(1+i)^x} = v^x l_x$ pflegt man der Kürze halber die discontirten Anzahlen der Lebenden zu nennen; die Zahlungen sind nämlich discontirt bis zur Geburt. Gewöhnlich wird man diese Zahlen logarithmisch berechnen, und zwar genügen in Betreff l_x fünf

Decimalstellen, denn den weiteren Decimalen könnte man doch nicht trauen, weil die Anzahlen der Lebenden nach den meisten Sterblichkeitstafeln höchstens fünfstellige, durch Abrundung der Decimalen zur Einheit entstandene Zahlen sind.

Um dann aber auch $\log (1+i)^x$ bis auf fünf Decimalzahlen genau zu erhalten, muſs man $\log (1+i)$ bis auf wenigstens sieben Decimalen aufsuchen, weil der Exponent x bis auf 100 steigen kann, also die siebente Decimalstelle von $\log (1+i)$ noch auf die fünfte Decimale von $\log (1+i)^x$ Einfluſs übt.

Das Discontiren bis zur Geburt ist gewiſs erwünscht, wenn auch junge Kinder in der einen oder anderen Form in die Versicherung aufgenommen werden. Sonst kann man discontiren bis zum jüngsten Alter. Sei dieses jüngste Alter gleich 10, so kann man die discontirten Lebenden mittels nachstehender Formel andeuten:

$$\frac{l_x}{(1+i)^{x-10}}.$$

Auch könnte man, statt die Zahlen l_x zu discontiren, dieselben aufzinsen bis zum höchsten in der Sterblichkeitstafel angegebenen Alter oder vielmehr bis zu dem diesem Alter folgenden Jahre; der aufgezinste Wert von l_x ist dann $l_x (1+i)^{\omega+1-x}$, wenn ω das höchste Alter der Sterblichkeitstafel ist. Der Formel (167) kann man dann nachstehende Form geben:

$$\frac{l_{x+n} (1+i)^{\omega+1-(x+n)}}{l_x (1+i)^{\omega+1-x}}.$$

Wenn man einen besonderen Tarif zusammenstellt, wobei die Versicherung mit 80 Jahren vertragsmäſsig enden soll, könnte man alle Zahlen bis 80 Jahren aufzinsen.

Hat man einmal die bis zum selben Alter discontirten Zahlen der Lebenden gebildet, so braucht man bei der Berechnung der Werte der künftigen Auszahlungen die Zinsen nicht mehr zu berücksichtigen, und kann man in den Wahrscheinlichkeiten der Auszahlungen die Anzahl der Lebenden durch die discontirten Zahlen ersetzen, wodurch man sogleich die Barwerte der Auszahlungen bekommen wird.

Lebenslängliche Leibrente.

91. Unter Leibrente versteht man eine Summe, die einer Person regelmäſsig ausgezahlt wird, so lange sie am Leben ist. Hat die Person das Alter x und erhält sie jedes Jahr die Summe 1, so kann man die einmalige Prämie dieser Leibrente auffassen als die einmalige Prämie

eines Kapitals 1, welches jedes Jahr im Erlebensfall auszuzahlen ist. Findet die Auszahlung jedesmal am Ende des Jahres statt, d. h. ist sie postnumerando (nachschüssig) zahlbar, so ergiebt sich nach Formel (168) die einmalige Prämie der Leibrente gleich

$$\frac{D_{x+1}}{D_x}+\frac{D_{x+2}}{D_x}+\frac{D_{x+3}}{D_x}+\ldots,$$

wo die Summirung bis ans Ende der Sterblichkeitstafel fortzusetzen ist, oder

$$=\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots}{D_x}.$$

Den nunmehrigen Zähler nennt man die Summe der discontirten Anzahl der Lebenden; wir wollen schreiben:

$$D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots=\Sigma D_{x+1}=N_x,$$

sodafs der Wert der postnumerando zahlbaren Leibrente im Betrage 1 per Jahr ist:

$$a_x=\frac{N_x}{D_x}. \qquad (169)$$

Wenn dagegen die Rente am Anfang jedes Jahres, also praenumerando (vorschüssig) zahlbar ist, so ist offenbar die einmalige Prämie um die Einheit gröfser, weil die Einheit dann auch am Anfang des ersten Jahres gezahlt wird. Der Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente ist daher

$$\mathfrak{a}_x=1+a_x=1+\frac{N_x}{D_x}=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots}{D_x}$$

oder:

$$\mathfrak{a}_x=\frac{\Sigma D_x}{D_x}=\frac{N_{x-1}}{D_x}. \qquad (170)$$

Zwar hat es an und für sich keinen Sinn, eine Leibrente zu kaufen, bei der man zugleich mit der Zahlung der Einlage schon Rente bezieht, doch hat, wie sich später zeigen wird, die Einführung des Begriffs der praenumerando zahlbaren Leibrente aus andern Gründen ihren Nutzen.

In mancher Hinsicht wäre es natürlicher gewesen, wenn

$$D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots=N_x,$$

statt $D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots=N_x$ gestellt wäre.

Es wurde aber die letztere Form gewählt, weil die postnumerando Leibrente auf den Vordergrund gestellt wurde. Um nicht in Widerspruch mit der universellen Notation zu geraten, wäre eine Änderung nicht zu empfehlen, selbst wenn dieselbe eine Besserung herbeiführen sollte.

92. Um die Berechnung von a_x für jede Altersstufe praktisch durchzuführen, stellt man eine Tafel auf für die Werte von N_x, die bei der höchsten Altersstufe der Sterblichkeitstafel anfängt. Ist diese Altersstufe 100, so bildet man nach einander

$$N_{99} = D_{100},\ N_{98} = N_{99} + D_{99},\ N_{97} = N_{98} + D_{98} \text{ u. s. w.}$$

Zur Berechnung von a_x wird man dann wieder in der Regel Logarithmen benutzen, denn es ist: $\log a_x = \log N_{x-1} - \log D_x$.

Weil hier von D_x und N_{x-1} selbst nicht die Rede ist, kann man aber auch die Gaussischen Logarithmen anwenden und von der Reihe der $\log D_x$ zur Reihe der $\log N_{x-1}$ gelangen, indem man mit Hilfe dieser Hilfslogarithmen unmittelbar berechnen kann:

$\log (D_{100} + D_{99})$ aus $\log D_{100}$ und $\log D_{99}$;

$\log (D_{100} + D_{99} + D_{98})$ aus $\log (D_{100} + D_{99})$ und $\log D_{98}$ u. s. w.

93. Man kann auch ohne Benutzung von N_x den Wert der Leibrente berechnen, indem man ihren Wert für jedes Alter aus dem für das folgende Altersjahr ableitet. Man hat nämlich:

$$a_{x+1} = \frac{N_x}{D_{x+1}},\ a_x = \frac{N_{x-1}}{D_x} = \frac{D_x + N_x}{D_x},$$

$$a_x - 1 = \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{N_x}{D_{x+1}};$$

d. h.

$$a_x - 1 = \frac{D_{x+1}}{D_x} a_{x+1},$$

$$a_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} a_{x+1},$$

da aber

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} = v\, p_x, \text{ (vergl. Nr. 89)}$$

wo p_x die Lebenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während des nächsten Jahres ist, so ergiebt sich:

$$a_x = 1 + v\, p_x\, a_{x+1}. \qquad (171)$$

Diese Formel kann auch leicht ohne Algebra bewiesen werden. Der Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente für den $x+1$-jährigen ist nämlich a_{x+1}; diese Leibrente, die der x-jährige nach einem Jahr im Erlebensfall genieſsen wird, hat augenblicklich den Wert

$$v\, p_x\, a_{x+1};$$

der Faktor v dient hierbei dazu, den Wert a_{x+1} auf die Gegenwart zu reduciren, während der Faktor p_x die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dafs der x-jährige die Leibrente a_{x+1} genieſsen wird. Nimmt man noch die Einheit für das erste Jahr hinzu, so erhält man a_x.

Wenn 100 die höchste Altersstufe der Sterblichkeitstafel ist, so ist $a_{100} = 1$, und rechnet man mit 4 %, dann ist:

$$a_{99} = 1 + \frac{1}{1.04} p_{99}; \quad a_{98} = 1 + \frac{1}{1.04} p_{98} \cdot a_{99};$$

$$a_{97} = 1 + \frac{1}{1.04} p_{97} \cdot a_{98}, \text{ u. s. w.}$$

Auch hier können die Gaussischen Logarithmen benutzt werden.

Wenn $\mathring{e}_x$ die mittlere Lebensdauer des x-jährigen ist, dann ist nach Formel (166):

$$p_x = \frac{\mathring{e}_x - \frac{1}{2}}{\mathring{e}_{x+1} + \frac{1}{2}} = \frac{e_x}{e_{x+1} + 1}$$

und man erhält:

$$a_x = 1 + v \frac{e_x}{e_{x+1} + 1} a_{x+1}.$$

Es ist also auch möglich, die Leibrententafel aus einer Tafel der mittleren Lebensdauer abzuleiten.

94. Man kann — und dies hat bisweilen seinen Nutzen — den Wert a_x in den Lebenswahrscheinlichkeiten der auf einander folgenden Altersstufen, jedesmal während eines Jahres, ausdrücken. Man hat nämlich:

$$a_x = 1 + v \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2 \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3 \cdot \frac{l_{x+3}}{l_x} + \ldots$$

Wenn jetzt p_x die Lebenswahrscheinlichkeit während eines Jahres ist und also

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x; \quad \frac{l_{x+2}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} = p_x \cdot p_{x+1};$$

$$\frac{l_{x+3}}{l_x} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \text{ u. s. w.},$$

so erhält man:

$$a_x = 1 + v p_x + v^2 p_x p_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1} p_{x+2} + \ldots \quad (172)$$

95. Um die Zahl der Decimalstellen zu bestimmen, bis auf welche man die Leibrente berechnen soll, mufs man in Betracht ziehen, dafs die Sterbenswahrscheinlichkeiten meist bis auf höchstens fünf Decimalen

angegeben werden. Wenn wir annehmen, was durchaus nicht ganz sicher ist, dafs die letzte Decimale noch genau ist, so würde man bei Benutzung der Formel (171) den Wert der Leibrente (1 per Jahr) noch nicht genau bis zur fünften Decimale angeben können; denn jede Sterbenswahrscheinlichkeit kann bis 0.000005 zu klein oder zu grofs sein, und bei den Additionen, welche stattfinden müssen, können sich die Fehler so addiren, dafs die fünfte Decimale der Summe ungenau wird.

Benutzt man Formel $a_x = \frac{N_{x-1}}{D_x}$ und sind die Anzahlen der Lebenden wie gewöhnlich Zahlen von höchstens fünf Stellen, so wird die Genauigkeit noch geringer und wird deshalb die Leibrente in vier Decimalen gewifs ausführlich genug angegeben; der fünften Decimale würde nicht mehr zu trauen sein, selbst wenn, wie hier vorausgesetzt ist, die Angaben, aus denen die Sterblichkeitstafeln geschöpft sind, völlig zuverlässig sind.

Eine Leibrententafel mit drei Decimalen ist für praktische Zwecke meist ausreichend.

Hieraus ergiebt sich, welche nutzlose Bemühung darin liegt, Leibrententafeln bis auf viele Decimalen zu berechnen, von denen die letzten durchaus keinen Wert haben.

Die aufgeschobene Leibrente (Pension).

96. Man sucht die einmalige Prämie einer Leibrente für einen x-jährigen unter der Voraussetzung, dafs die erste Rentenzahlung nach n Jahren stattfinden soll.

Wenn der x-jährige nach n Jahren noch lebt, so ist der Wert der Pension (die dann anfängt) a_{x+n}. Man kann also sagen: der x-jährige, versichert sich für ein Kapital a_{x+n}, zahlbar für den Fall, dafs er nach n Jahren noch am Leben ist.

Die Einheit nach n Jahren hat als Jetztwert $\frac{D_{x+n}}{D_x}$, also die Pension den Jetztwert:

$$ {}_n|\,a_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}\, a_{x+n}. \qquad (173)$$

Man kann diesen Ausdruck dadurch vereinfachen, dafs man substituirt:

$$ a_{x+n} = \frac{N_{x+n-1}}{D_{x+n}}, $$

denn dann erhält man als den Wert der Pension:

$$\frac{N_{x+n-1}}{D_x} = \frac{\Sigma D_{x+n}}{D_x} = {}_n|a_x\,, \tag{174}$$

wie sich auch sofort ergiebt, wenn man die gegenwärtigen Werte der nach einander folgenden Zahlungen, jede zum Betrage der Einheit, addirt.

Sofort beginnende temporäre Leibrente.

97. Beginnt die Leibrente unmittelbar, wird sie aber höchstens n Mal ausgezahlt, so ist ihr Wert offenbar gleich dem Wert der sofort beginnenden lebenslänglichen Leibrente, vermindert um den der n Jahre aufgeschobenen Leibrente, d. h. gleich

$$a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\, a_{x+n} = {}_n a_x \text{ oder } a_{x\,\overline{n}|}$$

was sich zurückführen läfst auf

$$\frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}, \tag{175}$$

welche Formel auch leicht aus den einzelnen Zahlungen zu schliefsen ist.

Indessen setzt Formel (175) wieder voraus, dafs die erste Zahlung gleich beim Abschlufs der Versicherung stattfindet. Wenn die erste Zahlung erst ein Jahr später erfolgt und n Zahlungen geschehen, so ist der Wert einer solchen temporären Leibrente:

$$\frac{\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+n+1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = {}_n a_x \text{ oder } a_{x\,\overline{n}|}. \tag{176}$$

Die aufgeschobene temporäre Leibrente (z. B. ein Stipendium).

98. Soll die erste Zahlung m Jahre nach dem Abschlufs der Versicherung und dann, immer den Erlebensfall vorausgesetzt, n Jahre hindurch erfolgen, so ist der Wert dieser Leibrente offenbar gleich dem Werte einer m Jahre aufgeschobenen Leibrente, vermindert um den einer $m+n$ Jahre aufgeschobenen, und deshalb ist die einmalige Prämie

$$\frac{D_{x+m}}{D_x} a_{x+m} - \frac{D_{x+m+n}}{D_x}\, a_{x+m+n} = \frac{N_{x+m-1} - N_{x+m+n-1}}{D_x} = {}_{m|n} a_x. \tag{177}$$

Wenn man keine Tafel für die Werte N_x besitzt, wäre es unpraktisch, eine solche eigens zur Verwendung der Formel (177) aufzustellen. Will man z. B. den Wert eines Stipendiums (1 per Jahr) für ein 12-jähriges Kind berechnen, wenn dieses Stipendium fünf Jahre hindurch und zwar erstmalig im 18. Lebensjahr gezahlt werden soll, so ist die entsprechende einmalige Prämie

$$\frac{D_{18}+D_{19}+D_{20}+D_{21}+D_{22}}{D_{12}}. \qquad (178)$$

Aufserdem erkennt man, dafs der Wert $N_{x+m-1}-N_{x+m+n-1}$ sich nicht ändert, auch wenn die Summierung von D_{x+m} und D_{x+m+n} nicht bis ans Ende der Sterblichkeitstafel ausgedehnt wird, sondern in beiden Fällen nur bis zu demselben Alter (z). Es ist dann

$$N_{x+m-1}=D_{x+m}+D_{x+m+1}+\ldots+D_z,$$

und

$$N_{x+m+n-1}=D_{x+m+n}+D_{x+m+n+1}+\ldots.+D_z.$$

Dies verkürzt die Rechnung, falls man die Alter $>z$ Jahr in den Tarif nicht aufnimmt und die N nicht bis zum Ende der Sterblichkeitstafel besitzt.

Veränderliche Leibrente.

99. Erfragt sei der Wert einer Leibrente, die am Anfang des 1. Jahres 1, des 2. Jahres $1+\alpha$, des 3. Jahres $1+2\alpha$ u. s. w. beträgt, die also jedes Jahr um α zunimmt. Wenn man die gegenwärtigen Werte der einzelnen Zahlungen zusammenfafst, so ergiebt sich als Wert dieser veränderlichen Leibrente:

$$\frac{D_x+(1+\alpha)D_{x+1}+(1+2\alpha)D_{x+2}+(1+3\alpha)D_{x+3}+\ldots.}{D_x},$$

was sich auch schreiben läfst:

$$\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots.+\alpha(D_{x+1}+2D_{x+2}+3D_{x+3}+\ldots)}{D_x}.$$

Setzen wir jetzt in üblicher Weise:

$$\begin{aligned}
D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots. &= N_{x-1},\\
D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots. &= N_x,\\
D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots. &= N_{x+1},\\
D_{x+3}+\ldots. &= N_{x+2}.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

und addiren wir diese Gleichungen mit Ausnahme der ersteren, so ergiebt sich:

$$D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + 3\,D_{x+3} + \ldots . =$$
$$= N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots .$$

was wir zur Abkürzung schreiben wollen:

$$\Sigma\Sigma D_{x+1} = \Sigma N_x = S_x .$$

S_x entsteht also aus den auf einander folgenden Zahlen N. Wenn 100 die höchste Altersstufe der Sterblichkeitstafel ist, so ist

$$S_{99} = N_{99} = D_{100},$$
$$S_{98} = S_{99} + N_{98},\ S_{97} = S_{98} + N_{97} \text{ u. s. w.}$$

Der Wert der jährlich um α zunehmenden Leibrente ist also:

$$\frac{N_{x-1} + \alpha S_x}{D_x}. \tag{179}$$

Wenn $\alpha = 1$, so beträgt die Leibrente am Anfang des 1. Jahres 1, des 2. Jahres 2, des 3. Jahres 3 u. s. w.; der Wert der Leibrente ist alsdann

$$\frac{N_{x-1} + S_x}{D_x} = \frac{S_{x-1}}{D_x}.$$

Nimmt man α negativ, so erhält man eine jährlich um α abnehmende Leibrente, deren Wert also ist

$$\frac{N_{x-1} - \alpha S_x}{D_x}. \tag{180}$$

Wenn der Zahlenwert von α groſs genug ist, kann die Leibrente sogleich oder nach einigen Jahren negativ werden, denn y Jahr nach Beginn beträgt die Auszahlung $1 - y\,\alpha$; sie ist also negativ, wenn $y\,\alpha > 1$. Es heifst dies mit anderen Worten, daſs für $y\,\alpha > 1$ das Empfangen einer Leibrente übergeht in das Zahlen einer Leibrente. Wir werden Gelegenheit finden, hiervon Gebrauch zu machen.

100. Betrachten wir noch die praenumerando zahlbare Leibrente, die alle 5 Jahre um $\frac{1}{5}$ zunimmt, bis ihr Betrag das Doppelte des ursprünglichen ist. In den ersten 5 Jahren ist dann der Betrag 1, während der zweiten 5 Jahre $1\frac{1}{5}$, während der dritten $1\frac{2}{5}$, während der übrigen Jahre 2. Der Wert ist folglich:

$$\frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+4} + 1\frac{1}{5}(D_{x+5} + \ldots D_{x+9}) +}{D_x}$$
$$\frac{+ 1\frac{2}{5}(D_{x+10} + \ldots D_{x+14}) + 2\,(D_{x+15} + \ldots)}{D_x}.$$

Man erkennt leicht, dafs man hierfür schreiben kann:

$$\frac{N_{x-1} + \frac{1}{5}(N_{x+4} + N_{x+9} + N_{x+14})}{D_x}. \qquad (181)$$

Ebenso ist

$$\frac{N_{x-1} - \frac{1}{5}(N_{x+4} + N_{x+9} + N_{x+14})}{D_x} \qquad (182)$$

der Wert der Leibrente, die mit 1 anfängt, alle 5 Jahre um $\frac{1}{5}$ abnimmt, und also nach 15 Jahren $= 0$ wird, sodafs die Leibrente höchstens 15 Jahre zu zahlen ist.

Fragen wir schliefslich noch nach dem Wert der praenumerando zahlbaren temporären Leibrente, die in den ersten 5 Jahren 1, dann $1\frac{1}{2}$ beträgt. Soll die Rente im Ganzen n Jahre dauern, so ergiebt sich, indem man den verschiedenen Zahlungen nachgeht, leicht als Wert der Leibrente:

$$\frac{N_{x-1} - N_{x+n-1} + \frac{1}{2}(N_{x+4} - N_{x+n-1})}{D_x}. \qquad (183)$$

Diese Formel läfst sich auch wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{D_x}\left[\tfrac{3}{2}(N_{x-1} - N_{x+n-1}) - \tfrac{1}{2}(N_{x-1} - N_{x+4})\right] = \tfrac{3}{2}\,a_{x\,\overline{n}|} - \tfrac{1}{2}\,a_{x\,\overline{5}|},$$

womit die Leibrente in sogleich anfangenden temporären Leibrenten ausgedrückt erscheint.

Der Wert der veränderlichen Leibrente kann stets mittels sogleich anfangender Leibrenten ausgedrückt werden.

Es sei der Betrag dieser Rente am Ende des ersten Jahres k_1, des zweiten Jahres k_2, des dritten Jahres k_3, ... des n^{ten} Jahres k_n, so ist der Gesammtwert der discontirten Auszahlungen

$$k_1 D_{x+1} + k_2 D_{x+2} + k_3 D_{x+3} + \ldots + k_n D_{x+n};$$

wofür man schreiben kann:

$$\begin{aligned}
&k_n (D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n}) + \\
&+ (k_{n-1} - k_n)(D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}) + \\
&+ (k_{n-2} - k_{n-1})(D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-2}) + \\
&+ \ldots \\
&+ (k_2 - k_3)(D_{x+1} + D_{x+2}) \\
&+ (k_1 - k_2) D_{x+1}
\end{aligned}$$

Dividirt man mit D_x, so findet man zum Wert der veränderlichen temporären Leibrente:

$$k_n \cdot |_n a_x + (k_{n-1} - k_n) \cdot |_{n-1} a_x + (k_{n-2} - k_{n-1}) \cdot |_{n-2} a_x + \ldots + (k_2 - k_3) \cdot |_2 a_x + (k_1 - k_2) \cdot |_1 a_x \quad (184)$$

Lebenslängliche Kapitalversicherung auf den Todesfall.

101. Man fragt nach der Summe, für welche jemand, der x Jahre alt ist, die Versicherung der Summe 1, zahlbar am Ende des Sterbejahres, kaufen kann. Von den l_x Personen im Alter x leben nach der Sterblichkeitstafel nach einem Jahre noch l_{x+1}, es sterben also nach dieser Tafel im Laufe des Jahres $l_x - l_{x+1} = d_x$. Die Summe 1, die am Ende des ersten Jahres unbedingt fällig wird, hat am Anfang des ersten Jahres den Wert $\frac{1}{1+i}$, also ist der gegenwärtige Wert der eventuellen Auszahlung

$$\frac{1}{1+i} \cdot \frac{d_x}{l_x} = v \frac{d_x}{l_x},$$

was man auch schreiben kann:

$$v^{x+1} d_x : v^x l_x.$$

Setzen wir jetzt

$$v^{x+1} d_x = C_x$$

und wieder wie oben

$$v^x l_x = D_x,$$

so mufs für die Möglichkeit der Auszahlung in Folge des Ablebens im ersten Jahre gezahlt werden $\frac{C_x}{D_x}$.

Im zweiten Jahre sterben $l_{x+1} - l_{x+2} = d_{x+1}$ Personen, also mufs für die Möglichkeit der Auszahlung in Folge des Ablebens im zweiten Jahre gezahlt werden:

$$v^2 \frac{d_{x+1}}{l_x} = \frac{C_{x+1}}{D_x}, \text{ u. s. w.}$$

Weil die Versicherung lebenslänglich ist, mufs ein ähnlich gebildeter Betrag für die Möglichkeit des Sterbens in allen nach einander folgenden Jahren gezahlt werden; die einmalige Prämie für die Lebensversicherung ist also:

$$\frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots}{D_x},$$

wo die Summe im Zähler sich bis ans Ende der Sterblichkeitstafel fortsetzt. Schreibt man jetzt:

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots = \Sigma C_x = M_x,$$

so ergiebt sich als einmalige Prämie:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}. \tag{185}$$

Um nun einen vollständigen Tarif aufzustellen, kann man eine Tafel construiren, welche die Anzahl der Todesfälle in jedem Alter angiebt, d. h. eine Tafel für die Werte $d_x = l_x - l_{x+1}$, ferner eine Tafel für

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

(Tafel der discontirten Zahlen der Gestorbenen), endlich eine Tafel für $\Sigma C_x = M_x$, die mit dem höchsten Alter anfängt. Sei das höchste Alter der Tafel 100, so ist nach dieser die Anzahl der Todesfälle $d_{100} = l_{100}$, folglich

$$C_{100} = \frac{l_{100}}{(1+i)^{101}},$$

$$M_{100} = C_{100},\ M_{99} = M_{100} + C_{99},$$

$$M_{98} = M_{99} + C_{98},\ \text{u. s. w.}$$

Nimmt man in Formel (185) $i = 0$, so geht sie über in

$$\frac{d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots}{l_x} = 1,$$

wie dies zu erwarten war.

102. Man kann die einmalige Prämie für diese Lebensversicherung auch aus der Prämie für das um 1 Jahr höhere Alter ableiten.

Wie wir in Formel (185) schon gethan haben, bezeichnen wir die einmalige Prämie für das Alter x mit A_x, also für das Alter $x+1$ mit A_{x+1}; man hat alsdann:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} = \frac{C_x + M_{x+1}}{D_x} =$$

$$= \frac{C_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{M_{x+1}}{D_{x+1}} =$$

$$= \frac{C_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} A_{x+1},$$

oder, was dasselbe ist:

$$A_x = v \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + v \frac{l_{x+1}}{l_x} A_{x+1},$$

Setzt man jetzt die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während eines Jahres $= q_x$, sodafs

$$\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = q_x \text{ und } \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x = p_x,$$

so erhält man:

$$A_x = v\,[q_x + (1 - q_x)\,A_{x+1}] = v\,(q_x + p_x\,A_{x+1}) \qquad (186)$$

Sei wieder 100 das höchste Alter der Sterblichkeitstafel, dann ist

$$A_{100} = v, \text{ und also } A_{99} = v\,(q_{99} + p_{99}\,v),$$

$$A_{98} = v\,(q_{98} + p_{98}\,A_{99}) \text{ u. s. w.}$$

Die Formel (186) kann ganz direkt bewiesen werden. Wenn nämlich ein x-jähriger eine Lebensversicherung auf den Todesfall kauft, die aber nicht ausgezahlt wird, wenn er im ersten Jahre stirbt, so mufs er dafür bezahlen

$$v\,p_x\,A_{x+1},$$

denn A_{x+1} ist die einmalige Prämie des $x+1$-jährigen; der Wert der Versicherung, die nach einem Jahr unbedingt anfangen wird, ist also für einen x-jährigen $v\,A_{x+1}$; nun ist aber die Wahrscheinlichkeit, dafs ein x-jähriger nach einem Jahr noch am Leben sein wird, p_x, der x-jährige mufs also für diese Versicherung zahlen:

$$v\,p_x\,A_{x+1}.$$

Um auch während des ersten Jahres versichert zu sein, mufs er noch $v\,q_x$ zulegen, sodafs sich die einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung stellt auf:

$$A_x = v\,q_x + v\,p_x\,A_{x+1}.$$

102*. Wenn nur ein Tarif für lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall in Frage steht, kann man Formel (185) sehr gut verwenden. Sie läfst sich aber so umformen, dafs die einmalige Prämie in Zahlen ausgedrückt wird, die auch zu einem andern Zwecke gebraucht werden.

In dem Ausdruck

$$\frac{M_x}{D_x} = \frac{1}{D_x}\,(v^{x+1}\,d_x + v^{x+2}\,d_{x+1} + v^{x+3}\,d_{x+2} + \ldots)$$

ist allgemein

$$d_{x+n} = l_{x+n} - l_{x+n+1},$$

also

$$v^{x+n+1}\,d_{x+n} = v \cdot v^{x+n}\,l_{x+n} - v^{x+n+1}\,l_{x+n+1} =$$

$$= v\,D_{x+n} - D_{x+n+1}.$$

Der Ausdruck $\frac{M_x}{D_x}$ wird also:

$$\frac{1}{D_x}\left[v D_x - D_{x+1} + v D_{x+1} - D_{x+2} + v D_{x+2} - D_{x+3} + \ldots.\right] =$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[v (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) - (D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots)\right] =$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[v N_{x-1} - N_x\right] =$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[v N_{x-1} - N_{x-1} + D_x\right] =$$

$$= 1 - (1 - v)\frac{N_{x+1}}{D_x} =$$

$$= 1 - \frac{i}{1+i}\frac{N_{x-1}}{D_x},$$

d. h.

$$A_x = 1 - \frac{i}{1+i} a_x . \qquad (187)$$

Setzt man $\frac{i}{1+i} = d$, so kommt

$$A_x = 1 - d \cdot a_x .$$

Mit d wird der im Anfang des Jahres bezahlbare Zins (i) der Einheit angedeutet.

Rechnet man mit 4 %, so ist

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.04}{1.04} = \frac{1}{26}, \text{ also } A = 1 - \frac{1}{26} a,$$

wobei zur Vereinfachung der Index x weggelassen ist.

Die einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall läfst sich also sehr leicht aus dem Wert der sofort beginnenden vorschüfsigen lebenslänglichen Leibrente ableiten. Indessen beachte man wohl, dafs bei der Anwendung a berechnet sein mufs nach der Sterblichkeitstafel, die benutzt wird für die Auszahlung beim Todesfall und nicht nach der Tafel, auf welche die Versicherungs-Gesellschaft ihre Leibrententarife basirt. Formel (187) kann auf viele Weisen direkt bewiesen werden; zwei solcher Beweise wollen wir geben.

Es sei die gesuchte einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung von 1, am Ende des Sterbensjahres zahlbar, $= A_x$.

Für die Summe 1 kauft man eine (ewige) Rente i, die fortwährend am Ende jedes Jahres zahlbar ist; für A_x kauft man eine ewige Rente i, die zum ersten Male am Ende desjenigen Jahres gezahlt wird, das dem Sterbejahre des x-jährigen folgt, für $1 - A_x$ kauft man also eine Rente i per Jahr, zahlbar am Ende jedes Jahres, so lange der x-jährige lebt, und noch zum letzten Male am Ende des Sterbejahres, oder was auf dasselbe hinauskommt, eine Rente $\frac{i}{1+i} = d$, welche zahlbar ist am Anfange jedes Jahres, so lange der x-jährige noch lebt, zum letzten Male am Anfange seines Sterbejahres; m. a. W. für $1 - A_x$ kauft der x-jährige eine praenumerando zahlbare Leibrente vom Betrage $\frac{i}{1+i}$ per Jahr, d. h.

$$1 - A_x = \frac{i}{1+i} a_x \text{ und folglich } A_x = 1 - \frac{i}{1+i} a_x .$$

Der zweite Beweis ist folgender:

A_x ist gleich dem gegenwärtigen Wert der Einheit, zahlbar am Ende jedes Jahres bis ans Ende des Sterbejahres, d. h. $= \frac{A_x}{1+i}$, vermindert um den gegenwärtigen Wert der Einheit, zahlbar am Anfang jedes Jahres bis zum Anfang des Sterbejahres, mit Ausnahme des ersten Jahres, d. h. vermindert um $a_x - 1$. Die Differenz giebt Formel (187).

Aufgeschobene Kapital-Versicherung auf den Todesfall.

103. Wenn als Bedingung für die Auszahlung eines Kapitals (immer die Einheit) im Falle des Todes gestellt ist, dafs der Tod nicht innerhalb der nächsten n Jahre (Carrenzzeit) eintritt, so läfst sich die einmalige Prämie aus Formel (185) einfach dadurch erhalten, dafs man im Zähler die n ersten Glieder wegläfst. Die einmalige Prämie wird also:

$$\frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + \dots}{D_x}$$

oder

$$ {}_n|A_x = \frac{\Sigma C_{x+n}}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x}. \qquad (188)$$

Man kann diese Formel auch in folgender Weise ableiten.

Sei A_x die einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung eines x-jährigen, also A_{x+n} diejenige eines $x+n$-jährigen. Wenn jetzt

der x-jährige eine um n Jahr aufgeschobene Versicherung kaufen will, so müfste er, wenn Gewifsheit darüber bestände, dafs er $x+n$ Jahr alt wird, dafür $v^n A_{x+n}$ zahlen; da aber die Wahrscheinlichkeit, dieses Alter zu erreichen, nur $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ ist, so ergiebt sich als die gesuchte einmalige Prämie:

$$v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} A_{x+n},$$

was man schreiben kann:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} A_{x+n}. \qquad (188^*)$$

Diese Formel läfst sich, wenn A_{x+n} bekannt ist, leicht anwenden; andernfalls setzt man

$$A_{x+n} = \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}},$$

und dann wird die einmalige Prämie:

$$\frac{M_{x+n}}{D_x} = {}_n| A_x,$$

wie oben.

Endlich kann man sie auch leicht in a ausdrücken, nämlich in der Form:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x}(1 - d \cdot a_{x+n}).$$

Temporäre (oder kurze) Versicherung auf den Todesfall.

104. Wir fragen nach dem Wert der Versicherung auf den Todesfall, wenn die Auszahlung nur stattfindet beim Ableben innerhalb der nächsten n Jahre. Es ist klar, dafs die einmalige Prämie der Differenz zwischen dem Wert der lebenslänglichen und dem der n Jahr aufgeschobenen Versicherung gleich ist, dafs also diese einmalige Prämie ist:

$$A_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} A_{x+n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = {}_n| A_x. \qquad (189)$$

Der letztere Ausdruck könnte auch sofort aus den n möglichen Zahlungen beim Ableben abgeleitet werden. Wenn die Anzahl der Jahre, wo die Versicherung währt, nur gering ist, so wäre es unzweckmäfsig, M zu gebrauchen. Dauert z. B. die Versicherung drei Jahre, so ist die einmalige Prämie:

$$\frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2}}{D_x}.$$

Man kann also das Formiren der Zahlen M vermeiden, und keinesfalls braucht M_x aus der Summe der C für alle Altersstufen der Sterblichkeitstafel zu bestehen. Ist das höchste Alter, wo im Todesfall eine Auszahlung stattfinden wird, 75 Jahr, so wäre es nutzlose Arbeit, unter M_x etwas anderes zu verstehen als

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{75}.$$

Von ganz besonderen Umständen abgesehen, kann man annehmen, dafs eine temporäre Versicherung mit langer Dauer unpraktisch ist; so wäre es im Allgemeinen eine grofse Thorheit, wenn ein 60-jähriger eine Lebensversicherung für eine Dauer von 20 Jahren kaufte; denn bei einem verhältnismäfsig kleinen Zuschlag könnte er sich lebenslänglich versichern.

105. Die Formel (189) läfst sich auch mittels der Gröfsen a ausdrücken; man erhält dann für die einmalige Prämie:

$$1 - d \cdot a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(1 - d \cdot a_{x+n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - d \cdot \left(a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - d \cdot a_{x\,\overline{n}|}. \qquad (190)$$

weil

$$a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n} = {}_n a_x = a_{x\,\overline{n}|}$$

der Wert der temporären Leibrente (vergl. No. 97) ist; man erhält also für die einmalige Prämie auch folgenden Ausdruck:

$${}_n A_x = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - d \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}. \qquad (191)$$

Temporäre Versicherung auf den Todesfall mit bestimmter Verfallzeit.

106. Bei der temporären Versicherung, welche wir in den vorhergehenden Abschnitten betrachteten, setzten wir voraus, dafs die Auszahlung am Ende des Sterbejahres stattfindet. Man kann aber die Bedingung dahin stellen, dafs die Auszahlung, die nur im Todesfall inner-

halb der nächsten n Jahre stattfindet, erst erfolgt, wenn die n Jahre vorüber sind.

Sei der Versicherte beim Beitritt wieder x Jahre alt; wenn es gewifs wäre, dafs er innerhalb der n Jahre sterben würde, so wäre der Jetztwert v^n; die Wahrscheinlichkeit aber, dafs er nach n Jahren gestorben sein wird, ist $1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x$, also ist die einmalige Prämie:

$$v^n (1 - {}_np_x) = v^n - \frac{D_{x+n}}{D_x} = v^n - {}_nE_x. \qquad (192)$$

Die rechte Seite von (192) läfst sich auch folgendermafsen deuten: v^n ist der Jetztwert der Einheit, die man unbedingt nach n Jahren erhalten wird, $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ ist der Wert der Einheit, die ein x-jähriger nach n Jahren erhält, wenn er dann noch lebt (No. 89), die Differenz ist also der Wert der Einheit, die nach n Jahren ausgezahlt wird, wenn der x-jährige bis dahin gestorben ist.

Versicherung auf den Todesfall mit veränderlicher Auszahlung.

107. Wenn beim Ableben innerhalb des ersten Jahres die Auszahlung K_1 beträgt, beim Ableben im zweiten Jahre K_2, im dritten Jahre K_3, u. s. w., so ergiebt sich als einmalige Prämie:

$$\frac{K_0 C_x + K_1 C_{x+1} + K_2 C_{x+2} + \cdots}{D_x}. \qquad (193)$$

Wenn beim Ableben innerhalb des ersten Jahres die Auszahlung 1 beträgt und dieselbe mit jedem folgenden Jahre um α zunimmt, so ist $K_0 = 1$, $K_1 = 1 + \alpha$, $K_2 = 1 + 2\alpha$ u. s. w., und findet man für die einmalige Prämie:

$$\frac{C_x + (1+\alpha) C_{x+1} + (1+2\alpha) C_{x+2} + (1+3\alpha) C_{x+3} + \cdots}{D_x} \qquad (194)$$

oder, bei einer der Nr. 99 analogen Umbildung

$$\frac{M_x + \alpha (M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \cdots)}{D_x}$$

Setzen wir

$$M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+2} + \cdots = \Sigma M_{x+1} = R_{x+1},$$

so kann man für die einmalige Prämie schreiben:

$$\frac{M_x + \alpha R_{x+1}}{D^x} = A_x + \alpha \frac{R_{x+1}}{D_x}. \qquad (195)$$

Wenn $\alpha = 1$, sodafs beim Ableben im ersten Jahr 1, im zweiten Jahr 2, im n^{ten} Jahr n ausgezahlt wird, so erhält die einmalige Prämie die einfachere Form:

$$\frac{\Sigma M_x}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}.$$

Wenn man die Tarife der einmaligen Prämien für zwei Werte von α berechnet hat, so ist es leicht, daraus die für alle anderen Werte von α abzuleiten.

Stellen wir für einen Augenblick die einmalige Prämie bei der jährlichen Zunahme um α bezw. β dar durch

$$H_\alpha = A + \alpha B,$$

bezw.

$$H_\beta = A + \beta B,$$

so folgt

$$B = \frac{H_\alpha - H_\beta}{\alpha - \beta}, \quad A = \frac{\alpha H_\beta - \beta H_\alpha}{\alpha - \beta},$$

also ist

$$H_\gamma = A + \gamma B = \frac{(\gamma - \beta) H_\alpha - (\gamma - \alpha) H_\beta}{\alpha - \beta}.$$

Ist im besonderen Falle $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, dann ist

$$H_\gamma = \tfrac{1}{2}(H_\alpha + H_\beta).$$

Wenn wir also bei jährlicher Zunahme der Auszahlung um 0.01 die Prämie mit $H_{0.01}$, bei Zunahme um 0.05 mit $H_{0.05}$ u. s. w. bezeichnen so erhält man

$$H_{0.03} = \tfrac{1}{2}(H_{0.01} + H_{0.05}),$$
$$H_{0.04} = \tfrac{1}{2}(H_{0.03} + H_{0.05}) = \tfrac{1}{4}(H_{0.01} + 3\,H_{0.05})$$
$$H_{0.02} = \tfrac{1}{2}(H_{0.01} + H_{0.03}) = \tfrac{1}{4}(3\,H_{0.01} + H_{0.05}) \text{ u. s. w.}$$

Betrachten wir den in der Praxis häufig vorkommenden Fall, dafs die Versicherungssumme jedes Jahr um 5 % der anfänglichen zunimmt, die Zunahme aber aufhört, wenn die Summe verdoppelt ist.

Wenn die Versicherungssumme anfänglich wieder 1 ist, so findet man leicht für die einmalige Prämie:

$$\frac{1}{D_x}(C_x + 1.05\,C_{x+1} + 1.10\,C_{x+2} + 1.15\,C_{x+3} + \ldots.$$
$$+ \ldots. + 1.95\,C_{x+19} + 2\,C_{x+20} + 2\,C_{x+21} + \ldots.).$$

Der eingeklammerte Ausdruck läfst sich zurückführen auf:

$$M_x + 0.05\,[\,C_{x+1} + 2\,C_{x+2} + 3\,C_{x+3} + \ldots. + 19\,C_{x+19} +$$
$$+ 20\,C_{x+20} + 20\,C_{x+21} + \ldots.]$$

Der Ausdruck zwischen den [ ] ist:

$$\Sigma\Sigma C_{x+1} - \Sigma\Sigma C_{x+21} = \Sigma M_{x+1} - \Sigma M_{x+21} = R_{x+1} - R_{x+21},$$

sodafs sich die gesuchte einmalige Prämie für eine Versicherungssumme, die von 1 an jährlich um 5% zunimmt, bis sie sich verdoppelt hat, stellt auf

$$\frac{M_x + 0.05\,(R_{x+1} - R_{x+21})}{D_x}. \qquad (196)$$

Ist die veränderliche Versicherung eine temporäre (mit n-jähriger Dauer), so kann man dieselbe zurückführen zu mehreren temporären gleichbleibenden Versicherungen. Man hat nämlich

$$\frac{1}{D_x}(K_0 C_x + K_1 C_{x+1} + K_2 C_{x+2} + \ldots + K_n C_{x+n}) =$$

$$= \frac{1}{D_n}\Big[K_n (C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n}) +$$
$$+ (K_{n-1} - K_n)(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1})$$
$$+ (K_{n-2} - K_{n-1})(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-2})$$
$$+ \ldots$$
$$+ (K_1 - K_2)(C_x + C_{x+1})$$
$$+ K_0 - K_1)\, C_x \Big] =$$

$$= K_n \cdot {}_nA_x + (K_{n-1} - K_n)\,{}_{n-1}A_x + (K_{n-2} - K_{n-1})\,|_{n-2}A_x +$$
$$+ \ldots + (K_1 - K_2)\,{}_2A_x + (K_0 - K_1)\,|_1A_x .$$

Es versteht sich, dafs alle die Zahlen $K_{n-1} - K_n$ oder einige derselben negativ sein können.

Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben.

108. Bei allen unseren Formeln für Versicherung auf den Todesfall ist vorausgesetzt, dafs die Auszahlung am Ende des Sterbejahres stattfindet. In Wirklichkeit geschieht dies nicht; einige Gesellschaften zahlen drei Monate, andere so bald wie möglich nach dem Tode; viele Gesellschaften betrachten ihre Prämien, die auf Grund der Annahme berechnet sind, dafs die Auszahlung am Ende des Sterbejahres erfolgt, als Netto-Prämien, auch wenn sie früher auszahlen. Wenn die Sterblichkeitstafel und der Zinsfufs vorsichtig genug gewählt sind, braucht man von dieser Seite wenig oder keine Verlegenheiten zu befürchten. Viele französische Gesellschaften jedoch, die offenbar ihrer Sterblichkeits-

tafel nicht ganz trauen, finden es nötig, die Netto-Prämien auf die Voraussetzung zu begründen, dafs die Auszahlung am Anfang des Sterbejahres stattfindet. Wenn eine solche auch an und für sich keinen Sinn hat, so könnte sie doch für eine Versicherungs-Gesellschaft zur Wirklichkeit werden, wenn diese bei der Auszahlung zugleich den Zins vom Anfang des Sterbejahres bis zum Tage der Auszahlung zu zahlen hätte.

Bei dieser Vorauszahlung geschieht die Auszahlung ein Jahr früher als bisher angenommen wurde, sodafs wir alle unsere Formeln für Auszahlung auf den Todesfall mit $1+i$ multipliciren müssen. Die einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung der Einheit auf den Todesfall ist daher nach Formel (187) nunmehr:

$$1+i-i\,a_x = 1-i\,a_x.$$

Wenn man es nötig findet, die Auszahlung als unmittelbar nach dem Ableben erfolgend vorauszusetzen, dann kann man annehmen, dafs die Sterblichkeit gleichmäfsig über das Jahr verteilt ist, eine Annahme freilich, die selbst bei einer sehr grofsen Anzahl von Todesfällen nur sehr näherungsweise mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

Wenn wir nun das Ableben gleichmäfsig über das Jahr verteilt annehmen, erinnern wir uns (vergl. No. 28), dafs die Auszahlung einer Summe 1 in einer unendlichen Anzahl von gleichen Terminen während eines Jahres der Auszahlung $\frac{i}{L(1+i)}$ am Ende des Jahres gleichwertig ist.

Um also die Prämie, die man auf die Voraussetzung gegründet hat, dafs die Auszahlung am Ende des Sterbejahres stattfindet, auf eine Prämie für die Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben umzurechnen, mufs man erstere mit $\frac{i}{L(1+i)}$ multipliciren; deshalb wird jetzt die einmalige Prämie der Lebensversicherung:

$$\overline{A}_x = \left(1-\frac{i}{1+i}\,a_x\right)\cdot \frac{i}{L(1+i)} = (1-i\,a_x)\,\frac{i}{(1+i)\,L(1+i)}. \quad (197)$$

Den Reduktionsfaktor durch $\sqrt{1+i}$ zu ersetzen wie man oft thut, bedeutet eine Annäherung, welche die Sache nur wenig oder gar nicht erleichtert; der Faktor $\frac{i}{L(1+i)}$ betrifft eine Auszahlung unmittelbar nach dem Tode, $\sqrt{1+i}$ mitten im Jahre. Will man die Rechnung vereinfachen, so ersetze man den Faktor durch $1+\frac{1}{2}i$; rechnet man mit $4\,\%$, so ist

$$\frac{i}{L(1+i)} = 1.01987,\ \sqrt{1+i} = 1.01980,\ 1+\tfrac{1}{2}i = 1.02.$$

Weil die Voraussetzung des gleichmäfsigen Ablebens selbst nicht ganz genau ist, ist eine zu weitgehende Peinlichkeit beim Rechnen wertlos.

Rechnet man mit 4 % und benutzt man eine Sterblichkeitstafel, die sehr genau die wirkliche Sterblichkeit wiedergiebt, so thut man am besten, die Prämie für den Fall der Auszahlung am Ende des Todesjahres dadurch in die Netto-Prämie für den Fall der Auszahlung bald nach dem Tode überzuführen, dafs man sie um 2 % erhöht.

Soll die Auszahlung drei Monate nach dem Tode erfolgen, so mufs diese Erhöhung 1 % betragen.

Für den späteren Gebrauch wollen wir aber die einmalige Prämie für die unmittelbar nach dem Tode zahlbare Kapitalversicherung auch darstellen durch die Annäherung:

$$\left(1-\frac{i}{1+i}\,\mathfrak{a}\right)\sqrt{1+i}.$$

Ersetzt man hier die praenumerando zahlbare Leibrente a durch die postnumerando zahlbare, d. h. setzt man $\mathfrak{a}=a+1$, so wird die Formel

$$\frac{1-i\,a}{\sqrt{1+i}}. \tag{198}$$

Die Leibrente, zurückgeführt zu Auszahlungen im Ablebensfalle.

109. Der Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente stellt sich wie folgt dar:

$$\mathfrak{a}_x=\frac{1}{l_x}\,(l_x+v\,l_{x+1}+v^2\,l_{x+2}+v^3\,l_{x+3}+\ldots)$$

Weiter stellt sich

$$\begin{aligned}
l_x &= d_x+d_{x+1}+d_{x+2}+d_{x+3}+\ldots\\
l_{x+1} &= \quad d_{x+1}+d_{x+2}+d_{x+3}+\ldots\\
l_{x+2} &= \quad\quad d_{x+2}+d_{x+3}+\ldots\\
l_{x+3} &= \quad\quad\quad d_{x+3}+\ldots\\
&\vdots\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Substituirt man diese Werte in den Ausdruck für $\mathfrak{a}_x$, so bekommt man:

$$\mathfrak{a}_x=\frac{d_x}{l_x}+\frac{d_{x+1}}{l_x}(1+v)+\frac{d_{x+2}}{l_x}(1+v+v^2)+\frac{d_{x+3}}{l_x}(1+v+v^2+v^3)+\ldots$$

wofür man wieder schreiben kann:

$$\mathfrak{a}_x=q_x+{}_1|q_x(1+v)+{}_2|q_x(1+v+v^2)+{}_3|q_x(1+v+v^2+v^3)+\\ +\ldots \tag{199}$$

Der Wert der Leibrente erscheint hiermit nicht zurückgebracht zu mehreren Auszahlungen im Erlebensfalle, sondern zu Auszahlungen im Falle des Ablebens in den verschiedenen Jahren. Man kann die Formel leicht erklären: es sterbe der Rentner, nachdem er $n+1$ Mal die Rente empfangen hat; beim Rentenabschlufs stellt sich der Wert der erstjährigen Zahlung auf 1, der der Zahlung im zweiten Jahre auf v, im dritten Jahre auf v^2 u. s. w., im $n+1$. Jahre auf v^n. Es stellt sich dann der gesammte Barwert der Auszahlungen auf $1+v+v^2+\ldots+v^n$, und die Wahrscheinlichkeit, dafs der Rentner sterben wird im $n+1$. Jahre, ist gleich

$$\frac{d_{x+n}}{l_x} = {}_n|\,q_x.$$

Weiter ist

$$q_x + {}_1|\,q_x + {}_2|\,q_x + {}_3|\,q_x + \ldots = 1.$$

Es giebt dies eben der gefundenen Formel eine besondere Wichtigkeit, denn bei vielen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es erforderlich, dafs die Summe der verschiedenen Auszahlungswahrscheinlichkeiten der Einheit gleich sei, was in der gewöhnlichen Leibrentenformel nicht der Fall ist.

Nun ist

$${}_1|\,q_x = p_x\,q_{x+1},\quad {}_2|\,q_x = p_x p_{x+1} q_{x+1},\quad {}_3|\,q_x = p_x p_{x+1} p_{x+2} q_{x+2} \text{ u. s. w.}$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} a_x = {} & q_x + p_x\,q_{x+1}(1+v) + p_x\,p_{x+1}\,q_{x+2}(1+v+v^2) + \\ & + p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2}\,q_{x+3}(1+v+v^2+v^3) + \ldots \end{aligned}$$

Substituirt man hierin

$$q_{x+1} = 1 - p_{x+1},\quad q_{x+2} = 1 - p_{x+2},\quad q_{x+3} = 1 - p_{x+3},\text{ u. s. w.},$$

so bekommt man wieder die Formel (172).

Für den Wert der nachschüssigen Leibrente findet man:

$$\begin{aligned} a_x = {} & \frac{d_{x+1}}{l_x}v + \frac{d_{x+2}}{l_x}(v+v^2) + \frac{d_{x+3}}{l_x}(v+v^2+v^3) + \ldots = \\ = {} & {}_1|\,q_x\,v + {}_2|\,q_x\,(v+v^2) + {}_3|\,q_x\,(v+v^2+v^3) + \ldots = \\ = {} & p_x\,q_{x+1}\,v + p_x\,p_{x+1}\,q_{x+2}(v+v^2) + \\ & + p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2}\,q_{x+3}(v+v^2+v^3) + \ldots \end{aligned}$$

Man kann dies auch wie folgt schreiben:

$$a_x = \frac{d_{x+1}\,v + d_{x+2}(v+v^2) + d_{x+3}(v+v^2+v^3) + \ldots}{d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + d_{x+3} + \ldots}. \qquad (200)$$

Der Wert der Leibrente erscheint dann ausschliefslich mittels der Anzahl der Todten ausgedrückt.

Es handelt sich hier um wichtigeres als um eine mehr oder weniger interessante Formeltransformation, denn **Johan de Witt** hat den Wert einer Leibrente ausschliefslich aus der Anzahl der verstorbenen Rentner abgeleitet.

Oben haben wir beim Tode des Rentners die Werte der Zahlungen stets discontirt bis zum Anfang der Versicherung. Man kann die verschiedenen Werte auch angeben im Augenblick des Todes des Rentners, welchen wir voraussetzen am Ende des Sterbejahres stattzufinden; auf diese Weise findet man den Wert der Leibrente in nachstehender Form

$$\mathfrak{a}_x=\frac{1}{D_x}\Big\{C_x(1+i)+C_{x+1}[(1+i)+(1+i)^2]+C_{x+2}[(1+i)+(1+i)^2+$$
$$+(1+i)^3]+C_{x+3}[(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4]+\ldots\Big\}$$

und

$$a_x=\frac{1}{D_x}\Big\{C_{x+1}(1+i)+C_{x+2}[(1+i)+(1+i)^2]+C_{x+3}[(1+i)+$$
$$+(1+i)^2+(1+i)^3]+C_{x+4}[(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+$$
$$+(1+i)^4]+\ldots\Big\} \qquad (201)$$

Leibrente bis zum Augenblick des Ablebens.

110. Es kommt oft vor, dafs beim Ableben des Leibrentners für den Teil seines Sterbejahres, den er noch durchlebt hat, ein entsprechender Teil der Rente gezahlt wird. In diesem Falle pflegt man die Leibrente auch als eine vollständige (complete) Leibrente zu bezeichnen. Wenn er z. B. seit der letzten Rentenzahlung noch ein Vierteljahr gelebt hat, so wird für ihn schliefslich noch $\frac{1}{4}$ der versicherten jährlichen Rente ausgezahlt.

Diese Nachzahlung für die Zeit bis zum Tage des Ablebens kann bei dem einen aus der Rente für einen Tag, bei einem andern aus der für 364 Tage bestehen. Näherungsweise läfst sich annehmen, dafs sie im Durchschnitt die Rente für ein halbes Jahr (vergl. No. 28) ausmacht, sodafs sie einer Auszahlung im Todesfall zum Betrage von $\frac{1}{2}$ entspricht, falls der jährliche Betrag der versicherten Leibrente 1 ist.

Setzen wir voraus, dafs die Auszahlung am Ende des Sterbejahres stattfindet, so ist der Wert dieser Nachzahlung:

$$\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{1+i}\,\mathrm{a}_x\right),$$

oder wenn man $\mathrm{a}_x = a_x + 1$ substituirt:

$$\frac{1}{2\,(1+i)}\,(1 - i\,a_x).$$

Die einmalige Prämie für die postnumerando zahlbare Leibrente bis zum Tage des Ablebens ist also:

$$\mathring{a}_x = a_x + \frac{1}{2\,(1+i)}\,(1 - i\,a_x) = \frac{1}{2\,(1+i)}\,[(2+i)\,a_x + 1]. \quad (202)$$

Rechnet man mit 4%, sodafs $i = 0.04$ ist, so schreibt sich diese Formel wie folgt:

$$\tfrac{1}{52}\,(51\,a_x + 25).$$

Setzt man hierin $\frac{1}{1+i} = 1 - i$ und vernachlässigt man in der Entwicklung i^2, so findet man:

$$\mathring{a}_x = (1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,a_x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,i. \quad (202^*)$$

Dieselbe Formel findet man auch in nachfolgender Weise:

Wenn alle Sterbefälle im Anfang des Sterbejahres stattfänden, also unmittelbar nach der Zahlung der Leibrente, so wäre der Wert der vollständigen Rente einfach a_x; fänden aber alle Sterbefälle am Ende des Jahres statt, also unmittelbar vor der Zahlung der Rente, so wäre der Wert der vollständigen Rente: $\frac{1+a_x}{1+i}$.

Setzt man für den Wert der vollständigen Rente den Mittelwert dieser beiden Werte, so findet man:

$$\mathring{a}_x = \tfrac{1}{2}\left(a_x + \frac{1+a_x}{1+i}\right).$$

Setzt man hierin $\frac{1}{1+i} = 1 - i$, so findet man für $\mathring{a}_x$ denselben Ausdruck als (202*).

Es ist zu bemerken, dafs die Differenz der beiden genannten Ausdrücke die einmalige Prämie für eine Ablebensversicherung in der Höhe der Einheit zahlbar am Ende des Sterbejahres bildet, also

$$\frac{1+a_x}{1+i} - a_x = A_x,$$

was übrigens selbstredend ist.

Der Fehler, den man dadurch begeht, daſs man die Nachzahlung als am Ende des Jahres erfolgend voraussetzt, während sie in Wirklichkeit sobald wie möglich nach dem Tode stattfindet, ist nur gering in Vergleich mit dem ganzen Wert der Rente.

Will man ihn indessen doch nicht unbeachtet lassen, so ist gewiſs folgender Ausdruck eine sehr genügende Annäherung für den Wert der Nachzahlung:

$$\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}i)\left(\frac{1}{1+i}-\frac{i}{1+i}a_x\right);$$

wodurch der ganze Wert der Rente wird:

$$\mathring{a}_x = a_x + \frac{2+i}{4(1+i)}(1-i\,a_x) = \frac{1}{4(1+i)}[(4+2i-i^2)\,a_x+2+i].$$

Vernachlässigt man hierin bei der Division durch $1+i$ die zweiten Potenzen von i, so erhält man:

$$\mathring{a}_x = (1-\tfrac{1}{2}i)\,a_x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}i = (1-\tfrac{1}{2}i)\,(a_x+\tfrac{1}{2}). \qquad (203)$$

Rechnet man mit 4 %, so wird dies:

$$0.98\,a_x+0.49.$$

Genauer ist folgende Rechnung: die Einheit, die am Ende jedes Jahres ausgezahlt wird, ist gleichwertig der Zahlung von $\frac{\sqrt{1+i}-1}{i}$ am Ende jedes halben Jahres. (Formel 48.)

Wenn also die Leibrente bis zum Todestage des Versicherten gezahlt werden soll, so muſs bei seinem Ableben durchschnittlich noch $\frac{\sqrt{1+i}-1}{i}$ ausgezahlt werden; der gegenwärtige Wert dieser Auszahlung ist nach Formel (198)

$$\frac{1-i\,a}{\sqrt{1+i}}\cdot\frac{\sqrt{1+i}-1}{i},$$

wir erhalten also für die Leibrente bis zum Tage des Ablebens:

$$\mathring{a} = a+\frac{1-i\,a}{\sqrt{1+i}}\cdot\frac{\sqrt{1+i}-1}{i} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+i}}\left[a+\frac{\sqrt{1+i}-1}{i}\right]. \qquad (204)$$

Die einmalige Prämie für die Lebensversicherung 1, unmittelbar nach dem Ableben zahlbar ist nun $1-i\,\mathring{a}$, denn die Zahlung der Einheit

beim Ableben ist gleichwertig der Zahlung der Einheit bei Beginn der Versicherung, wenn die Zinsen der Einheit bis zum Tode vom Versicherten der Gesellschaft zurückgezahlt werden. In der That ist

$$1 - i\,\mathring{a} = 1 - \frac{i}{\sqrt{1+i}}\left(a + \frac{\sqrt{1+i}-1}{i}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+i}} - \frac{i\,a}{\sqrt{1+i}} = \frac{1-i\,a}{\sqrt{1+i}},$$

sodafs wir wieder auf Formel (198) kommen.

111. Bei der Annahme des gleichmäfsigen Absterbens während jedes Jahres erhält man eine ganz strenge Formel für die Leibrente bis zum Augenblick des Todes auf folgendem Wege.

Von allen n Personen, die während eines Jahres sterben, nehmen wir an, dafs immer eine am Ende eines n^{ten} Teiles des Jahres stirbt. Für eine Person, die am Ende des t^{ten} Jahresteils stirbt, beträgt die Nachzahlung $\frac{t}{n}$, und wenn man diese Auszahlung bis zum Ende des Sterbejahres aufzinst, so wird sie

$$\frac{t}{n}(1+i)^{\frac{n-t}{n}}.$$

Nimmt man hierin nach einander $t = 1, 2, 3, \ldots . n$, addirt und dividirt mit n, so hat man als durchschnittlichen Betrag der auf das Ende des Sterbejahres reducirten Nachzahlung für eine ablebende Person:

$$\frac{1}{n^2}\left[(1+i)^{\frac{n-1}{n}} + 2(1+i)^{\frac{n-2}{n}} + 3(1+i)^{\frac{n-3}{n}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + (n-1)(1+i)^{\frac{1}{n}} + n\right] = T.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$(1+i)^{\frac{1}{n}} = s,$$

so ergiebt sich der eingeklammerte Ausdruck gleich

$$U = s^{n-1} + 2s^{n-2} + 3s^{n-3} + \ldots + (n-1)s + n.$$

Um U zu berechnen, summiren wir zuerst die Reihe:

$$Y = 1 + 2k + 3k^2 + \ldots + n\,k^{n-1}.$$

Multipliciren wir mit $1-k$, so wird

$$(1-k)\ Y = 1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^{n-1} - n\,k^n = \\ = \frac{1-k^n}{1-k} - n\,k^n,$$

sodafs

$$Y = \frac{1-(n+1)\,k^n + n\,k^{n+1}}{(1-k)^2}.$$

Setzt man hierin $k = \frac{1}{s}$ und multiplicirt mit s^{n-1}, so erhält man:

$$U = \frac{s^{n+1} - (n+1)\,s + n}{(s-1)^2}.$$

Da $s^n = 1+i$, so erhält man:

$$T = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(1+i)\,(1+i)^{\frac{1}{n}} - (n+1)\,(1+i)^{\frac{1}{n}} + n}{\left[(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1\right]^2}.$$

Wenn man hier einführt:

$$n\left[(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1\right] = j_n, \text{ (siehe Formel (13),}$$

sodafs

$$(1+i)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{j_n}{n},$$

so wird

$$T = \frac{i - j_n + \frac{i \cdot j_n}{n}}{j_n^2}.$$

Geht man über zur Grenze $n = \infty$, so wird $\operatorname{Lim} j_n = L\,(1+i)$ und folglich ist

$$\operatorname{Lim} T = \frac{i - L\,(1+i)}{[L\,(1+i)]^2}$$

der durchschnittliche Betrag einer Nachzahlung, reducirt auf das Ende des Sterbejahres. Der Barwert dieser Zahlung ist

$$A_x \frac{i - L\,(1+i)}{[L\,(1+i)]^2},$$

worin

$$A_x = 1 - d \cdot a_x = v\,(1 - i\,a_x),$$

mithin ist die einmalige Prämie der postnumerando bis zum Augenblick des Ablebens zahlbaren Leibrente:

$$\mathring{a} = a + \frac{1}{1+i}(1 - i\,a)\,\frac{i - L(1+i)}{[L(1+i)]^2} =$$

$$= a\left\{1 - \frac{i}{1+i}\cdot\frac{i - L(1+i)}{[L(1+i)]^2}\right\} + \frac{i - L(1+i)}{(1+i)\,[L(1+i)]^2}. \qquad (205)$$

Eine einfachere Formel ergiebt sich, wenn man die Nachzahlung am Ende des t^{ten} Jahresteils nicht $= \frac{t}{n}$ setzt, sondern, indem man mit dem Zins mathematisch streng rechnet (vergl. No. 27), gleich

$$\frac{(1+i)^{\frac{t}{n}} - 1}{i}.$$

Durch Multiplication dieses Ausdruckes mit

$$(1+i)^{1-\frac{t}{n}}$$

wird der Wert der Nachzahlung auf das Ende des Sterbejahres reducirt, und man erhält:

$$\frac{1+i}{i} - \frac{(1+i)^{\frac{n-t}{n}}}{i}.$$

Nimmt man hierin nach einander $t = 1, 2, \ldots n$, summirt und dividirt mit n, so erhält man als durchschnittlichen Betrag der auf das Ende des Sterbejahres reducirten Nachzahlung:

$$\frac{1+i}{i} - \frac{1}{n\left[(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1\right]},$$

also, wenn man zur Grenze $n = \infty$ übergeht,

$$\frac{1+i}{i} - \frac{1}{L(1+i)},$$

sodafs der Barwert der Nachzahlung ist:

$$A_x\left[\frac{1+i}{i} - \frac{1}{L(1+i)}\right] = \frac{1}{1+i}(1 - i\,a_x)\left[\frac{1+i}{i} - \frac{1}{L(1+i)}\right].$$

Addirt man dies zu a_x, so erhält man als einmalige Prämie für die Leibrente bis zum Augenblick des Ablebens

$$\mathring{a}_x = \frac{i}{(1+i)\,L(1+i)}\,a_x + \frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)\,L(1+i)}. \qquad (206)$$

Nunmehr ist

$$1 - i\,\mathring{a}_x = (1 - i\,a_x)\,\frac{i}{(1+i)\,L(1+i)},$$

sodafs wir kommen auf die Formel (197) für die einmalige Prämie der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall mit Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben. Es ist also nicht mathematisch streng, bei der Leibrente bis zum Augenblick des Todes, die Nachzahlung der Zeit proportional zu nehmen, wie dies bei Ableitung der Formeln (202), (203) und (205) geschehen ist.

Man bemerkt indessen, dafs, wenn man näherungsweise

$$\frac{i}{L(1+i)} = \sqrt{1+i},$$

also

$$L(1+i) = \frac{i}{\sqrt{1+i}}$$

setzt, sowohl Formel (205) als auch (206) in Formel (204) übergehen.

Gemischte Versicherung.

112. Hierunter versteht man die Versicherung eines Kapitals, das jemandem im Erlebensfall nach einer bestimmten Anzahl von Jahren anderenfalls (bei früherem Ableben) nach dem Tode ausgezahlt werden soll.

Man kann sich diese Versicherung als aus zwei von einander unabhängigen Versicherungen bestehend denken: 1°. einer Kapitalversicherung auf den Todesfall während der bestimmten Anzahl von Jahren und 2°. einer Versicherung desselben Kapitals auf den Erlebensfall nach der betreffenden Anzahl von Jahren.

Das versicherte Kapital sei wieder die Einheit und es finde die Auszahlung auf den Todesfall am Ende des Sterbejahres statt; das Alter beim Beitritt des Versicherten sei wieder x, die Dauer der Versicherung sei n Jahre, dann entsteht die einmalige Prämie durch Addiren der einmaligen Prämien nach den Formeln (168) und (189), sie ist also:

$$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \qquad (207)$$

Für die temporäre Versicherung auf den Todesfall kann man auch die Formel (190) benutzen; man erhält dann folgenden Ausdruck für die einmalige Prämie der gemischten Versicherung, die wir mit $A_{x\,\overline{n}|}$ bezeichnen:

$$A_{x\,\overline{n}|} = 1 - d \cdot a_{x\,\overline{n}|},$$

oder

$$1 - d \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}. \qquad (208)$$

Diese Formel für $A_{x\,\overline{n}|}$ unterscheidet sich von der Formel (187) für A_x nur darin, dafs a dort die lebenslängliche, hier die temporäre Leibrente bezeichnet; auch läfst sie sich ganz ähnlich in Worten beweisen wie diese. Wenn man n so grofs annimmt, dafs $x+n$ gröfser als die höchste Altersstufe der Sterblichkeitstafel wird, dann ist l_{x+n} und also auch $D_{x+n}=0$, $a_{x\,\overline{n}|}=a_x$ und die gemischte Versicherung ist nichts anderes als die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall. In der Praxis könnte ein Unterschied nur dadurch entstehen, dafs jemand eine höhere Altersstufe als die höchste der Sterblichkeitstafel erreicht. Will man den Fall in Betracht ziehen, dafs die Auszahlung beim Ableben so bald wie möglich stattfindet, so ist zu beachten, dafs die Correction nur den Teil des Barwerts beeinflussen darf, der zu der Auszahlung auf den Todesfall bestimmt ist. Man kann die einmalige Prämie in diesem Fall in folgendem Ausdruck darstellen:

$$\frac{(M_x - M_{x+n})\,(1+\frac{1}{2}i)+D_{x+n}}{D_x}. \qquad (209)$$

Hier aber ist eine Correction offenbar noch weniger nötig als bei der lebenslänglichen Versicherung, und um so weniger, je kürzer die Dauer der Versicherung gewählt ist.

Weil ein früheres Ableben der Gesellschaft Schaden bringt, so ist es am besten, der gemischten Versicherung dieselbe Sterblichkeitstafel zu Grunde zu legen wie die Versicherung auf den Todesfall. Bei dieser Wahl wird die Prämie für eine gemischte Versicherung weniger betragen als die Summe der Prämien für eine Versicherung auf den Erlebensfall und eine temporäre Versicherung bei gleicher Dauer, vorausgesetzt dafs für die Versicherung auf den Erlebensfall eine Tafel mit geringerer Sterbenswahrscheinlichkeit als für eine auf den Todesfall gewählt ist.

Kinderversorgung.

113. Jemand will versichert sein, dafs nach seinem Ableben jährlich eine gewisse Summe ausgezahlt wird, und zwar so, dafs die letzte Auszahlung n Jahre nach Abschlufs der Versicherung stattfindet. Wir fragen nach der einmaligen Prämie für diese Versicherung. Der jährlich auszuzahlende Betrag sei die Einheit. Wenn die Auszahlungen jedes Jahr unbedingt stattfinden müfsten, so wäre ihr Barwert zusammen:

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i\,(1+i)^n} \quad \text{(siehe Formel 30).}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs die Auszahlung am Anfang jedes Jahres erfolgt, sodafs $n+1$ Zahlungen stattfinden.

Weil nun aber die Auszahlung nicht stattfindet, so lange der Versorger lebt, mufs man von obiger Summe den Wert der praenumerando $n+1$ Jahre hindurch zahlbaren Leibrente subtrahiren, deren Wert nach Formel (175) ist:

$$\frac{N_{x-1} - N_{x+n}}{D_x}$$

Die gesuchte einmalige Prämie ist also:

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i(1+i)^n} - \frac{N_{x-1} - N_{x+n}}{D_x}. \qquad (210)$$

Diese Formel setzt voraus, dafs die erste Auszahlung am Anfang des dem Sterbejahr des Versorgers folgenden Jahres stattfindet.

Kapitel V.

Jährliche Prämien für die wichtigsten Versicherungen auf eine Person.

Leitende Prinzipien.

114. Bei den meisten Versicherungsarten braucht man die Prämie nicht auf einmal zu zahlen. Vielen Versicherten fällt es leichter, die Einzahlung während einer bestimmten Anzahl von Jahren, oder auch lebenslänglich zu leisten, sei es nun, dafs man jedes Jahr gleich viel zahlt oder nicht. Die Zahlung der jährlichen Prämien kann auf sehr verschiedene Weisen stattfinden.

Wie man aber auch die Prämienzahlung einrichten will, so soll man stets darauf achten, dafs die Art der Prämienzahlung der Gesellschaft keinen Schaden bringen darf, wenn das Ableben nach der gewählten Sterblichkeitstafel stattfindet und das Geld den vorausgesetzten Zins einträgt. Dazu hat man wieder anzunehmen, dafs eine sehr grofse Anzahl von Personen gleichen Alters (z. B. die Anzahl der Sterblich-

keitstafel) sich für dieselbe Art der Prämienzahlung einkauft und daſs sie unter Berücksichtigung ihres Absterbens nach der Sterblichkeitstafel und der Verzinsung zusammen ebensoviel einzahlen, als wenn sie sich alle mit einer einmaligen Prämie einkauften.

Die verschiedenen jährlichen nach der Sterblichkeitstafel erfolgenden Einzahlungen, auf den Anfang der Versicherung discontirt, müssen also zusammen der Summe der einmaligen Prämien derjenigen Personen gleich sein, von denen man voraussetzt, daſs sie die betreffende Versicherung abschlieſsen; folglich muſs auch für jede einzelne Versicherung der gegenwärtige Wert aller Jahresprämien der einmaligen Prämie, d. h. dem gegenwärtigen Wert der Auszahlung gleich sein.

Die Jahresprämie kann man als eine lebenslängliche bezw. temporäre, eine sich gleichbleibende bezw. veränderliche Leibrente betrachten, die von dem Versicherten gezahlt wird.

Wenn also P die gesuchte jährliche Prämie, A die einmalige Prämie, a der Wert der Leibrente (in der Regel praenumerando) zum Betrage der Einheit ist, dann ist $P \cdot \mathrm{a} = A$ und also die Jahresprämie

$$P = \frac{A}{\mathrm{a}}. \tag{211}$$

Hier ist es am besten, a nach derselben Sterblichkeitstafel zu berechnen wie A; es wäre unverantwortlich, zwei Tafeln derart zu wählen, daſs für A ein niedriger Wert und für a ein noch höherer Wert gefunden wird, als der Tafel für A entspricht, denn dabei würde P gewiſs zu niedrig ausfallen; es ist aber auch nicht nötig, zwei derartige Tafeln zu wählen, daſs für A ein höherer und für a ein noch niedrigerer Wert gefunden wird, als es der Tafel von A entsprechen würde, denn dadurch würde P sich zu hoch stellen. Man wähle nur eine Tafel, diese aber mit Vorsicht nach der Art der Versicherung.

115. Indessen ist nicht jede Art der Prämienzahlung statthaft. So ist leicht einzusehen, daſs z. B. keine Prämienzahlung zulässig ist, welche erst anfängt, wenn schon eine Auszahlung möglich gewesen wäre. Wenn z. B. jemand eine Versicherung auf den Todesfall abschlieſsen wollte, mit Ausschluſs einer Prämienzahlung in den ersten 5 Jahren, wenn er also später jährlich mehr zu zahlen beabsichtigte, als er dies bei fortwährender Prämienzahlung thun müſste, so könnte eine Gesellschaft darauf eingehen, wenn sie die absolute Gewiſsheit hätte, daſs diese Person sich nicht noch bei Lebzeiten von dem Geschäft zurückziehen würde; bei der Berechnung dieses Falles würde nämlich vorausgesetzt, daſs eine sehr groſse Menge von Personen denselben Con-

tract abschliefst; die am Leben bleibenden zahlen später für die Auszahlungen nach, welche schon stattgefunden haben. Wenn einer stirbt, ehe er noch eine Prämie gezahlt hat, so hat man dies in der Berechnung der späteren Prämien berücksichtigt; wenn sich aber einer bei Lebzeiten zurückzieht, der noch keine Prämie gezahlt hat, so bringt er Schaden, er ist eine Zeit lang umsonst versichert gewesen. Aber selbst wenn ein solches Zurückziehen ausgeschlossen wäre, so bliebe noch der Nachteil, dafs die Gesellschaft bei einer derartigen Prämienzahlung immer Vorschüsse leisten müfste für diejenigen, die sterben, ohne eine Prämie gezahlt zu haben.

Im Allgemeinen mufs man eine Prämienzahlung vermeiden, wo der Versicherte nachträglich für ein Risico zahlen mufs, das die Gesellschaft schon vorher ganz oder teilweise trug, oder was auf dasselbe hinauskommt: bei der Aufstellung eines Tarifs mufs man es den Versicherten unmöglich machen, sich aus einer Versicherung zurückzuziehen, um gleich darauf für eine geringere Prämie eine Versicherung für dieselbe Auszahlung abschliefsen zu können.

Dafs dergleichen Schwierigkeiten bei einmaligen Prämien nicht vorkommen, versteht sich von selbst; auch wird man leicht erkennen, dafs bei einer Versicherung für Auszahlung auf den Erlebensfall jede Art der Prämienzahlung zulässig ist, wenn sie nur vor dem Augenblick der Auszahlung endigt, weil die Gesellschaft, solange die Auszahlung nicht stattzufinden braucht, nur das Risico trägt, reserviren zu müssen. Diese Fragen wollen wir aber in einem folgenden Kapitel ausführlicher besprechen.

Obgleich man die Jahresprämie immer durch Division einer einmaligen Prämie mit einer Leibrente berechnen kann, so ist es doch nicht immer nötig, diese einmalige Prämie und diese Leibrente einzeln zu vermitteln. Wenn es sich um die Aufstellung eines ganzen Tarifs handelt, so wird in vielen Fällen die Rechnung durch eine Umgestaltung der Formeln vereinfacht, wie wir dies für einige Versicherungsweisen zeigen wollen.

Versicherung auf den Erlebensfall.

116. Wenn die Auszahlung nach n Jahren im Erlebensfall stattfinden und jährlich praenumerando während dieser Zeit vom Versicherten eine gleichbleibende Prämie gezahlt werden soll, so stellt diese Prämienzahlung eine n Jahre hindurch praenumerando zahlbare Leibrente dar.

Wie kaum bemerkt zu werden braucht, soll natürlich beim Ableben des Versicherten innerhalb der n Jahre die Prämienzahlung aufhören.

Bedeutet $P_x \,{}_{\overline{n}|}^{1}$ die gesuchte Jahresprämie, $A_x \,{}_{\overline{n}|}^{1}$ die einmalige Prämie, $a_{x\,\overline{n}|}$ den Wert der temporären Leibrente, so ist die Jahresprämie:

$$P_x \,{}_{\overline{n}|}^{1} = \frac{A_x \,{}_{\overline{n}|}^{1}}{a_{x\,\overline{n}|}};$$

Nun ist

$$A_x \,{}_{\overline{n}|}^{1} = \frac{D_{x+n}}{D_x},\quad a_{x\,\overline{n}|} = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x},$$

also wird die Formel für die Jahresprämie:

$$P_x \,{}_{\overline{n}|}^{1} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}. \tag{212}$$

Wenn $m < n$, so kann man die Prämie in m Jahren abzahlen lassen, und die Jahresprämie ist dann während dieser m Jahre:

$$\frac{A_x \,{}_{\overline{n}|}^{1}}{a_{x\,\overline{m}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+m-1}}. \tag{213}$$

Offenbar ist es nicht zulässig, hier $m > n$ zu nehmen. Dagegen ist es möglich, die Prämienzahlung in einer Leibrente bestehen zu lassen, die erst einige Jahre nach dem Abschliefsen der Versicherung anfängt, wenn sie nur vor dem Termin der Auszahlung endet. Man rechnet dann einfach so, als wenn die Versicherung erst mit dem Anfange der Prämienzahlung eingehen würde.

Bleibt das für die Auszahlung bestimmte Alter unverändert, ändern sich aber das Alter beim Anfang der Versicherung und also auch die Dauer derselben, so bleibt natürlich auch die zu entrichtende Jahresprämie nicht dieselbe.

Ist das Alter beim Anfang $x+1$, und das Alter bei der Auszahlung $x+n$, so ist die Jahresprämie

$$P_{x+1\,\cdot\,\overline{n-1}|}^{\;\;1} = \frac{D_{x+n}}{\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+n}}.$$

Hieraus

$$\frac{1}{P_x \,{}_{\overline{n}|}^{1}} - \frac{1}{P_{x+1\,\cdot\,\overline{n-1}|}^{\;\;1}} = \frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{l_x}{l_{x+n}}(1+i)^n. \tag{214}$$

Nun ist

$$P_{x+n-1\,\cdot\,\overline{1}|}^{\;\;1} = v\,\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}.$$

Mittels der Formel (214) kann die Jahresprämie für eine Dauer von 2 Jahren aus derjenigen für einjährige Dauer abgeleitet werden u. s. w.

Aufgeschobene Leibrente (Pension).

117. Wenn die Pension, die Einheit per Jahr, einer gegenwärtig x-jährigen Person zum ersten Male nach n Jahren ausgezahlt werden soll und dafür während dieser n Jahre eine Jahresprämie zu zahlen ist, so mufs man zur Ermittelung dieser Jahresprämie die einmalige Prämie $\frac{\Sigma D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+n-1}}{D_x}$ (nach Formel 174) mit dem Wert der temporären Leibrente dividiren. Dadurch erhält man als Jahresprämie für die Pension:

$$\frac{N_{x+n-1}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} = P_{n|}\,a_x. \qquad (215)$$

Man erkennt leicht, dafs sich die Jahresprämie für eine Pensions-Versicherung durch Multiplication der Jahresprämie für die Kapitalversicherung auf den Erlebensfall mit dem Wert der Pension in dem für ihren Beginn festgesetzten Alter erhalten läfst. Es ergiebt sich dies sowohl aus der Sache selbst, als auch aus den Formeln; man kann ja die Jahresprämie für die Pension schreiben:

$$\frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \cdot \frac{N_{x+n-1}}{D_{x+n}} = P_{x\,\frac{1}{n}|} \cdot a_{x+n}.$$

Lebenslängliche Kapitalversicherung auf den Todesfall.

118. Lebenslängliche gleiche Jahresprämie. Man erhält dieselbe offenbar durch Division der entsprechenden einmaligen Prämie mit dem Wert der lebenslänglichen (praenumerando zahlbaren) Leibrente zum Betrage von 1 per Jahr, sodafs bei Versicherung der Einheit auf den Todesfall die Jahresprämie ist

$$\frac{A_x}{a_x} = P_x. \qquad (216)$$

Da aber $A_x = \frac{M_x}{D_x}$ und $a_x = \frac{N_{x-1}}{D_x}$, so ergiebt sich als die gesuchte Jahresprämie:

$$\frac{M_x}{N_{x-1}}. \qquad (217)$$

Man kann die Jahresprämie auch in a ausdrücken, denn

$$A_x = 1 - d \cdot a_x,$$

sodafs

$$P_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{1}{a_x} - d. \qquad (218)$$

Auch diese Formel läfst sich leicht deuten: wenn der Versicherte $\frac{1}{a_x}$ am Anfang jedes Jahres zahlt, so ist dies einer einmaligen Zahlung der Summe 1 am Anfang gleichwertig. Die Gesellschaft kann nun dafür nicht nur am Ende seines Sterbejahres dieselbe Summe 1 herauszahlen, sondern mufs auch dem Versicherten jährlich, Zeit seines Lebens, zum letzten Male am Ende des Sterbejahres, den Zins i geben, oder was auf dasselbe hinauskommt, den Zins $\frac{i}{1+i} = d$ am Anfang jedes Jahres, oder noch anders ausgedrückt, der Versicherte zahlt statt $\frac{1}{a_x}$ nur

$$\frac{1}{a_x} - d.$$

Gesetzt es versichert sich jemand, gegen Einzahlung einer Summe 1, eine Leibrente zum Betrage von $\frac{1}{a_x}$ zahlbar am Anfang eines jeden Jahres; der Zins dieser Summe 1 beträgt i am Ende oder d am Anfang eines jeden Jahres.

Dasjenige, was er jährlich über den Zins geniefst, nämlich $\frac{1}{a_x} - d$ verwendet er als Jahresprämie für die Versicherung der Einheit beim Ableben.

Infolge des Abschliefsens dieser beiden Versicherungen zieht er von seinem Kapital während seines Lebens blos den gewöhnlichen Zins und bei seinem Tode restituirt die Gesellschaft das Kapital. Dieselbe hat also dieses Kapital nur verwaltet.

Aus (218) geht hervor;

$$a_x = \frac{1}{P_x + d}, \text{ ebenso } a_{x+1} = \frac{1}{P_{x+1} + d}.$$

Nun ist $$a_x = 1 + v\, p_x\, a_{x+1},$$

also

$$\frac{1}{P_x + d} = 1 + \frac{v\, p_x}{P_{x+1} + d}. \qquad (219)$$

Mittels dieser Formel ist es also möglich, die Jahresprämie zu berechnen ausschliefslich aus den Lebenswahrscheinlichkeiten. Beim höchsten Alter ω der Sterblichkeitstafel ist $P_\omega = v$.

Stellt man den Zins $i = 0$, und also auch $d = 0$, so ist die Jahresprämie

$$P_x = \frac{1}{1 + e_x}.$$

Es ist hier vorausgesetzt worden, dafs die Auszahlung am Ende des Sterbejahres stattfindet. Soll sie unmittelbar nach dem Ableben erfolgen, so hat man die obige Jahresprämie offenbar mit demselben Faktor zu multipliciren wie zu ähnlichem Zweck in No. 108 die einmalige Prämie.

119. Temporäre Prämie. Wenn die Prämie eine bestimmte Anzahl von Jahren hindurch gezahlt werden und natürlich auch mit dem Tode aufhören soll, so mufs man zur Bestimmung der Jahresprämie die einmalige Prämie mit dem Wert der temporären Leibrente dividiren. Wenn die Dauer der Jahresprämie n Jahre beträgt, so ist die gesuchte Jahresprämie:

$$ {}_nP_x = \frac{A_x}{a_{x\,\overline{n}|}} = \frac{A_x\,D_x}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} = \frac{M_x}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}. \qquad (220) $$

120. Steigende Prämie. In besonderen Fällen kann es zweckmäfsig sein, dafs der Versicherte statt der gleichbleibenden anfangs eine niedrigere, später eine höhere Prämie zahlt. Dies kann auf unendlich viel Weisen stattfinden. Nehmen wir an, dafs die Jahresprämie alle 5 Jahre um $\frac{1}{3}$ zunehmen soll, bis sie sich verdoppelt hat.

Wenn dann die Prämie während der ersten 5 Jahre 1 beträgt, so beträgt sie im zweiten Jahrfünft $1\frac{1}{3}$, während des dritten $1\frac{2}{3}$ und später 2. Nach Formel (181) ist dann der gegenwärtige Wert dieser Prämie:

$$ \frac{1}{D_x}\left[N_{x-1} + \tfrac{1}{3}\left(N_{x+4} + N_{x+9} + N_{x+14}\right)\right]. $$

Wenn jetzt die Jahresprämie in den ersten 5 Jahren X, also in den zweiten $1\frac{1}{3}X$, in den dritten $1\frac{2}{3}X$ und nachher $2X$ beträgt, so ist

$$ X = \frac{M_x}{N_{x-1} + \frac{1}{3}\left(N_{x+4} + N_{x+9} + N_{x+14}\right)}. \qquad (221) $$

Wie aber auch im Übrigen die Prämien zunehmen mögen, eine Bedingung mufs immer erfüllt sein, nämlich die, dafs die Prämie während einer gewissen Anzahl von Jahren nie kleiner ist als die Jahresprämie, wie sie erforderlich ist, um nur während dieser Jahre versichert zu sein, damit die Gesellschaft, immer in der Voraussetzung eines sehr zahlreichen Zutritts, wenigstens genug an Prämie empfängt, um während dieser Jahre die Auszahlungen bestreiten zu können, sodafs, wenn der Versicherte bei Lebzeiten austritt, er nicht zu billig versichert gewesen ist. Wenn also die Prämie während der ersten 5 Jahre kleiner sein soll als später, so mufs sie doch wenigstens so grofs sein wie die

Jahresprämie zur Versicherung auf 5 Jahre, d. h. die Prämie der ersten 5 Jahre mufs wenigstens betragen:

$$\frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + C_{x+4}}{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4}}. \qquad (222)$$

121. Temporäre abnehmende Prämie. Soll die Prämie alle 5 Jahre um $\frac{1}{3}$ abnehmen, dann geht die Prämienzahlung in 15 Jahren und natürlich auch bei etwaigem früheren Ableben zu Ende. Die Prämienzahlung bildet dann eine (praenumerando zahlbare) temporäre abnehmende Leibrente. Wenn die Prämie während der ersten 5 Jahre 1 ist, so ist sie während der zweiten $\frac{2}{3}$ und während der dritten $\frac{1}{3}$. Der gegenwärtige Wert dieser Prämie ist nach Formel (182):

$$\frac{1}{D_x}\left[N_{x-1} - \tfrac{1}{3}(N_{x+4} + N_{x+9} + N_{x+14})\right].$$

Heifst jetzt die Jahresprämie während der ersten 5 Jahre Y, also in den zweiten $\frac{2}{3}\,Y$ und in den dritten $\frac{1}{3}\,Y$, so hat man:

$$Y = \frac{M_x}{N_{x-1} - \frac{1}{3}(N_{x+4} + N_{x+9} + N_{x+14})}. \qquad (223)$$

122. Fortwährend abnehmende Prämie. Soll die Jahresprämie von Jahr zu Jahr um denselben Betrag abnehmen, und zwar derart, dafs sie nach einer bestimmten Anzahl von Jahren negativ wird, so heifst dies, dafs, wenn der Versicherte nur lange genug lebt, die abnehmende Prämienzahlung in einen zunehmenden Rentenempfang übergeht. Die Prämie nehme z. B. jedes Jahr um 3 % ab; zahlt dann der Versicherte im ersten Jahr 100 M. Prämie, so zahlt er im zweiten 97 M., im dritten 94 M. u. s. w., im 33. Jahr 4 M., im 34. Jahr 1 M., im 35. Jahr aber erhält er 2 M., im 36. Jahr 5 M. u. s. w.

Dieser Fall ist insofern nicht aus der Luft gegriffen, als es Gesellschaften giebt, die ihren Versicherten jährlich 3 % der gezahlten Prämien, wenn auch nicht fest als Gewinn versprechen, so doch einen solchen als sehr wahrscheinlich in Aussicht stellen, und dazu die Aussicht eröffnen, dafs bei längerer Lebensdauer die Prämienzahlung in einen Empfang von Rente übergehen wird.

Sei im Allgemeinen die Prämie im ersten Jahr Z, im zweiten Jahr $Z(1-\alpha)$, im dritten Jahr $Z(1-2\alpha)$ u. s. w., dann hat man zur Ermittlung der Prämie des ersten Jahres die einmalige Prämie

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

mit dem Wert der lebenslänglichen abnehmenden Leibrente zu dividiren, wie letzterer in Formel (180) dargestellt ist, und man erhält also als Prämie für das erste Jahr:

$$Z = \frac{M_x}{\Sigma D_x - \alpha \Sigma\Sigma D_{x+1}} = \frac{M_x}{N_{x-1} - \alpha S_x}. \qquad (224)$$

Wie sich unmittelbar einsehen läfst und auch aus den Formeln hervorgeht, nimmt Z mit α zu, und zwar schnell zu, weil S_x weit gröfser ist als N_{x-1}. Von grofser Bedeutung ist es, darauf zu achten, dafs man α keinen willkürlichen Wert geben darf, ohne zu Ungereimtheiten zu kommen. Wählt man nämlich α so grofs, dafs

$$\alpha S_x > N_{x-1}$$

ist, so wird Z negativ, und zwar geht, wenn α von 0 aus zunimmt, Z aus dem Positiven durch das Unendliche ins Negative über. Es ist nicht ohne Nutzen, den Sinn eines negativen Wertes für Z zu betrachten; er bedeutet, dafs der Versicherte in den ersten Jahren, statt eine Prämie zu zahlen, noch Geld heraus bekommt und erst später wirklich Prämien zahlt. Erhält er im ersten Jahre K, so bekommt er im zweiten Jahre $(1 - \alpha) K$, im dritten Jahre $(1 - 2\alpha) K$ u. s. w., bis er endlich eine zunehmende Prämie zahlt.

α braucht keineswegs aufserordentlich grofs zu sein, um einen solchen Mifsstand zu verursachen.

In einer Zeitschrift habe ich berechnet, dafs bei einem Beitritt im Alter von 60 Jahren $\alpha = 0.1382$ die Jahresprämie unendlich grofs, also $\alpha = 0.14$ dieselbe negativ macht. Ist das Beitrittsalter 20 Jahr, so mufs $\alpha < 0.06399$ sein; für $\alpha = 0.07$ wird die Jahresprämie negativ. Die Sterblichkeitstafel, welche dieser Rechnung zu Grunde lag, war die bekannte H^m Tafel (eine der Tafeln der 20 englischen Gesellschaften), bei dem Zinsfufs von 4 %.

123. Lebenslängliche Zahlung gleicher Jahresprämien, von denen nur die des ersten Jahres verschieden ist. Wenn wir verlangen, dafs im ersten Jahr die Prämie f sei, so frage man, wie grofs die Jahresprämie der übrigen Jahre sein mufs. Setzen wir sie $= Y$. Der gegenwärtige Wert dieser sich gleichbleibenden Prämie Y ist $Y(a_x - 1)$, denn sie bildet eine postnumerando zahlbare Leibrente. Wir erhalten deshalb folgende Gleichung:

$$f + Y(a_x - 1) = A_x,$$

und daher:

$$Y = \frac{A_x - f}{a_x - 1}. \qquad (225)$$

Die Zahl f darf indessen nicht kleiner genommen werden als die Prämie für den x-jährigen, wenn er ein Jahr auf den Todesfall versichert sein will.

Setzen wir f gleich dieser Prämie, so ist

$$f = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{1}{1+i} - \frac{D_{x+1}}{D_x}.$$

Um jetzt A_x und a_x in a_{x+1} auszudrücken, benutzen wir die Gleichungen:

$$a_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} a_{x+1};$$

$$A_x = 1 - d \cdot a_x = 1 - d \cdot \left(1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} a_{x+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+i} - d \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x} a_{x+1}.$$

Bei unserer jetzigen Annahme über den Wert von f ist also

$$A_x - f = \frac{D_{x+1}}{D_x}\left(1 - d \cdot a_{x+1}\right),$$

und folglich

$$Y = \frac{1}{a_{x+1}} - d.$$

Wir finden also Y übereinstimmend mit der gleichbleibenden Jahresprämie für den $x+1$-jährigen. Dies konnte man erwarten, denn wenn der x-jährige anfänglich die Prämie zur Versicherung auf nur ein Jahr zahlt, so läuft diese Versicherung mit Beginn des nächsten Lebensjahres ab; der Betreffende mufs sich im Erlebensfall von neuem versichern und dann, wenn die Versicherung nunmehr eine lebenslängliche mit gleichbleibender Jahresprämie sein soll, die Prämie des $(x+1)$-jährigen zahlen. Wenn auch diese Art der Prämienzahlung fast nie vorkommt, so wird sich doch später der Nutzen der vorstehenden Rechnung zeigen.

Wünscht man, dafs die Prämie des ersten Jahres um eine bestimmte Gröfse (g) kleiner sei als die der übrigen Jahre, welche wir $= Z$ setzen, so erhält man Z aus der Gleichung:

$$A_x = Z(a_x - 1) + Z - g = Z \cdot a_x - g,$$

sodafs

$$Z = \frac{A_x + g}{a_x}. \qquad (226)$$

Gemischte Versicherung.

124. Die sich gleichbleibende Prämie. Die gewöhnlichste Art der Prämienzahlung ist hier gewifs diejenige, wo der Versicherte jährlich dieselbe Prämie zahlt bis zum Ableben oder im Erlebensfall bis zur Auszahlung. Die Jahresprämie A wird in diesem Fall dargestellt durch $P = \frac{A}{\mathfrak{a}}$, oder, da $A = 1 - d \cdot \mathfrak{a}$ (Formel 208), durch $P = \frac{1}{\mathfrak{a}} - d$, also ganz ebenso wie bei der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall. Die Formel kann auch für den vorliegenden Fall ohne Algebra bewiesen werden.

a ist hier der Wert der n Jahre hindurch praenumerando zahlbaren Leibrente 1 per Jahr, also

$$\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|} = \frac{N_{n-1} - N_{x+n-1}}{D_x},$$

sodafs die Jahresprämie die Form erhält:

$$\frac{D_x}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} - d = P_{x\,\overline{n}|} \qquad (227)$$

Andere Arten der Prämienzahlung. Nichts hindert, die Prämien in weniger Jahren zahlen zu lassen, als die Versicherung dauert, oder auch eine veränderliche Prämie zahlen zu lassen. Wir werden als Beispiel den häufig vorkommenden Fall behandeln, dafs während der ersten Jahre eine geringere, nachher eine höhere Prämie als die sich gleichbleibende gezahlt wird.

Es möge während der ersten 5 Jahre die Prämie Y und während der späteren Jahre $1\frac{1}{2}\ Y$ per Jahr sein. Um Y zu finden, mufs man dann die entsprechende einmalige Prämie mit dem Wert der Leibrente dividiren, die während der ersten 5 Jahre 1 und während der folgenden $n-5$ Jahre $1\frac{1}{2}$ per Jahr beträgt, d. h. (vergl. Formel 183) mit

$$\frac{N_{x-1} - N_{x+n-1} + \frac{1}{2}(N_{x+4} - N_{x+n-1})}{D_x} =$$

$$= \mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|} + \tfrac{1}{2}\frac{N_{x+4} - N_{x+n-1}}{D_x},$$

und deshalb ist

$$Y = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1} + \frac{1}{2}(N_{x+4} - N_{x+n-1})}, \qquad (228)$$

oder wenn man lieber alles mittels der Zahlen der Lebenden ausdrückt:

$$Y = \frac{D_x - d\,.\,(N_{x-1} - N_{x+n-1})}{N_{x-1} - N_{x+n-1} + \frac{1}{2}(N_{x+4} - N_{x+n-1})}. \qquad (228^*)$$

Dividirt man die einmalige Prämie mit

$$a_{x\,\overline{n}|} - \tfrac{1}{3}\, a_{x\,\overline{5}|},$$

so findet man die Jahresprämie, welche nach den ersten fünf Jahren bezahlt werden mufs, und die während der ersten fünf Jahre zu leistender Prämie stellt sich auf $\frac{2}{3}$ der während der späteren Jahre zu leistenden.

Temporäre Versicherung auf den Todesfall.

125. Es ist evident, dafs die Jahresprämie sich auf

$$\frac{M_x - M_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \qquad (229)$$

stellen wird. Diese Formel ist leicht wie folgt umzubilden:

$$\frac{D_x - D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} - \frac{i}{1+i}.$$

Fügt man dieser Prämie die Prämie $\frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}$ (Formel 212) für den Erlebensfall hinzu, so erhält man in der That die Jahresprämie für die gemischte Versicherung (Formel 227).

Versicherung auf bestimmte Verfallzeit.

126. Hierunter versteht man die Versicherung eines Kapitals, das auf jeden Fall zu einem vorher bestimmten Zeitpunkt, also unabhängig von irgend einer Sterbenswahrscheinlichkeit, ausgezahlt wird. Sie unterscheidet sich folglich nur darin von der gemischten Versicherung, dafs bei letzterer die Auszahlung auch früher, nämlich beim Ableben des Versicherten, stattfinden kann.

Wenn das Kapital, die Einheit, nach n Jahren ausgezahlt werden soll, so ist die einmalige Prämie:

$$\frac{1}{(1+i)^n} = v^n.$$

Hat nun der x-jährige während dieser n Jahre für die Versicherung eine Jahresprämie zu zahlen, die aber mit seinem etwaigen

Ableben vor der bestimmten Zeit aufhört, so ist die Jahresprämie der Quotient aus der einmaligen Prämie und dem Wert der n-jährigen Leibrente

$$a_{x\,\overline{n}|} = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x},$$

sie ist also

$$v^n \cdot \frac{D_x}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}. \qquad (230)$$

Es ist klar, daſs, wenn die Versicherung nur wenige Jahre dauert, die Prämie von derjenigen für die gemischte Versicherung derselben Dauer nur sehr wenig verschieden sein wird. Darum müssen eigenartige Verhältnisse vorliegen, wenn die Versicherung auf fester Verfallzeit der gemischten Versicherung vorgezogen wird.

Kapitel VI.

Versicherung auf mehrere Personen.

Versicherung eines Paares auf den Erlebensfall.

127. Es werde gefragt nach der einmaligen Prämie für die Versicherung von zwei Personen, die nach n Jahren die Summe 1 erhalten sollen, falls sie dann beide noch am Leben sind.

Sei die eine x, die andere y Jahre alt; die Wahrscheinlichkeit, daſs beide nach n Jahren noch am Leben sein werden, ist

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}\,\frac{l'_{y+n}}{l'_y}.$$

Zur Vereinfachung wollen wir künftig die Accente weglassen, diese Wahrscheinlichkeit also schreiben:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}\,\frac{l_{y+n}}{l_y},$$

dabei aber nicht auſser Acht lassen, daſs es unter Umständen nützlich oder sogar nötig sein kann, für die zwei Personen verschiedene Sterblichkeitstafeln zu benutzen.

Die einmalige Prämie für die Versicherung ist nunmehr

$$v^n \frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit $(1+i)^y$, so kann man hierfür schreiben:

$$\frac{l_{x+n}\, D_{y+n}}{l_x\, D_y}.$$

Dividirt man statt dessen mit $(1+i)^x$, so erhält man:

$$\frac{D_{x+n}\, l_{y+n}}{D_x\, l_y}.$$

Als Regel werden wir annehmen, dafs die Anzahl Lebender des höheren Alters der beiden Personen bis zur Geburt discontirt werden soll.

Setzt man:

$$l_x\, l_y = l_{x\,y},$$

so ergiebt sich als Ausdruck für die einmalige Prämie

$$v^n \frac{l_{x+n\,\cdot\,y+n}}{l_{x\,y}}.$$

Führen wir die Bezeichnung ein $D_x\, l_y = D_{x\,y}$, so kann man die einmalige Prämie einfach schreiben:

$$_nE_{x\,y} = \frac{D_{x+n\,.\,y+n}}{D_{x\,y}}. \qquad (231)$$

Eine solche Versicherungsweise kommt gewifs sehr selten vor; doch ist sie nicht ausgeschlossen; man kann sich z. B. ein Ehepaar denken, das jährlich, wenn auch nur eine sehr kleine Summe bei Seite legen will, um für den Fall, dafs sie zusammen alt werden, bei der silbernen oder goldenen Hochzeit eine bedeutende Summe zu erhalten. Die Versicherungsweise ist hier aber mehr in Rücksicht auf das Folgende aufgenommen worden.

Sofort beginnende lebenslängliche Verbindungsrente.

128. Unter einer solchen Rente versteht man eine Summe, die einem bestimmten Paar von Personen, solange beide am Leben sind, jährlich ausgezahlt wird. Sei der jährliche Betrag der Rente die Einheit, das Alter der Personen x und y. Man kann die Versicherung einer solchen Verbindungsrente aus verschiedenen Versicherungen be-

stehend denken, nämlich jedesmal der Einheit nach 1, 2, 3 Jahren u. s. w., solange beide Personen am Leben sind.

Also ist die einmalige Prämie für die Verbindungsrente (postnumerando zahlbar)

$$\frac{D_{x+1\,.\,y+1}}{D_{x\,y}} + \frac{D_{x+2\,.\,y+2}}{D_{x\,y}} + \frac{D_{x+3\,.\,y+3}}{D_{x\,y}} + \cdots$$

oder

$$\frac{D_{x+1\,.\,y+1} + D_{x+2\,.\,y+2} + D_{x+3\,.\,y+3} + \cdots}{D_{x\,y}}$$

was man auch kurz schreiben kann:

$$a_{x\,y} = \frac{N_{x\,y}}{D_{x\,y}}. \tag{232}$$

Wenn aber die Verbindungsrente praenumerando zahlbar ist, so ist ihr Wert um die Einheit gröfser und ist also:

$$\mathfrak{a}_{x\,y} = a_{x\,y} + 1 = \frac{N_{x-1\,.\,y-1}}{D_{x\,y}}. \tag{233}$$

Wenn man für die beiden Personen zwei verschiedene Sterblichkeitstafeln annimmt, so hat $a_{x\,y}$ zwei verschiedene Werte.

Eine vollständige Tafel der Verbindungsrenten kann man auf eine vollständige Tafel der $D_{x\,y}$ gründen. Sie würde aus so vielen Einzeltafeln bestehen, als es Differenzen zwischen x und y giebt. Man kann aber deren Zahl verringern. Hat man z. B. Tafeln für die Verbindungsrenten bei gleichem Alter, weiter für die Altersdifferenzen 5, 10, 15, 20 u. s. w., dann kann man zu den Werten bei andern Altersunterschieden durch Interpolation gelangen. Natürlich ist aber eine direkte Berechnung zuverlässiger.

Die Zahlen $D_{x\,y} = D_x\, l_y$ sind ziemlich grofs; man braucht aber nicht mit ihnen selbst zu rechnen, sondern kann sie ganz gut mit z. B. 100000 dividiren, wenn man Sterblichkeitstafeln benutzt, die mit 100000 Nulljährigen anfangen; die Genauheit wird darunter nicht leiden, vor allem nicht in Vergleich zu den Abweichungen, die man gerade hier bei verbundenen Leben erwarten kann.

Ebenso wie bei den Leibrenten auf eine Person kann man auch die Verbindungsrente für ein Paar von bestimmtem Alter aus derjenigen eines Paares ableiten, wo jede der beiden Personen um ein Jahr älter ist. Sowohl aus der Sache selbst wie auch aus der Formel für $\mathfrak{a}_{x\,y}$ ergiebt sich, dafs

$$a_{x\,y} = 1 + v\frac{l_{x+1}\,l_{y+1}}{l_x\,l_y}\,a_{x+1\,.\,y+1} =$$

$$= 1 + \frac{D_{x+1\,.\,y+1}}{D_{x\,y}}\,a_{x+1\,.\,y+1}.$$

Man kann setzen:

$$\frac{l_{x+1}\,l_{y+1}}{l_x\,l_y} = p_{x\,y},$$

wo $p_{x\,y}$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, daſs ein Paar, von welchem der eine Teil x, der andere y Jahr alt ist, nach einem Jahr noch unaufgelöst sein wird. Es ist dann

$$a_{x\,y} = 1 + v\,p_{x\,y} \cdot a_{x+1\,.\,y+1}.$$

Wenn jetzt $x+n$ oder $y+n$ das höchste Alter der Sterblichkeitstafel bedeutet, so ist

$$p_{x+n\,.\,y+n} = 0,\ a_{x+n\,.\,y+n} = 1.$$

$$a_{x+n-1\,.\,y+n-1} = 1 + v \cdot p_{x+n-1\,.\,y+n-1},$$

$$a_{x+n-2\,.\,y+n-2} = 1 + v \cdot p_{x+n-2\,.\,y+n-2} \cdot a_{x+n-1\,.\,y+n-1}$$

u. s. w.

Um diese Methode anwenden zu können, muſs man also vorher Tafeln aufstellen für

$$p_{x\,y} = \frac{l_{x+1}\,l_{y+1}}{l_x\,l_y}.$$

Wenn aber auſser Tafeln für l_x und l_y auch solche für D_x und D_y bereits vorliegen, so thut man am besten, aus diesen die Tafel für

$$D_{x\,y}$$

und daraus wieder die für $\Sigma D_{x\,y} = N_{x-1\,.\,y-1}$ abzuleiten.

Soll die Verbindungsrente eine vollständige sein, d. h. bis zum Tage des Ablebens ausgezahlt werden, so muſs die einmalige Prämie vermehrt werden mit der für den halben Rentenbetrag auszuzahlen beim ersten Ableben.

Näherungsweise findet man für die einmalige Prämie der vollständigen nachschüssigen Verbindungsrente

$$\mathring{a}_{x\,y} = (1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,a_{x\,y} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\,i = (1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,(a_{x\,y} + \tfrac{1}{2}). \qquad (234)$$

Wir können davon absehen, die Formeln für aufgeschobene und temporäre Verbindungsrenten hierher zu setzen. Man braucht ja nur in den Leibrentenformeln für eine Person die Lebenswahrscheinlichkeit einer Person durch die zusammengesetzte Lebenswahrscheinlichkeit

eines Paares zu ersetzen, um von der Leibrente für eine Person auf die Verbindungsrente überzugehen; d. h. man hat einfach l_x durch $l_{xy} = l_x l_y$, D_x durch D_{xy} zu ersetzen.

Verbindungsrente auf zwei Personen mit gänzlichem Übergang auf die längstlebende.

129. Wenn die Verbindungsrente nicht aufhört bei dem Ableben des zuerst sterbenden Teils des Paares, sondern wenn sie dauert bis zum Tode des längstlebenden, so braucht man nicht, um die Formel für die einmalige Prämie abzuleiten, den einzelnen Auszahlungen nachzugehen, sondern kann die Versicherung auf einfachere zurückführen. Wenn nämlich jede der beiden Personen eine lebenslängliche und gleich grofse Leibrente kauft, so genieſsen sie, solange sie beide am Leben sind, zusammen die doppelte Leibrente. Man findet deshalb die gesuchte einmalige Prämie durch Subtraction des Wertes der Verbindungsrente von der Summe der Werte der Leibrenten auf die einzelnen Personen. Hat also die Rente als Jahresbetrag die Einheit, so ist die gesuchte einmalige Prämie:

$$a_x + a_y - a_{xy}, \text{ wofür wir schreiben werden } a_{\overline{xy}}, \qquad (235)$$

wovon aber noch die Einheit zu subtrahiren ist, falls die Rente, wie das gewöhnlich zutrifft, postnumerando zahlbar ist, in welchem Falle man aber auch die Formel

$$a_x + a_y - a_{xy} = a_{\overline{xy}} \qquad (236)$$

gebrauchen kann.

Soll diese Leibrente eine vollständige sein, so muſs diese einmalige Prämie noch vermehrt werden, um den Wert des halben jährlichen Rentenbetrags auszuzahlen beim letzten Ableben der beiden Personen.

Verbindungsrente mit teilweisem Übergang auf den Längstlebenden.

130. Wenn die Rente 1 per Jahr beträgt, so lange die Versicherten beide am Leben sind, aber $\frac{1}{2}$ per Jahr, sobald einer der beiden gestorben ist, so ist dies eine Verbindungsrente mit halbem Übergang.

Offenbar kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn jeder der beiden Versicherten eine Leibrente zum Betrage von $\frac{1}{2}$ per Jahr erhält, folglich beträgt die einmalige Prämie:

$$\tfrac{1}{2}(a_x + a_y). \qquad (237)$$

Man kann auch sagen: es wird eine Verbindungsrente zum Betrage von $\frac{1}{2}$ gekauft ohne Übergang und noch eine andere zum Betrage von $\frac{1}{2}$ mit gänzlichem Übergang, sodafs die einmalige Prämie wird:

$$\tfrac{1}{2}\, a_{x\,y} + \tfrac{1}{2}\, a_{\overline{x\,y}} = \tfrac{1}{2}\, a_{x\,y} + \tfrac{1}{2}\,(a_x + a_y - a_{x\,y}) = \tfrac{1}{2}\,(a_x + a_y).$$

Eine Verbindungsrente, die zu $\frac{3}{4}$ auf den Längstlebenden übergeht, läfst sich so auffassen, als wenn das versicherte Paar eine Verbindungsrente mit gänzlichem Übergang zum Betrage von $\frac{3}{4}$ und noch eine Verbindungsrente ohne Übergang von $\frac{1}{4}$ bezöge; die einmalige Prämie ist also:

$$\tfrac{3}{4}\, a_{\overline{x\,y}} + \tfrac{1}{4}\, a_{x\,y} = \tfrac{3}{4}\,(a_x + a_y - a_{x\,y}) + \tfrac{1}{4}\, a_{x\,y} = \tfrac{3}{4}\,(a_x + a_y) - \tfrac{1}{2}\, a_{x\,y}. \quad (238)$$

Diese Formel läfst sich ebenfalls unmittelbar ableiten. Man kann dieselbe auch auffassen als eine halbe Rente, welche gänzlich, vermehrt um eine halbe Rente, welche nur für die Hälfte übergeht.

Allgemein findet man bei ganz ähnlicher Rechnung wie oben als Wert der Verbindungsrente, von welcher beim Ableben ein Teil $\frac{m}{n}$ auf den Längstlebenden übergeht:

$$\frac{m}{n}\, a_{\overline{x\,y}} + \frac{n-m}{n}\, a_{x\,y} = \frac{m}{n}\,(a_x + a_y) + \frac{n-2\,m}{n}\, a_{x\,y}. \quad (239)$$

Wenn $2\,m > n$, d. h. $\frac{m}{n} > \frac{1}{2}$, so geht mehr als die halbe Rente über; $n - 2\,m$ ist alsdann negativ, und wir ziehen es vor, die Formel in diesem Fall zu schreiben:

$$\frac{m}{n}\,(a_x + a_y) - \frac{2\,m-n}{n}\, a_{x\,y}.$$

Wenn man einmal im Besitz der Tarife für Verbindungsrenten ohne Übergang und derer mit gänzlichem Übergang ist, so benutzt man am einfachsten diese, um die einmaligen Prämien für Verbindungsrenten mit teilweisem Übergang abzuleiten.

Überlebensrenten.

131. Hierunter versteht man solche Leibrenten auf eine Person (Versorgter), die nur ausgezahlt werden im Falle, dafs eine andere Person (Versorger) stirbt. Die gewöhnlichste Form ist die Witwenpension.

Wir fragen also nach der einmaligen Prämie für die Überlebensrente 1 per Jahr, die lebenslänglich einer jetzt y-jährigen Frau ausgezahlt wird, die aber erst nach dem Tode ihres jetzt x-jährigen Mannes beginnt, falls sie diesen überlebt. Die Wahrscheinlichkeit, das n^{te} Jahr nach dem Abschliefsen der Versicherung zu überleben und in diesem Jahre Witwe zu werden, ist für die Frau:

$$\frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}.$$

Der Wert der Witwenpension ist in diesem Falle a_{y+n}, also beim Beginn der Versicherung:

$$v^n \, a_{y+n}.$$

Für die Möglichkeit, dafs die Frau im n^{ten} Jahr Witwe wird, mufs also gezahlt werden:

$$v^n \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot a_{y+n}$$

oder

$$\frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot \frac{D_{y+n}}{D_y} \cdot a_{y+n}.$$

In diesem Ausdruck ist nach einander $x = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. bis zum Ende der Sterblichkeitstafel zu setzen und dann zu addiren, um die gesuchte einmalige Prämie zu erhalten. Wir können diese also schreiben:

$$\frac{1}{l_x D_y} \cdot \sum_{n=1} [d_{x+n-1} \cdot D_{y+n} \cdot a_{y+n}]. \qquad (240)$$

132. Man kann indessen auch von den einzelnen Auszahlungen ausgehen: die Wahrscheinlichkeit nämlich, dafs die Frau nach n Jahren Witwe sein wird, ist nach Formel (58)

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y},$$

also ist der gegenwärtige Wert der Auszahlung, die nach n Jahren möglich ist:

$$v^n \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{D_{y+n}}{D_y} =$$

$$= \frac{D_{y+n}}{D_y} - \frac{D_{x+n \,.\, y+n}}{D_{x\,y}}.$$

Um die einmalige Prämie der Überlebensrente zu erhalten, müssen

wir nach einander $n = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. nehmen und summiren. Sie ist also:

$$\frac{1}{D_y} \cdot \sum_{n=1} D_{y+n} - \frac{1}{D_{xy}} \cdot \sum_{n=1} D_{x+n\,.\,y+n},$$

was wir auch schreiben können:

$$\frac{N_y}{D_y} - \frac{N_{xy}}{D_{xy}},$$

d. h.

$$a_y - a_{xy} = \mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{xy}, \tag{241}$$

und wird angedeutet mit $a_x|_y$ (vergl. No. 91 und 128).

Diese Formel läfst sich auch leicht unmittelbar einsehen. Die Zahlung der Witwenpension kommt nämlich finanziell auf dasselbe hinaus wie eine sofort beginnende lebenslängliche Leibrente der Frau, die der Mann jedesmal zurückzahlt, solange sie noch beide am Leben sind.

Es ist zu beachten, dafs sowohl in Formel (240) wie auch in (241) die Rentenauszahlung als am Anfang des Jahres erfolgend vorausgesetzt ist, welches dem Jahre folgt, während dessen der Mann stirbt. In der Praxis wird dies gewöhnlich nicht der Fall sein, vielmehr liegt meist eine Vereinbarung vor, dafs die erste Auszahlung eine gewisse Frist nach dem Ableben des Mannes stattfindet. Nach den Voraussetzungen der Formel bekommen einige Witwen die erste Auszahlung einen Tag, andere fast ein ganzes Jahr nach dem Tode ihres Mannes. Im Allgemeinen entspricht daher die Formel ziemlich genau der Voraussetzung, dafs die erste Auszahlung der Witwenpension ein halbes Jahr nach dem Ableben des Mannes erfolgt.

Will man für die Versicherung vermittels einer jährlichen Prämie zahlen lassen, so kann dies wieder auf verschiedene Weisen geschehen: man kann die Prämie gleichbleibend oder veränderlich wählen, auch kann sie auf eine bestimmte Anzahl von Jahren begrenzt sein, mufs aber jedenfalls aufhören beim Ableben sowohl des Mannes wie auch der Frau. Wenn jährlich eine gleich grofse Prämie gezahlt wird, so lange als Mann und Frau beide am Leben sind, so bildet diese Prämie eine praenumerando zahlbare Verbindungsrente für Mann und Frau. Der jährliche Betrag dieser Jahresprämie ist also dann der Quotient aus der einmaligen Prämie und der Verbindungsrente $\mathfrak{a}_{xy}$, ist also:

$$\frac{\mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{xy}}{\mathfrak{a}_{xy}} = \frac{\mathfrak{a}_y}{\mathfrak{a}_{xy}} - 1. \tag{242}$$

Dafs diese Art der Prämienzahlung nicht unter allen Umständen zulässig ist, wird sich später zeigen.

133. Soll die Überlebensrente bis zum Tage des Ablebens ausgezahlt werden, so hat man nur in der Formel

$$a_y - a_{x\,y}$$

a_y durch die vollständige Leibrente $\mathring{a}_y$ zu ersetzen. Die erste Rentezahlung bleibt dann auf den Anfang des dem Sterbejahre des Mannes folgenden Jahres bestimmt.

Wenn die vollständige Verbindungsrente, d. h. die Verbindungsrente bis zum Tage des ersten Ablebens in gleicher Weise mittels $\mathring{a}_{x\,y}$ angedeutet wird, so werden wir die Bedeutung von

$$\mathring{a}_y - \mathring{a}_{x\,y} \tag{243}$$

festzusetzen suchen.

Diese Formel weist darauf hin, dafs die erste Rentezahlung an die Witwe am Anfang des dem Sterbejahre des Mannes folgenden Jahres, aber dann nur für den nach dessem Tode fallenden Teil des Sterbejahres stattfinden soll, die letzte Zahlung aber am Tage ihres Todes u. z. für die seit dem Anfang des Jahres noch durchlebte Zeit.

Man kann nun mit Verwendung der Formel (243) die erste (ganze) Pensionszahlung ein Jahr nach dem Sterbetag des Mannes stellen, die weiteren Zahlungen mit regelmäfsigen jährlichen Zwischenräumen und die letzte (partielle) am Tage des Todes der Witwe. Rechnet man für einen Jahresteil mit einfachem Zins, so hat bei dieser Handlungsweise die Witwe weder Vor- noch Nachteil.

Nun stellt sich näherungsweise

$$\mathring{a}_y = (1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,a_y + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\,i;$$

stellt man ebenso:

$$\mathring{a}_{x\,y} = (1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,a_{x\,y} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\,i,$$

so ist

$$\mathring{a}_y - \mathring{a}_{x\,y} = (1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,(a_y - a_{x\,y})$$

oder

$$\mathring{a}_x - \mathring{a}_{x\,y} = (1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,a_{x|y}. \tag{244}$$

Für die einmalige Prämie der vollständigen Witwenpension, welche das erste Mal ein Jahr nach dem Tode des Mannes ausgezahlt wird, kann also die Formel

$$(1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,a_{x|y} = (1 - \tfrac{1}{2}\,i)\,(a_x - a_{x\,y})$$

als eine gute Annäherung bezeichnet werden.

Aufgeschobene Überlebensrente.

134. Die Überlebensrente kann in verschiedener Weise aufgeschoben werden.

So kann man 1°. die Bedingung stellen, dafs die Rente der versorgten (y-jährigen) Person frühestens n Jahre nach dem Abschliefsen der Versicherung ausgezahlt wird, dafs also, wenn der Versorger innerhalb der n Jahre stirbt, die Versorgte ohne Pension bleibt, bis die n Jahre vorüber sind.

Man kann alsdann den Wert durch folgende Überlegung ermitteln: die Versicherung kommt auf dasselbe hinaus, wie wenn die Versorgte, sofern sie nach n Jahren noch lebt, die Rente erhält, dieselbe aber so lange zurückzahlt, als nach den n Jahren sowohl Versorger als auch Versorgte noch leben. Die einmalige Prämie ist also die Differenz zwischen der n Jahre aufgeschobenen Leibrente für die Person des Versorgten und der n Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente für Versorger und Versorgte; sie ist also nach Formel (174) und No. 128:

$$\frac{N_{y+n-1}}{D_y} - \frac{N_{x+n-1\,.\,y+n-1}}{N_{xy}}. \tag{245}$$

135. Man kann 2°. die Bedingung stellen, dafs, wenn der Versorger innerhalb der n Jahre stirbt, die Rente überhaupt nicht ausgezahlt wird. Das heifst: nur wenn nach n Jahren Versorger und Versorgte beide am Leben sind, tritt der Vertrag faktisch in Wirkung; er hat dann den Wert:

$$a_{y+n} - a_{x+n\,.\,y+n} = a_{x+n|y+n}.$$

Stirbt eins von beiden innerhalb der n Jahre, so verliert der Vertrag seine Kraft. Die Wahrscheinlichkeit, dafs beide nach n Jahren noch am Leben sein werden, ist

$$\frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x\ l_y} = {}_np_{x\,y}.$$

Multiplicirt man den obigen Wert, welchen die Versicherung nach n Jahren haben wird, falls beide leben, sowohl mit dieser Wahrscheinlichkeit, wie auch mit v^n, so ergiebt sich als die einmalige Prämie für unseren Fall:

$$v^n \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x\ l_y}(a_{y+n} - a_{x+n|y+n}) = v^n \cdot {}_np_{x\,y} \cdot a_{x+n|y+n} = \\ = {}_nE_{x\,y} \cdot a_{x+n|y+n}. \tag{246}$$

136. Das Aufschieben kann 3°. darin bestehen, dafs der Bezug von Pension seitens der Versorgten nicht gleich, sondern einige Jahre nach dem Tode des Versorgers anfängt. Soll die erste Rentenzahlung n Jahre nach dem Ende des Sterbejahres des Versorgers statt-

finden, so ist, wenn der Versorger im t^{ten} Jahre nach dem Abschliefsen der Versicherung stirbt und die Frau dann noch am Leben ist, der Wert der Pension nach No. 96:

$$\frac{D_{y+t+n}}{D_{y+t}} a_{y+t+n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Versorger im t^{ten} Jahre sterben und die Versorgte am Ende dieses Jahres noch am Leben sein wird, ist am Anfang der Versicherung:

$$\frac{l_{x+t-1} - l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+t}}{l_y}.$$

Wenn wir also der Verzinsung Rechnung tragen, ist der Wert der Witwenpension, in Folge der Möglichkeit, dafs der Versorger im t^{ten} Jahre stirbt:

$$\frac{l_{x+t-1} - l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{D_{y+t}}{D_y} \cdot \frac{D_{y+t+n}}{D_{y+t}} \cdot a_{y+t+n} =$$

$$= \frac{d_{x+t-1}}{l_x} \cdot \frac{D_{y+t+n}}{D_y} \cdot a_{y+t+n}.$$

Setzt man hier nach einander $x = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. und addirt, so ergiebt sich für die einmalige Prämie:

$$\frac{1}{l_x D_y} \cdot \sum_{t=1} (d_{x+t-1} \cdot D_{y+t+n} \cdot a_{y+t+n}),$$

wofür man schreiben kann:

$$\frac{D_{y+n}}{D_y} \cdot \frac{1}{l_x D_{y+n}} \cdot \sum_{t=1} (d_{x+t-1} \cdot D_{y+t+n} \cdot a_{y+t+n}). \quad (247)$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{l_x D_{y+n}} \cdot \sum_{t=1} (d_{x+t-1} \cdot D_{y+t+n} \cdot a_{y+t+n})$$

nach Formel (240) die einmalige Prämie für die Überlebensrente, falls der Versorger x, die Versorgte $y+n$ Jahre alt ist; folglich kann man nach Formel (241) für Formel (247) schreiben:

$$\frac{D_{y+n}}{D_y} (a_{y+n} - a_{x\,.\,y+n}). \quad (248)$$

137. Die einmalige Prämie für die Witwenpension, welche der y-jährigen zum ersten Male nach n Jahren ausgezahlt wird, wenn der

Mann (x Jahre alt) innerhalb dieser n Jahre gestorben ist, wird ausgedrückt mittels der Formel:

$$\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right) \frac{N_{y+n-1}}{\quad}. \qquad (249)$$

Beim späteren Ableben des Mannes findet also keine Auszahlung statt.

Temporäre Überlebensrente.

138. Ebenso wie das Aufschieben der Überlebensrente auf verschiedene Weisen geschehen kann, so sind auch bezüglich des Temporären verschiedene Auffassungen möglich.

Nehmen wir zunächst den Fall, dafs die Rente insofern temporär ist, als sie zwar anfängt beim Ableben des Versorgers, falls die Versorgte noch lebt, dafs diese aber dann die Rente n Mal erhält, aufser wenn sie schon innerhalb der betreffenden n Jahre stirbt.

Es ist deutlich, dafs die einmalige Prämie für diese Rente durch Subtraction der einmaligen Prämie für die aufgeschobene in No. 136 von derjenigen für die fortwährende Überlebensrente hervorgeht. Man findet demnach für die einmalige Prämie der in Frage stehenden aufgeschobenen Überlebensrente:

$$a_y - a_{x\,y} - \frac{D_{y+n}}{D_y}\,(\mathfrak{a}_{y+n} - \mathfrak{a}_{x\,.\,y+n}),$$

was sich leicht zurückführen läfst auf:

$$\frac{N_y - N_{y+n-1}}{D_y} - \frac{N_{x\,y} - N_{x-1\,.\,y+n-1}}{D_{x\,y}}. \qquad (250)$$

Setzt man in der Formel (250) $n = 1$, so gilt sie für die nur einmal auszuzahlende Überlebensrente, d. h. für ein Kapital vom Betrage der Einheit, welches der Versorgten ausgezahlt wird, wenn sie am Ende des Sterbejahres des Versorgers noch am Leben ist.

Die Formel (250) wird dann:

$$\frac{D_{x\,.\,y+1} + D_{x+1\,.\,y+2} + D_{x+2\,.\,y+3} + \ldots - (D_{x+1\,.\,y+1} + D_{x+2\,.\,y+2} + \ldots)}{D_{x\,y}}$$

oder nach Substitution von $D_{x\,y} = l_x\, D_y$ u. s. w.:

$$\frac{(l_x - l_{x+1})\, D_{y+1} + (l_{x+1} - l_{x+2})\, D_{y+2} + (l_{x+2} - l_{x+3})\, D_{y+3} + \ldots}{l_x\, D_y}.$$

Man kann die letztere Formel auch leicht direkt beweisen, wenn man der Bedeutung ihrer einzelnen Glieder nachgeht. Sie bildet daher eine gute Verification für die Richtigkeit der Formel (250).

Sie läfst sich leicht reduciren auf

$$1 - a_{x\,y} + \frac{D_{y+1}}{D_y}\, a_{x\,.\,y+1}. \qquad (251)$$

139. Bestand das Temporäre der Überlebensrente im Vorhergehenden darin, dafs die Rente, vorausgesetzt, dafs die Versorgte den Versorger überlebt, innerhalb einer bestimmten Zeit nach dem Tode des Versorgers aufhört, so möge jetzt die Rente insofern temporär sein, als die Rentenzahlung innerhalb einer vorher bestimmten Anzahl (n) von Jahren nach dem Abschliefsen der Versicherung abläuft und nur während der Jahre stattfindet, um welche innerhalb jener n Jahre die versorgte Person den Versorger überlebt.

Die gewöhnlichste Form ist die der Waisenpension. Hat der Versorger, der Vater das Alter x, das zu versorgende Kind das Alter y und soll das Kind bis zum Alter $y + n$ eine jährliche Pension beziehen, falls der Vater innerhalb n Jahren stirbt, so ist der Wert dieser Rente offenbar gleich dem Wert der sofort beginnenden Rente für die Person des Kindes auf die Dauer von n Jahren vermindert um den Wert der temporären Verbindungsrente für beide Personen.

Der Minuend ist

$$\frac{N_{y-1} - N_{y+n-1}}{D_y},$$

der Subtrahend

$$\frac{N_{x-1\,.\,y-1} - N_{x+n-1\,.\,y+n-1}}{D_{x\,y}}.$$

Daher beträgt die einmalige Prämie für die Waisenpension:

$$\frac{N_{y-1} - N_{y+n-1}}{D_y} - \frac{N_{x-1\,.\,y-1} - N_{x+n-1\,.\,y+n-1}}{D_{x\,y}}, \qquad (252)$$

oder $a_{y\,\overline{n}|} - a_{x\,y\,.\,\overline{n}|}$.

Offenbar kann die hier behandelte Waisenpension nur $n - 1$ Mal ausgezahlt werden. Wenn also Formel (252) richtig ist, mufs sie für $n = 1$ Null ergeben, was auch wirklich der Fall ist.

Bei Ableitung der Formel ist vorausgesetzt, dafs die erste Auszahlung am Anfang des auf das Sterbejahr des Vaters folgenden Jahres stattfindet. Es wäre daher thöricht, die Versicherung mittels einer Jahresprämie während n Jahren bezahlen zu lassen, denn wenn Vater

und Kind nach $n-1$ Jahren noch am Leben sind, so ist es sicher, daſs das Kind die Waisenpension nie beziehen wird, es hätte also keinen Sinn, wenn der Vater dann noch zahlen müſste; die Prämienzahlung könnte also höchstens $n-1$ Jahre laufen, und es giebt sogar Gründe, nach denen es gewöhnlich besser ist, die Prämie noch schneller ablaufen zu lassen. Von diesen sprechen wir später.

Hier möge nur noch auf die merkwürdige formale Übereinstimmung der Formeln (250) und (252) trotz ihres bedeutenden sachlichen Unterschieds hingewiesen werden. Schon deshalb schien es nützlich, die Formeln für $n=1$ zu verificiren.

139*. Die Überlebensrente kann auch insoweit eine temporäre sein, daſs die (lebenslängliche) Pension der Witwe nur dann zur Auszahlung gelangt, wenn ihr Mann innerhalb einer bestimmten Anzahl Jahre sterben sollte.

Es ist offenbar, daſs die einmalige Prämie für die temporäre Witwenpension mit n-jährigem Anspruch sich stellt auf:

$$a_{x\,|\,y} - \frac{D_{x+n\,.\,y+n}}{D_{x\,y}}\, a_{x+n\,|\,y+n} =$$

$$= a_y - a_{x\,y} - \frac{D_{x+n\,.\,y+n}}{D_{x\,y}}\,(a_{y+n} - a_{x+n\,.\,y+n}),$$

was sich auch in nachstehender Form schreiben läſst:

$$\frac{1}{D_y}\left(N_y - \frac{l_{x+n}}{l_x}\, N_{y+n}\right) - \frac{N_{x\,y} - N_{x+n\,.\,y+n}}{D_{x\,y}}. \qquad (253)$$

Leibrente auf das Leben zweier Personen, beim Tode einer derselben auf einen geringeren Betrag zurückzuführen.

140. Die Rente betrage 1, insolange (x) und (y) beide leben oder (x) allein am Leben ist, werde aber auf $\frac{3}{4}$ reducirt, wenn (y) der Überlebende sein sollte.

Man kann diese Rente zusammensetzen aus einer Rente zum Betrage von $\frac{3}{4}$, welche gänzlich auf den Überlebenden übergeht und aus einer solchen zum Betrage von $\frac{1}{4}$ auf das Leben von (x). Die einmalige Prämie stellt sich also auf

$$\tfrac{3}{4}\,(a_x + a_y - a_{x\,y}) + \tfrac{1}{4}\,a_x\,, \qquad (254)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$a_x + \tfrac{3}{4}\,(a_y - a_{x\,y}).$$

Es kann die Rente somit bestehen aus einer Rente auf das Leben von (x) zum Betrage von 1 und einer dem (y) zugesicherten Überlebensrente zum Betrage von $\frac{3}{4}$.

Es wäre aber nicht richtig, hier einen Tarif für Überlebensrente anzuwenden, weil in der Regel für den Versorger (x) eine höhere Sterblichkeit angenommen wird als für die Versorgte (y) ; man soll also der ersten Form (254) den Vorzug geben, und für (x) und (y) die Sterblichkeitstafel für Rentner wählen. Eine ärztliche Untersuchung hat nicht stattzufinden, wie sich bei einer Überlebensrente der Versorger (x) einer solchen zu unterziehen hat.

Gegenseitige Überlebensrente.

141. Den Wert einer Rente, die B bekommen wird, wenn A stirbt, und die A bekommen wird, wenn B stirbt, erhält man durch Addition der Werte der beiden Überlebensrenten, wo in dem einen Fall A der Versorger, B der Versorgte, im anderen B der Versorger, A der Versorgte ist.

Dasselbe gilt für die Jahresprämie, die zu zahlen ist, so lange beide am Leben sind.

Auszahlung eines Kapitals beim Tode der zuerst sterbenden von zwei Personen (gegenseitiges Überlebenskapital).

142. Stellt man eine Tafel auf, die für Paare dasselbe ist, wie eine Sterblichkeitstafel für einzelne Personen, d. h. eine Tafel, die angiebt, wieviel Paare nach jeder beliebigen Anzahl von Jahren von einer bestimmten Anzahl von Paaren durch Ableben noch übrig sind, so könnte man zur Ableitung der Formeln für die Prämien bei der hier in Frage stehenden Versicherungsweise gerade so vorgehen, wie bei Bestimmung der Versicherungsprämien auf den Todesfall einer Person. Dem Todesfall der einen Person hier entspricht der erste Todesfall einer der beiden vereinigten Personen, d. h. die Auflösung des Paares, dort. Es ergiebt sich dann, dafs, wenn das Alter der Versicherungsnehmer x und y ist, die gesuchte Prämie aus der für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall einer Person hervorgeht, wenn man D_x gegen D_{xy}, a_x gegen a_{xy} vertauscht.

Demnach ist die einmalige Prämie für die Versicherung der Einheit, zahlbar beim ersten Todesfall einer der in dem Paar zusammengefafsten Personen:

$$1 - d \cdot a_{xy} = A_{xy}. \qquad (255)$$

Zur Ermittlung der jährlichen Prämie, die zu zahlen ist, so lange beide am Leben sind, müssen wir die einmalige Prämie mit $a_{x\,y}$ dividiren; die Jahresprämie ist also:

$$\frac{1}{a_{x\,y}} - d. \qquad (256)$$

Die vorstehenden Formeln beruhen auf der Voraussetzung, dafs die Auszahlung am Ende des Jahres, in welchem der erste Todesfall stattfindet, unbedingt erfolgt, also auch dann, wenn die zweite Person in demselben Jahr oder sogar gleichzeitig stirbt.

Um die einmalige Prämie abzuleiten, könnte man auch die Formel $\frac{\Sigma C_x}{D_x}$ benutzen, die bei der Versicherung einer Person öfters angewendet wird; man hat dann unter d jedesmal die Anzahl der Paare zu verstehen, die im Laufe des Jahres aufgelöst werden; d_x vertritt also den Ausdruck $l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}$ und C_x ist

$$\frac{l_x l_y - l_{x+1} \cdot l_{y+1}}{(1+i)^{x+1}},$$

während

$$D_x = \frac{l_x l_y}{(1+i)^x} \text{ ist.}$$

Für aufgeschobene und temporäre Versicherungen, zahlbar beim ersten Ableben, brauchen wir die Formeln nicht hierher zu setzen; sie entstehen einfach aus den entsprechenden für Versicherungen auf eine Person, wenn man darin für D_x überall $D_{x\,y}$ substituirt. Natürlich ist die aufgeschobene Versicherung, zahlbar beim ersten Ableben, so aufzufassen, dafs eine Auszahlung nur dann stattfindet, wenn beide Personen die Zeit des Aufschubs (Carenzzeit) überleben.

Auszahlung eines Kapitals beim Tode der zuletzt sterbenden von zwei Personen.

143. Die Formel für diese Versicherungsweise läfst sich leicht aus denen für andere Fälle ableiten.

Wenn ein x-jähriger und ein y-jähriger sich jeder für eine Auszahlung auf den Todesfall versichern, so wird das Kapital sowohl beim ersten als beim letzten Ableben ausgezahlt; verzichten sie aber auf das Kapital beim ersten Ableben, so kommt dies auf die hier in Frage stehende Versicherung hinaus; deren einmalige Prämie ist also:

$$A_x + A_y - A_{x\,y} = 1 - d \cdot (a_x + a_y - a_{x\,y}). \qquad (257)$$

Wir sind also wieder auf die Form $1 - d \cdot a$ für die einmalige Prämie gekommen, nur dafs hier a die Praenumerando-Verbindungsrente für den Längstlebenden bedeutet (Formel 235).

Die Zahlung der Jahresprämie kann auf verschiedene Weisen stattfinden; wenn sie beim ersten Ableben aufhören soll, so mufs man zu ihrer Bestimmung die einmalige Prämie mit a_{xy} dividiren; soll die Prämie bis zum Tode einer der zwei Personen dauern, z. B. bis zum Tode der x-jährigen, so mufs der Divisor a_x sein, soll sie aber bis zum letzten Ableben dauern, so ist der Divisor $a_x + a_y - a_{xy}$, und alsdann nimmt die Jahresprämie wieder die Form $\frac{1}{a} - d$ an.

Will man die Prämien auf Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben corrigiren und nimmt man ein gleichmäfsiges Ableben während jedes Jahres an, so ist mathematisch der Faktor $\frac{i}{L(1+i)}$ ein wenig zu klein bei der Auszahlung nach dem ersten Ableben, und ein wenig zu grofs bei der Auszahlung nach dem letzten Ableben.

Der Einfachheit halber nehme man jedoch überall $1 + \frac{1}{2} i$.

Wenn sich zwei Personen derart versichern, dafs beim ersten Ableben eine gewisse Summe (die Einheit), beim zweiten hingegen nur die Hälfte ausgezahlt wird, so stellt sich die einmalige Prämie auf

$$\tfrac{1}{2} (A_x + A_y + A_{xy}).$$

Eine unveränderliche Jahresprämie bis zum letzten Ableben wäre nicht zweckmäfsig.

Gemischte Versicherung auf zwei Personen.

144. Hierunter verstehen wir die Versicherung eines Kapitals, das nach einer bestimmten Anzahl von Jahren oder bei dem etwa früher eintretenden Ableben einer der beiden Personen auszuzahlen ist.

In Berücksichtigung des zweiten Falls, d. h. der Auflösung des Paares, haben wir wieder in den Formeln für die gemischte Versicherung auf eine Person l_x durch $l_x l_y = l_{xy}$, D_x durch $l_x D_y = D_{xy}$, a_x durch a_{xy} zu ersetzen.

Ist also n die bestimmte Anzahl von Jahren für die Dauer der Versicherung, so ergiebt sich die einmalige Prämie gleich:

$$1 - d \cdot a_{xy\,.\,\overline{n}|} = 1 - d \cdot \frac{N_{x-1\,.\,y-1} - N_{x+n-1\,.\,y+n-1}}{D_{xy}}. \quad (258)$$

Die Jahresprämie, welche während der n Jahre oder bis zum etwaigen früheren Ableben der zuerst sterbenden von beiden Personen zu zahlen wäre, ist:

$$\frac{1}{a_{x\,y\,.\,\overline{n}|}} - d = \frac{D_{x\,y}}{N_{x-1\,.\,y-1} - N_{x+n-1\,.\,y+n-1}} - d = P_{x\,y\,.\,\overline{n}}. \quad (259)$$

Einseitiges Überlebenskapital.

145. Diese Art der Versicherung kommt häufig vor unter der Form eines Witwenkapitals, das einer jetzt y-jährigen Frau (Versorgten) auszuzahlen ist, wenn sie ihren jetzt x-jährigen Mann (Versorger) überlebt.

In Formel (251) haben wir bereits die einmalige Prämie gefunden für den Fall, dafs der Versorgten ein Kapital ausgezahlt werden soll, wenn sie am Ende des Jahres, worin der Versorger gestorben, noch am Leben ist.

Diese einmalige Prämie ist daher etwas zu gering, denn die Auszahlung soll auch stattfinden, wenn die Frau in demselben Jahre, worin sie Witwe wurde, stirbt, vorausgesetzt, dafs dies nach dem Manne geschieht.

Setzt man voraus, dafs die Auszahlung am Ende des Sterbejahres des Versorgers stattfindet, wenn die Frau am Anfang dieses Jahres noch am Leben war, so stellt sich die einmalige Prämie auf:

$$v \,.\, \frac{(l_x - l_{x+1})\,D_y + (l_{x+1} - l_{x+2})\,D_{y+1} + (l_{x+2} - l_{x+3})\,D_{y+2} + \ldots}{l_x\,D_y}$$

was sich leicht reduciren läfst zu

$$\frac{1}{1+i}\,a_{x\,y} - \frac{D_{x+1}}{D_x}\,a_{x+1\,.\,y}. \quad (260)$$

Diese einmalige Prämie ist aber ein wenig zu grofs, denn nach dieser Formel soll das Kapital auch dann ausgezahlt werden, wenn Mann und Frau innerhalb desselben Jahres sterben, die Frau aber vor dem Maune, in welchem Falle jedoch die Auszahlung nicht stattfinden soll. Dies kann aber keine Ursache sein, sich der Anwendung der Formel (260) zu enthalten, es ist dann in derselben schon ein kleiner Zuschlag mit einbegriffen.

Will man aber genauer rechnen, so kann man von der Voraussetzung ausgehen, dafs es unter den Paaren, von denen Mann und Frau in demselben Jahre sterben, eben soviele giebt, bei denen die Frau vor dem Manne, als bei denen der Mann vor der Frau stirbt. Es ist dann die einmalige Prämie der mittlere Wert zwischen (251) und (260), d. h.

$$\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{i}{1+i}\,a_{xy} - \frac{D_{x+1}}{D_x}\,a_{x+1\,.\,y} + \frac{D_{y+1}}{D_y}\,a_{x\,.\,y+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{A_{xy} - \frac{D_{x+1}}{D_x}\,a_{x+1\,.\,y} + \frac{D_{y+1}}{D_y}\,a_{x\,.\,y+1}\right\} = A^1_{xy}. \qquad (261)$$

Die in der Formel vorkommende einmalige Prämie A_{xy} ist jedoch nicht in jedem Falle gleich derjenigen nach Formel (255), weil bei (261) verschiedene Tafeln für Versorgte und Versorger verwendet werden können, bei (255) aber dieselbe Tafel für beide Personen.

Setzt man voraus, dafs durchschnittlich das versicherte Kapital nur denjenigen Frauen ausgezahlt wird, welche im Leben sind in der Mitte des Sterbejahres ihrer Männer, so ist die Formel für die einmalige Prämie der Witwenpension:

$$\frac{C_x\,l_{y+\frac{1}{2}} + C_{x+1}\,l_{y+1+\frac{1}{2}} + C_{x+2}\,l_{y+2+\frac{1}{2}} + \cdots}{D_x\,l_y} =$$

$$= \frac{\Sigma\,(C_x\,l_{y+\frac{1}{2}})}{D_x\,l_y}. \qquad (261^*)$$

Setzt man hierin

$$l_{y+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,(l_y + l_{y+1}),\ l_{y+1+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,(l_{y+1} + l_{y+2}),\ \text{u. s. w.},$$

so findet man nach entsprechender Reduction die Formel (261).

Um die Jahresprämie bis zum Tode des zuerst Sterbenden zu erhalten, mufs man die einmalige Prämie durch a_{xy} dividiren. Dafs diese Jahresprämie indessen in manchen Fällen Schwierigkeiten verursacht, werden wir später sehen. Hat man für beide Personen dieselbe Sterblichkeitstafel benutzt — was freilich bei einem Witwenkapital nicht ratsam ist — so ergiebt sich, wenn man in (261) x und y vertauscht, durch Addiren beider Formeln A_{xy}, die einmalige Prämie für Auszahlung beim ersten Ableben. In der That ist letztere nichts als ein Überlebenskapital, zahlbar, wenn (x) stirbt, während (y) noch lebt, und wenn (y) stirbt, während (x) noch lebt, allerdings mit dem geringen Unterschied, dafs es im Fall der gegenseitigen Versicherung bisweilen zweifelhaft sein kann, ob wirklich ein Überleben stattgefunden hat, während bei Versicherung auf den ersten Todesfall von solch einer Schwierigkeit nicht die Rede sein kann.

Dieser Unterschied kann sich in den Formeln nicht zeigen, wo nur von Sterbenswahrscheinlichkeiten während eines Jahres die Rede ist; obgleich ein völlig gleichzeitiges Ableben möglich ist, so ist die Wahrscheinlichkeit hierfür aus dem Gesichtspunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung doch sehr klein und $= 0$ zu setzen.

Wenn beide Personen gleich alt sind und für beide wieder dieselbe Sterblichkeitstafel benutzt ist, so erhält man als einmalige Prämie des Überlebenskapitals $\frac{1}{2} A_{x.x}$, was sich wieder leicht erklären läfst. Wenn nämlich Versorger und Versorgter gleich alt sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs ersterer den letzteren überlebt, eben so grofs wie die des umgekehrten Falls. Die Versicherung läuft also auf dasselbe hinaus, als wenn das Paar eine Versicherung für Auszahlung beim ersten Ableben abschliefst, der Versorger aber von vornherein auf die Auszahlung für den Fall verzichtet, dafs die Versorgte zuerst stirbt.

Zur Reduktion auf den Fall der Auszahlung unmittelbar nach dem Tode kann man den Faktor $1 + \frac{1}{2} i$ gebrauchen.

146. Die Differenz zwischen (260) und (251) ist

$$\frac{2+i}{1+i} a_{x\,y} - \left(1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} a_{x+1\,.\,y} + \frac{D_{y+1}}{D_y} a_{x\,.\,y+1}\right) \qquad (262)$$

und ist die einmalige Prämie für die Einheit, welche nur dann ausgezahlt wird, wenn ein x- und ein y-jähriger in demselben Jahre sterben, und zwar ist die Auszahlung vorausgesetzt am Ende des Sterbejahres stattzufinden.

Aufgeschobenes Überlebenskapital.

147. Bisweilen wird ausgemacht, dafs das Überlebenskapital nicht ausgezahlt wird, wenn der Versorger innerhalb einer bestimmten Frist, sagen wir von n Jahren, stirbt. Um die einmalige Prämie für diesen Fall zu bestimmen, mufs man darauf achten, dafs die Versicherung erst beginnt nach n Jahren und dann auch nur, wenn Versorger und Versorgter noch leben. Die einmalige Prämie ist also der gegenwärtige Wert der einmaligen Prämie für die Versicherung, welche beginnen wird, sobald der Versorger $x+n$, der Versorgte $y+n$ Jahre alt sein werden. Die Wahrscheinlichkeit aber, dafs beide dann noch leben werden, ist

$$\frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \; l_y}.$$

Sowohl mit dieser Wahrscheinlichkeit wie (zur Berücksichtigung des Zinses) mit v^n mufs man die zuletzt genannte einmalige Prämie multipliciren. Die gesuchte einmalige Prämie für das aufgeschobene Überlebenskapital ist also:

$$\frac{1}{2} \frac{D_{x+n.y+n}}{D_{x\,y}} \left\{ A_{x+n.y+n} - \frac{D_{x+n+1}}{D_{x+n}} a_{x+n+1.y+n} + \frac{D_{y+n+1}}{D_{y+n}} a_{x+n.y+n+1} \right\} =$$
$$= v^n \cdot {}_np_{x\,y} \cdot A^{\frac{1}{}}_{x+n\,.\,y+n.} \qquad (263)$$

Temporäres Überlebenskapital.

148. Setzen wir den Fall, dafs die Auszahlung an die y-jährige (y) stattfinden soll beim früheren Ableben innerhalb n Jahre, des x-jährigen (x).

Wir haben in diesem Falle zur Bestimmung der einmaligen Prämie nur die einmalige Prämie für das fortwährende Überlebenskapital zu vermindern um diejenige des aufgeschobenen Überlebenskapitals nach No. 147; dieselbe stellt sich dann auf:

$$A^1_{x\,y} - \frac{D_{x+n\,.\,y+n}}{D_{x\,y}}\, A_{\frac{1}{x+n\,.\,y+n}} \qquad (264)$$

149. Gesetzt den weiteren Fall, dafs das Kapital an die y-jährige ausgezahlt werden soll, falls sie über n Jahre am Leben ist, aber beim früheren Ableben des x-jährigen innerhalb dieser n Jahre.

Wir stehen hier der Combination eines temporären Überlebenskapitals mit der Versicherung eines Kapitals zahlbar, wenn nach n Jahren (x) und (y) beide am Leben sind, gegenüber.

Die einmalige Prämie beträgt also:

$$A^1_{x\,y} - \frac{D_{x+n\,.\,y+n}}{D_{x\,y}}\, A_{\frac{1}{x+n\,y}} + \frac{D_{x+n\,.\,y+n}}{D_{x\,y}} =$$

$$= A^1_{x\,y} + \frac{D_{x+n\,.\,y+n}}{D_{x\,y}}\,(1 - A_{\frac{1}{x+n\,.\,y}}). \qquad (265)$$

Aussteuerversicherung.

150. Wenn ein x-jähriger Versorger einer y-jährigen Versorgten ein Kapital (die Einheit) versichern will, das ausgezahlt werden soll, wenn die Versorgte nach m Jahren noch am Leben ist, und wenn er dafür eine Jahresprämie während dieser Jahre zahlen will, die aber bei etwaigem früheren Ableben des Versorgers oder der Versorgten aufhört, so mufs man zur Bestimmung dieser Jahresprämie die einmalige Prämie $\frac{D_{y+m}}{D_y}$ dividiren durch den Wert der Verbindungsrente während m Jahren, nämlich durch

$$\frac{N_{x-1\,.\,y-1} - N_{x+m-1\,.\,y+m-1}}{D_{x\,y}}.$$

Achtet man darauf, dafs $D_{x\,y} = l_x\, D_y$, so ergiebt sich für die gesuchte Jahresprämie:

$$\frac{l_x\, D_{y+m}}{N_{x-1\,.\,y-1} - N_{x+m-1\,.\,y+m-1}}. \qquad (266)$$

Stipendium.

151. Wenn der x-jährige Versorger dem y-jährigen Versorgten ein Stipendium versichert, von welchem die erste Auszahlung nach m Jahren stattfinden und welches n Jahre hindurch gezahlt werden soll, falls und so lange der Versorgte am Leben ist, während die Prämienzahlung wie oben stattfindet, so hat man zur Bestimmung der Jahresprämie in Formel (266)] für D_{y+m} nur $N_{y+m-1} - N_{y+m+n-1}$ zu substituiren. (Vergl. No. 98.)

Die gesuchte Jahresprämie für das Stipendium ist also

$$\frac{l_x\,(N_{y+m-1} - N_{y+m+n-1})}{N_{x+y-1} - N_{x+m-1.\,y+m-1}}. \qquad (267)$$

Stipendium mit Waisenpension combinirt.

152. Ein Vater, x Jahre alt, will seinem Kind, das y Jahre alt ist, ein Stipendium versichern, welches zum ersten Male nach m Jahren und dann n Jahre hindurch zu zahlen ist; er verlangt aber überdies, dafs bei seinem etwaigen früheren Ableben die Rentenzahlung sofort beginnen soll. Für diese Versicherung will der Vater m Jahre hindurch oder bis zu seinem früheren Ableben eine Jahresprämie zahlen, welche natürlich auch endigt mit dem Tode des Kindes.

Der Wert der Pension zum Betrage der Einheit für die Person des Kindes, zahlbar während $m+n$ Jahren, ist

$$\frac{N_{y-1} - N_{y+m+n-1}}{D_y}.$$

Die Pension wird aber nicht ausgezahlt, so lange während der m Jahre Vater und Kind beide am Leben sind; folglich ist die einmalige Prämie der Pension:

$$\frac{N_{y-1} - N_{y+m+n-1}}{D_y} - \frac{N_{x-1.\,y-1} - N_{x+m-1.\,y+m-1}}{D_{xy}}. \qquad (268)$$

Zur Bestimmung der Jahresprämie hat man die einmalige Prämie zu dividiren mit

$$\frac{N_{x-1.\,y-1} - N_{x+m-1.\,y+m-1}}{D_{xy}},$$

sodafs sich diese Jahresprämie ergiebt gleich:

$$\frac{\frac{N_{y-1} - N_{y+m+n-1}}{D_{y1}}}{\frac{N_{x-1\,.\,y-1} - N_{x+m-1\,.\,y+m-1}}{D_{xy}}} - 1,$$

oder

$$\frac{l_x\,(N_{y-1} - N_{y+m+n-1})}{N_{x-1\,.\,y-1} - N_{x+m-1\,.\,y+m-1}} - 1. \qquad (269)$$

Leibrenten auf drei Personen.

153. Sofort beginnend, postnumerando zahlbar bis zum Tode des zuerst Ablebenden. Wenn die Personen x, y und z Jahr als sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach t Jahren eine Rentenzahlung stattfinden wird:

$$\frac{l_{x+t}\,l_{y+t}\,l_{z+t}}{l_x\,l_y\,l_z},$$

der Barwert der Einheit, die dann möglicherweise ausgezahlt wird, ist also:

$$v^t \,.\, \frac{l_{x+t}\,l_{y+t}\,l_{z+t}}{l_x\,l_y\,l_z} = \frac{D_{x+t\,.\,y+t\,.\,z+t}}{D_{xyz}}.$$

Setzt man hierin nach einander $t = 1, 2, 3$ u. s. w. und addirt, so ergiebt sich als Wert der Leibrente:

$$a_{xyz} = \frac{\Sigma\, D_{x+1\,.\,y+1\,.\,z+1}}{D_{xyz}} = \frac{N_{xyz}}{D_{xyz}}. \qquad (270)$$

154. Bis zum Tode des Längstlebenden. Wenn man den Wahrscheinlichkeiten nachgeht, dafs in den verschiedenen Jahren wenigstens eine der drei Personen am Leben sein und also die Rente erhalten wird, wenn man discontirt und summirt, so erhält man für die hier in Frage stehende Leibrente nach Formel (68):

$$a_x + a_y + a_z - (a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}) + a_{xyz}. \qquad (271)$$

155. So lange wenigstens zwei der drei Personen am Leben sind. Nach der Formel (69) ist der Wert dieser Leibrente:

$$a_{yz} + a_{zx} + a_{xy} - 2\,a_{xyz}. \qquad (272)$$

Überlebensrenten auf drei Personen.

156. Beginnend beim Ableben von (x) und zahlbar, so lange (y) und (z) beide am Leben sind.

Nach Formel (64) ist der Wert:

$$a_{yz} - a_{xyz}. \tag{273}$$

157. Beginnend beim Ableben von (x) und zahlbar, so lange (y) und (z) oder eine von beiden noch am Leben ist.

Nach Formel (73) ist die einmalige Prämie:

$$a_y + a_z - (a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}) + a_{xyz}. \tag{274}$$

158. Beginnend nach dem Ableben von (x) und von (y), zu Gunsten von (z).

Nach Formel (66) ist die einmalige Prämie:

$$a_z - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}. \tag{275}$$

159. Beginnend beim Ableben einer der drei Personen und zahlbar, so lange die zwei übrigen beide am Leben sind.

Nach Formel (65) ist der Wert:

$$a_{yz} + a_{zx} + a_{xy} - 3a_{xyz}. \tag{276}$$

160. Beginnend beim Ableben einer der drei Personen und zahlbar, so lange die beiden übrigen oder eine von beiden am Leben ist.

Nach Formel (74) ist die einmalige Prämie:

$$a_x + a_y + a_z - (a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}). \tag{277}$$

Man sehe wohl, dafs in dieser Formel keine Leibrente auf drei Leben vorkommt; dieselbe ist denn auch zurückzuführen zu drei Überlebensrenten bei zwei Leben und zwar auf zwei Weisen, nämlich

$$(a_x - a_{xy}) + (a_y - a_{yz}) + (a_z - a_{zx}),$$

und

$$(a_x - a_{xz}) + (a_y - a_{yx}) + (a_z - a_{zy}).$$

161. Leibrente zu Gunsten der zuletzt lebenden, sobald die beiden anderen gestorben sind.

Nach Formel (67) ist der Wert:

$$a_x + a_y + a_z - 2(a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}) + 3a_{xyz}. \tag{278}$$

162. Wir haben hier die Formeln für Leibrenten auf drei Personen stets aus den Lebenswahrscheinlichkeiten abgeleitet, auch wenn es möglich gewesen wäre, sie aus den Formeln für einfachere Fälle zu entwickeln, ähnlich wie wir dies für zwei Personen gezeigt haben; die

Ableitung aus den Lebenswahrscheinlichkeiten führt aber nicht so leicht zu Irrtümern, wie sie wohl gelegentlich vorgekommen sind.

Indessen ist es empfehlenswert und auch leicht, sich nachträglich zu überzeugen, dafs die aufgestellten Formeln den jedesmaligen Fällen entsprechen.

Nehmen wir z. B. den Fall, der in Nr. 158 behandelt ist, und berücksichtigen wir die Bedeutung der verschiedenen in der Formel (275) auftretenden Leibrenten, so sehen wir: so lange (x), (y) und (z) am Leben sind, wird $1-1-1+1=0$; so lange nur (x) gestorben ist, wird $1-0-1+0=0$; sind (x) und (y) gestorben, während (z) noch am Leben ist, so wird $1-0-0-0=1$ ausgezahlt.

Die Formel entspricht also vollständig den Bedingungen des in Frage stehenden Falles.

Man kann auch von einer gegebenen Formel ausgehen und ihre Bedeutung aus ihr selbst abzulesen suchen. Stellen wir z. B. die Frage: was bedeutet

$$h\,(a_x + a_y + a_z) + k\,(a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}) + l\,a_{xyz}?$$

Die Beantwortung ist nicht schwer.

Das erste Glied, für sich genommen, giebt diesen Personen zusammen $3h$ per Jahr, so lange alle drei; $2h$, so lange nur noch zwei; h, so lange nur eine noch am Leben ist. Das zweite Glied giebt den Personen $3k$, so lange alle drei; k, so lange nur noch zwei am Leben sind, anderenfalls nichts. Das dritte Glied giebt den Personen l, so lange sie alle drei leben, sonst nichts.

Die Formel giebt also den drei Personen jährlich: $3h+3k+l$, so lange alle drei am Leben sind; $2h+k$, so lange nur noch zwei leben, und h, so lange nur noch eine am Leben ist.

Als Beispiel wählen wir folgende Aufgabe. Drei Schwestern wünschen eine unmittelbar beginnende Leibrente von 1000 M., so lange sie alle drei am Leben sind, die aber auf 800 M. abnimmt, sobald eine gestorben ist, und endlich auf 500 M., wenn nur noch eine am Leben ist.

Man beantwortet die Frage durch Auflösung der Gleichungen:

$$3h+3k+l=1000;\ 2h+k=800;\ h=500,$$

woraus sich ergiebt:

$$k=-200,\ l=100$$

und folglich als Wert der Leibrente:

$$500\,(a_x + a_y + a_z) - 200\,(a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}) + 100\,a_{xyz}.$$

Die allgemeinste Formel dieser Art ist:

$$k_x\, a_x + k_y\, a_y + k_z\, r_z +$$
$$+ k_{y\,z}\, a_{y\,z} + k_{z\,x}\, a_{z\,x} + k_{x\,y}\, a_{x\,y} + k_{x\,y\,z}\, a_{x\,y\,z}.$$

Indem man hier den k verschiedene Werte giebt, sowohl negative wie auch positive, erhält man alle möglichen lebenslänglichen Leibrenten und Überlebensrenten für drei Personen.

Leibrenten auf vier Personen.

163. Nehmen wir die postnumerando zahlbare Leibrente, so ist die allgemeine Formel für eine solche Leibrente mit verschiedener Veränderung beim ersten, zweiten und dritten Ableben:

$$h\,(a_x + a_y + a_z + a_s) +$$
$$+ k\,(a_{x\,y} + a_{x\,z} + a_{x\,s} + a_{y\,z} + a_{y\,s} + a_{z\,s}) +$$
$$+ l\,(a_{x\,y\,z} + a_{x\,y\,s} + a_{x\,z\,s} + a_{y\,z\,s}) + m\, a_{x\,y\,z\,s}.$$

Betrachten wir jetzt, wieviel die verschiedenen Glieder jährlich im Ganzen geben, so lange noch alle vier, oder nur noch drei u. s. w. am Leben sind.

Das	erste	Glied	giebt	beim	Leben	von	4	Personen	jährlich	$4h$
„	„	„	„	„	„	„	3	„	„	$3h$
„	„	„	„	„	„	„	2	„	„	$2h$
„	„	„	„	„	„	„	1	„	„	h
„	zweite	„	„	„	„	„	4	„	„	$6k$
„	„	„	„	„	„	„	3	„	„	$3k$
„	„	„	„	„	„	„	2	„	„	k
„	dritte	„	„	„	„	„	4	„	„	$4l$
„	„	„	„	„	„	„	3	„	„	l
„	vierte	„	„	„	„	„	4	„	„	m.

So lange also die vier Personen am Leben sind, erhalten sie zusammen jährlich: $4h + 6k + 4l + m$; nach dem ersten Ableben die drei übrigen: $3h + 3k + l$; nach dem zweiten Ableben die zwei übrigen: $2h + k$; und nach dem dritten Ableben bekommt die einzig übrige noch jährlich h.

Zur Bestimmung des Wertes der postnumerando zahlbaren Leibrente, der Einheit per Jahr, die bei jedem Ableben voll übergeht und bis zum Tode des Längstlebenden fortdauert, hat man die Gleichungen

$$4h+6k+4l+m=1$$
$$3h+3k+l=1$$
$$2h+k=1$$
$$h=1,$$

sodafs man findet: $h=1$, $k=-1$, $l=1$, $m=-1$ und der Wert der gesuchten Rente ist:

$$(a_x+a_y+a_z+a_s)-$$
$$-(a_{xy}+a_{xz}+a_{xs}+a_{yz}+a_{ys}+a_{zs})+$$
$$+(a_{xyz}+a_{xys}+a_{xzs}+a_{yzs})-a_{xyzs}. \qquad (279)$$

Um die Rente in der oben gegebenen allgemeinen Form in eine praenumerando zahlbare überzuführen, mufs man $4h+6k+4l+m$ addiren, was auf dasselbe hinauskommt, als wenn man zu allen a die Einheit addirt, d. h. sie durch die a ersetzt.

Verschiedene Formen der Leibrente auf mehrere Personen.

164. Wir werden jetzt die Bedeutung der Formel

$$P(a_x+a_y+a_z)-Q(a_{yz}+a_{zx}+a_{xy}), \qquad (280)$$

näher beleuchten, worin die Leibrente a_{xyz} auf das Leben der drei Personen nicht vorkommt.

So lange die drei Personen am Leben sind, wird jährlich $3(P-Q)$ ausgezahlt; so lange nur noch zwei leben: $2P-Q$, und so lange nur noch eine lebt: P.

Es ist z. B.

$$2(a_x+a_y+a_z)-(a_{yz}+a_{zx}+a_{xy})$$

der Wert der jährlichen Leibrente in der Höhe von 3, so lange wenigstens zwei der drei Personen leben, und reducirt sich diese auf jährlich 2, wenn nur noch eine Person am Leben ist.

Diese Leibrente kann auch betrachtet werden als die Summe von drei Leibrenten auf je zwei Leben mit ganzem Übergang auf den Längstlebenden, u. z.:

$$(a_y+a_z-a_{yz})+(a_z+a_x-a_{zx})+(a_x+a_y-a_{xy}).$$

165.* Es war bis jetzt die Rede von lebenslänglichen Leibrenten, doch sind die Formeln auch auf temporäre Leibrenten anwendbar.

Soll z. B. ein z-jähriges Kind eine Waisenpension erhalten, wenn sowohl sein Vater (x Jahre alt) und seine Mutter (y Jahre alt) gestorben ist und zwar bis es $z+m$ Jahre alt ist, so giebt die Formel (275)

die einmalige Prämie dafür, wenn nur die a temporäre Leibrenten mit m-jähriger Dauer vorstellen; die letzt mögliche Auszahlung findet dann statt, wenn das Kind $z + m$ Jahre alt ist.

165. Es kann vorkommen, dafs sich eine Leibrente auf zwei Personen beim Ableben der einen Person auf andere Weise ändert als beim Ableben der anderen.

Man könnte z. B. den Wert der Leibrente auf zwei Personen (x) und (y) fragen, u. z. derart, dafs beim Ableben von (x) die Leibrente reducirt wird auf $\frac{2}{3}$ und beim Ableben von (y) dagegen auf $\frac{3}{4}$ des ursprünglichen Betrages.

Die allgemeine Formel lautet

$$h\,a_x + k\,a_y + l\,a_{xy}.$$

Stellt man den Rentenbetrag, so lange beide Personen leben, auf die Einheit, so ist

$$h + k + l = 1. \quad \text{Nachdem } k = \tfrac{2}{3} \text{ und } h = \tfrac{3}{4},$$

geht hieraus hervor: $l = -\frac{5}{12}$.

Der Wert der Leibrente beträgt also:

$$\tfrac{3}{4}\,a_x + \tfrac{2}{3}\,a_y - \tfrac{5}{12}\,a_{xy}.$$

Verteilung der einmaligen Prämie bei Leibrenten auf mehr als eine Person.

166. Bei einer Leibrente auf mehrere Personen mit ganzem Übergang auf den Überlebenden wird bisweilen der Wert der Leibrente für jede Person separat gefragt.

Nehmen wir zuerst zwei Personen (x) und (y); so lange (x) und (y) beide leben, empfängt (x) die jährliche Summe $\frac{1}{2}$, welche sich auf 1 erhöht, so lange er noch allein am Leben ist. Es ist dann der Wert der Leibrente für (x):

$$a_x - \tfrac{1}{2}\,a_{xy},$$

und für (y):

$$a_y - \tfrac{1}{2}\,a_{xy}.$$

Betrachten wir jetzt eine Leibrente auf drei Personen (x), (y) und (z).

Der Wert dieser Leibrente stellt sich für (x) offenbar in nachstehender Form dar:

$$h\,a_x + k\,(a_{xy} + a_{xz}) + l\,a_{xyz}.$$

So lange (x), (y) und (z) leben, empfängt (x) jährlich $\frac{1}{3}$.

Ist (y) oder (z) gestorben, so empfängt er $\frac{1}{2}$, und wenn beide gestorben sind, 1.

Hieraus gehen nachstehende Gleichungen hervor:

$$h + 2\,k + l = \tfrac{1}{3},\ h + k = \tfrac{1}{2},\ h = 1, \text{ also } k = -\tfrac{1}{2},\ l = \tfrac{1}{3}.$$

Der Wert der Leibrente beträgt

für (x): $a_x - \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{zx}) + \frac{1}{3} a_{xyz}$,
für (y): $a_y - \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{yz}) + \frac{1}{3} a_{xyz}$,
für (z): $a_z - \frac{1}{2}(a_{zx} + a_{yz}) + \frac{1}{3} a_{xyz}$.

Die Summe ist in der That der Wert der ganzen Rente:

$$a_x + a_y + a_z - (a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}) + a_{xyz}. \quad \text{(Formel 271)}$$

Ebenso kann man den Wert finden, welche eine Leibrente mit ganzem Übergang auf vier Personen (x), (y), (z) und (s) für (x) repräsentirt, nämlich:

$$a_x - \tfrac{1}{2}(a_{xy} + a_{xz} + a_{xs}) + \tfrac{1}{3}(a_{xyz} + a_{xys} + a_{yzs}) - \tfrac{1}{4} a_{xyzs},$$

und bei fünf Personen stellt der Wert für (x) sich auf:

$$a_x - \tfrac{1}{2}(a_{xy} + a_{xz} + a_{xs} + a_{xt}) + \tfrac{1}{3}(a_{xyz} + a_{xys} + a_{xyt} + a_{xzs} + a_{xzt} + a_{xst}) - \tfrac{1}{4}(a_{xyzs} + a_{xyzt} + a_{xyst} + a_{xzst}) + \tfrac{1}{5} a_{xyzst}.$$

In gleicher Weise bei mehreren Personen.

Die allgemeine Verwendbarkeit dieser Methode geht hervor aus der Formel:

$$1 - \frac{n-1}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots \pm \frac{1}{n} = \frac{1}{n},$$

welche aus $(1-1)^n = 0$ abgeleitet wird.

Ist eine jährliche Leibrente zum Betrage von 1 auf das Leben mehrerer Personen zahlbar bis zum ersten Ableben, so ist der Wert für jede Person natürlich derselbe.

Kapitel VII.

Rückgewähr.

Der Begriff der Sache.

167. Wenn jemand eine Versicherung, sei es mit einmaliger oder jährlicher Prämienzahlung, eingeht, so stellt er bisweilen die Forderung, dafs die Versicherungs-Gesellschaft unter gewissen, vorher bestimmten

Umständen die Prämie wieder gänzlich oder teilweise zurückzahlt; dazu mufs der Versicherte dann eine Extra-Prämie zahlen.

Im Allgemeinen ist zu bemerken, dafs ein solcher Vertrag sonderbar und sein Nutzen nur beschränkt ist. Man versichert sich mit Rücksicht auf einen bestimmten Fall, und das Geld ist hin, wenn dieser Fall nicht eintritt; das ist auch ganz in der Ordnung, denn man braucht ja dann das Geld nicht; wozu also die Rückgewähr der Prämie für die Möglichkeit, dafs der Fall nicht eintritt?

Was hat es für einen Zweck, wenn ein Mann, der sich für eine Witwenpension zu Gunsten seiner Frau versichert hat, bei deren Ableben innerhalb einiger Jahre die wenigen Jahresprämien zurückerhält und sich für eine neue Witwenpension nicht wieder versichern kann? Die Rückgewähr hat ihm wenig Vorteil gebracht; ein Kapital bei seinem Ableben wäre eine nützlichere Versicherung gewesen, wenn er auch für eine etwaige zweite Frau sorgen wollte.

Die Versicherung mit Rückgewähr deutet hin auf den Wunsch der Versicherten, umsonst versichert zu sein, mehr aber vielleicht noch auf eine Versicherung wider Willen, ihnen eingeredet von Agenten, die um jeden Preis eine Versicherung abschliefsen wollen. Es ist eine Versicherungsweise, bei welcher der Versicherungsgeber fast ganz aus seiner Rolle heraustritt und weit mehr Vermögensverwalter wird. Es bleibt aber nichts übrig, als der Erfindungsgabe derjenigen Rechnung zu tragen, die auf den Gedanken gekommen sind, und die am häufigsten vorkommenden Fälle, wo die Rückgewähr angewendet wird, zu behandeln.

Versicherung auf den Erlebensfall gegen einmalige Prämie.

168. Es habe jemand die Versicherung eines Kapitals oder einer Rente abgeschlossen, das ausgezahlt werden bezw. die anfangen soll, wenn er nach einer bestimmten Anzahl (n) von Jahren noch lebt; er zahle dafür eine Einlage A. Dieses A bedeute hier die Prämie (Brutto-Prämie), welche der Versicherte in Wirklichkeit zahlt, d. h. die Prämie, wie Sterblichkeitstafel, Zinsfufs, sowie die Unkosten der Gesellschaft u. s. w. sie bedingen. Stirbt er innerhalb dieser n Jahre, so ist die Summe A verloren. Jetzt frage man, gegen welche Summe die Gesellschaft die Rückgewähr der Einlage A versichern kann, d. h. wie grofs der Betrag ist, den der Versicherte noch dazu zahlen mufs, damit die Gesellschaft diese Summe A (ohne Zins) zurückerstattet, wenn er innerhalb der n Jahre stirbt.

Es ist unmittelbar klar, dafs diese Extra-Prämie den Wert für die Versicherung der Summe A, zahlbar auf den Todesfall innerhalb der n Jahre gleichkommt.

Wenn der Versicherte beim Beitritt x Jahre alt ist, so ist die Prämie für die Einheit der Auszahlung auf den Todesfall innerhalb der n Jahre (No. 104):

$$|_n A_x = \frac{\Sigma C_x - \Sigma C_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x},$$

oder auch:

$$1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - d \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x};$$

die Auszahlung ist hierbei als am Ende des Sterbejahres erfolgend vorausgesetzt, kann aber nötigenfalls auf eine Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben zurückgeführt werden. Diese einmalige Prämie, um den erforderlichen Zuschlag vergröfsert, ist die einmalige Brutto-Prämie zur Rückgewähr einer gezahlten einmaligen Prämie im Betrage der Einheit. Bezeichnen wir sie mit h, so mufs zur Rückgewähr der eingelegten Summe A bezahlt werden Ah, sodafs die gesammte Einlage sein mufs:

$$A + Ah = (1 + h) A. \qquad (281)$$

Stirbt jetzt der Versicherte innerhalb der n Jahre, so mufs von der Gesellschaft A ausgezahlt werden, es geht ihm also immer noch die Einlage für die Rückgewähr (Ah) verloren.

Wünscht der Versicherte aber die Einlage vollständig zurückzuerhalten, so läfst sich deren Betrag in folgender Weise berechnen: wenn A' die gesuchte einmalige Prämie bedeutet, so ist hA' die einmalige Prämie für die Rückgewähr von A'; ist A nach wie vor die einmalige Prämie für die Hauptversicherung, so erhält man die Gleichung:

$$A' = A + h A'.$$

und daraus:

$$A' = \frac{A}{1 - h}. \qquad (282)$$

Stirbt jetzt der Versicherte innerhalb der n Jahre, so mufs die Gesellschaft A' zurückerstatten.

Hierzu noch eine Bemerkung: Im Allgemeinen ist es ratsam, verschiedene Sterblichkeitstafeln für Auszahlung auf den Erlebensfall und den Todesfall zu wählen. Es ist aber nicht nötig, für die Rückgewähr eine andere Sterblichkeitstafel zu benutzen als für die Hauptversicherung. Gerade umgekehrt wie bei einer gemischten Versicherung sollte man hier für die Auszahlung auf den Todesfall, d. h. für die Rückgewähr

die Sterblichkeitstafel wählen, welche für die Auszahlung auf den Erlebensfall paſst. Sonst wird der Tarif allzu hoch, denn bei dieser Versicherung ist eine gröſsere Sterblichkeit als zu erwarten war, der Versicherungs-Gesellschaft vorteilhaft.

169. Handelt es sich um die Versicherung der Einheit im Erlebensfall nach n Jahren mit Rückgewähr, und rechnen wir mit Netto-Prämien, so wie Sterblichkeitstafel und Zinsfuſs sie angeben, dann ist

$$A = \frac{D_{x+n}}{D_x},\ 1 - h = \frac{D_{x+n}}{D_x} + d \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x},$$

und Formel (282) geht über in:

$$\frac{D_{x+n}}{D_{x+n} + d \cdot (N_{x-1} - N_{x+n-1})}. \tag{283}$$

Dies ist also die einmalige Netto-Prämie, die beim Ableben innerhalb n Jahren zurückerstattet wird.

Zu dieser Formel kann man auch auf einem anderen Wege gelangen: wenn die Gesellschaft beim früheren Ableben die eingelegte Summe zurückerstattet, so erhält sie von den Überlebenden sowohl die eingelegte Summe als auch den Zins, von den Ablebenden aber nur den Zins bis zu ihrem Ableben.

Wenn wir jetzt ausdrücken, daſs dasjenige, was die Gesellschaft nach der Sterblichkeitstafel empfangen hat, d. h. der jährliche Zins der Einlagen aller derjenigen, die in dem betreffenden Jahr am Leben waren, natürlich unter Berücksichtigung der Verzinsung in den noch übrigen Jahren, plus der Einlage der schlieſslich Überlebenden, dem Betrage der Auszahlung gleich ist, so hat man zur Bestimmung der einmaligen Prämie die Gleichung:

$$A' \cdot i \cdot [l_x (1+i)^{n-1} + l_{x+1} (1+i)^{n-2} + l_{x+2} (1+i)^{n-3} + \ldots + l_{x+n-1}] + A' \cdot l_{x+n} = l_{x+n},$$

woraus sich nach Division mit $(1+i)^{x+n}$ ergiebt:

$$A' \cdot \frac{i}{1+i} \cdot (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}) + A' \cdot D_{x+n} = D_{x+n}.$$

Bei Auflösung nach A' findet man Formel (283).

Um die einmalige Brutto-Prämie A'' zu berechnen, welche im Ablebensfall zurückerstattet wird, setzen wir voraus, daſs der Baarwert der Unkosten einen Teil β von A'' beträgt. Man findet dann A'' aus der Gleichung:

$$A'' D_{x+n} + A'' \frac{i}{1+i} (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}) = D_{x+n} + D_x \cdot \beta A''.$$

170. Auf demselben Wege wollen wir die einmalige Prämie einer Pension zum Betrage der Einheit per Jahr berechnen, die zum ersten Male nach n Jahren zahlbar ist, während die einmalige Prämie am Ende des Sterbejahres zurückerstattet werden soll, wann auch immer das Ableben stattfindet.

Die Gesellschaft erhält jetzt in Wahrheit nur die Zinsen der eingelegten Prämien der l_x Lebenden bis zu ihrem Ableben, sodafs man zur Bestimmung der einmaligen Prämie A folgende Gleichung erhält:

$$A \cdot i \cdot \left(\frac{l_x}{1+i} + \frac{l_{x+1}}{(1+i)^2} + \frac{l_{x+2}}{(1+i)^3} + \frac{l_{x+3}}{(1+i)^4} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{l_{x+n}}{(1+i)^n} + \frac{l_{x+n+1}}{(1+i)^{n+1}} + \frac{l_{x+n+2}}{(1+i)^{n+2}} + \ldots.$$

Wenn man auf beiden Seiten mit $(1+i)^x$ dividirt, ergiebt sich

$$A\frac{i}{1+i}(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots.) =$$
$$= D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots.$$

sodafs

$$A = \frac{1+i}{i}\frac{N_{x+n-1}}{N_{x-1}}. \qquad (284)$$

Dieselbe Formel kann man auch folgendermafsen ableiten: Die einmalige Prämie der Pension ohne Rückerstattung ist: $\frac{N_{x+n-1}}{D_x}$; hierfür zahlt nun der Versicherte blos mit dem Zinse der Einlage A, so lange er am Leben ist, sodafs die Gleichung gilt:

$$\frac{i}{1+i} \cdot A \cdot \mathfrak{a}_x = \frac{N_{x+n-1}}{D_x},$$

oder

$$\frac{i}{1+i} \cdot A \cdot \frac{N_{x-1}}{D_x} = \frac{N_{x+n-1}}{D_x},$$

d. h. wieder:

$$A = \frac{1+i}{i} \cdot \frac{N_{x+n-1}}{N_{x-1}}.$$

171. Um noch einen anderen Fall zu behandeln, suchen wir die einmalige Prämie für die Versicherung der Einheit auf den Erlebensfall nach n Jahren mit der Bedingung, dafs beim Todesfall innerhalb der n Jahre die Einlage mit Zinseszins zurückerstattet wird. In diesem Fall rechnen wir absichtlich mit Netto-Prämien.

Die einmalige Prämie für die Hauptversicherung ist wieder

$$A = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Suchen wir jetzt die einmalige Prämie zur Rückgewähr der Einheit der Hauptprämie mit dem Zins.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Versicherte im t^{ten} Jahr stirbt, ist $\frac{d_{x+t-1}}{l_x}$; die Gesellschaft hat für den Todesfall am Ende des Sterbejahres $(1+i)^t$ auszuzahlen; um aber den gegenwärtigen Wert zu bestimmen, mufs man diesen Betrag mit $(1+i)^t$ dividiren, deshalb ist der gegenwärtige Wert der Auszahlung in Folge der Sterblichkeit im t^{ten} Jahr:

$$\frac{d_{x+t-1}}{l_x} = \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t}}{l_x}.$$

Setzt man hierin nach einander $t = 1, 2, 3 \ldots n$ und addirt, so findet man den gegenwärtigen Wert der Auszahlung in Folge des möglichen Ablebens innerhalb der n Jahre:

$$|_n q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Die ganze Einlage ist jetzt wieder:

$$\frac{A}{1 - |_n q_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{l_x}{l_{x+n}}.$$

Da nun

$$D_x = \frac{l_x}{(1+i)^x}, \quad D_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{(1+i)^{x+n}},$$

so reducirt sich dies einfach zu $\frac{1}{(1+i)^n}$. Hierbei treten Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit vollständig aus dem Spiel; die Einlage ist das Geld, welches in n Jahren zur Einheit anwächst und welches zu jeder Zeit und also auch beim Ableben von der Gesellschaft zurückerstattet werden kann. Die Gesellschaft ist nicht mehr Versicherer, sondern einfach Vermögensverwalter.

172. Verwandt mit diesen Versicherungsweisen ist die Versicherung einer unmittelbar beginnenden Leibrente, mit Rückzahlung der teilweisen oder ganzen Einlage nach dem Ableben.

Nehmen wir an, dafs nach dem Ableben des Versicherten ein Teil α der Einlage zurückgezahlt werden soll.

Bedeutet a' die einmalige Brutto-Prämie nur für die Leibrente, A' diejenige für die Auszahlung 1 auf den Todesfall, so beträgt die ganze Einlage:

$$\frac{a'}{1-\alpha A'}.$$

Die einmalige Netto-Prämie (A) läfst sich in folgender Weise bestimmen: (A) besteht aus zwei Teilen, einmal aus dem Wert der eigentlichen (postnumerando zahlbaren) Leibrente zum Betrage der Einheit per Jahr $a_x = \frac{N_x}{D_x}$ und ferner aus dem Wert der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall zum Betrage von $\alpha(1+\beta)\cdot(A)$, worin $1+\beta$ der Factor ist zur Erhöhung der einmaligen Netto-Prämie, sodafs $(1+\beta)\cdot(A)$ die einmalige Brutto-Prämie ist; letzterer ist

$$\alpha(1+\beta)(A)(1-d\cdot a_x) = \alpha(1+\beta)(A)\left(1-\frac{i}{1+i}a_x-\frac{i}{1+i}\right).$$

Man hat also die Gleichung:

$$(A) = a_x + \alpha(1+\beta)(A)\left(\frac{1}{1+i}-\frac{i}{1+i}\cdot a_x\right),$$

woraus sich ergiebt:

$$(A) = \frac{(1+i)\,a_x}{(1+i)-\alpha(1+\beta)(1-i\,a_x)}. \qquad (285)$$

Auch hier ist offenbar für die Rente und für die Rückerstattung dieselbe Sterblichkeitstafel zu benutzen.

Aus einem theoretischen Gesichtspunkt ist es wichtig, den Fall zu betrachten, dafs beim Todesfall die ganze Einlage zurückerstattet wird; und zwar nehmen wir an, dafs diese Rückgewähr am Anfang des Sterbejahres stattfindet, deren Bedeutung wir in No. 108 betrachtet haben.

Ist also Y die fragliche einmalige Prämie, so hat man:

$$Y = a_x + Y(1-i\,a_x),$$

sodafs sich $Y = \frac{1}{i}$, d. h. als ein von dem Alter gänzlich unabhängiger Wert ergiebt. Er ist einfach das Kapital, welches den jährlichen Zins 1 abwirft. Der Wert der Leibrente ist gleich dem einer ewigen Rente geworden (No. 19), und das ist selbstverständlich, denn der Versicherte läfst bei einer derartigen Versicherung einfach sein eingelegtes Kapital von der Gesellschaft verwalten, er genieſst den Zins während seines Lebens und hinterläfst es ungeschmälert.

Es ist dies nicht ausschliefslich theoretischer Natur, wie man leicht glauben könnte. Man denke sich z. B. jemanden, der mittels Lebens-

versicherung bis zu seinem Tode die Zinsen eines Kapitals erheben, bei seinem Tode aber das Kapital hinterlassen will.

Er kann diesen Zweck auf zwei Weisen erreichen.

1°. Er schliefst mittels einer einmaligen Einlage eine Lebensversicherung zum Betrage des gewünschten Kapitals; von der Summe, welche ihm vom Kapital übrig bleibt, kauft er sich eine lebenslängliche Leibrente.

2°. Für das Kapital kauft er sich eine lebenslängliche Leibrente, er zieht dann mehr als die normellen Zinsen des Kapitals; was er jährlich mehr als die Zinsen empfängt, bestimmt er als Jahresprämie für eine Versicherung im Ablebensfall.

In dieser Weise wurde schon manchmal vorgegangen. Man kann dann bei der einen Gesellschaft eine Leibrente, bei der anderen die Lebensversicherung abschliefsen, und sich bei der Wahl von der Billigkeit der beiden Tarife bei verschiedenen Gesellschaften leiten lassen.

Versicherung auf den Erlebensfall gegen Jahresprämie.

173. Wenn jemand auf ein Kapital oder eine Rente versichert ist, nach einer bestimmten Anzahl (n) von Jahren im Erlebensfall zahlbar, und er dafür während dieser Jahre eine jährliche Prämie P zahlt, so sind im Allgemeinen diese Prämien verloren, falls er innerhalb der betreffenden Jahre stirbt. Wir suchen jetzt die Extra-Jahresprämie, die zu zahlen ist, damit jene Jahresprämien im Sterbefall zurückgezahlt werden können. Für diese Extra-Prämie hat die Gesellschaft P auszuzahlen beim Ableben innerhalb des ersten, $2P$ beim Ableben im zweiten, $3P$ im dritten u. s. w., nP beim Ableben im letzten Jahre.

Ist die Jahresprämie 1, so ist der gegenwärtige Wert dieser möglichen Rückerstattungen:

$$\frac{C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \ldots + nC_{x+n-1}}{D_x},$$

was sich leicht zurückführen läfst auf:

$$\frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x},$$

wo
$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots,$$
$$R_{x+n} = M_{x+n} + M_{x+n+1} + M_{x+n+2} + \ldots,$$
$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots$$

(Vergl. No. 99.)

Um die Jahresprämie für die Rückgewähr der Jahresprämie 1 zu bestimmen, mufs man obigen Ausdruck durch den Wert der Leibrente während der n Jahre dividiren, nämlich durch

$$\frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x},$$

sodafs die gesuchte Jahresprämie wird:

$$\frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}. \qquad (286)$$

Der Zähler in Formel (286) läfst sich auch in den D ausdrücken; es ist nämlich:

$$C_x = \frac{D_x}{1+i} - D_{x+1},$$

also

$$\Sigma C_x = \frac{\Sigma D_x}{1+i} - \Sigma D_{x+1} = \frac{\Sigma D_x}{1+i} - \Sigma D_x + D_x,$$

oder

$$M_x = \frac{N_{x-1}}{1+i} - N_{x-1} + D_x,$$

und demnach

$$M_x = D_x - \frac{i}{1+i} N_{x-1},$$

sodafs endlich

$$\Sigma M_x = \Sigma D_x - \frac{i}{1+i} \Sigma N_{x-1},$$

oder

$$R_x = N_{x-1} - \frac{i}{1+i} S_{x-1}.$$

Auf diese Weise wird der Zähler von (286):

$$N_{x-1} - \frac{i}{1+i} S_{x-1} - N_{x+n-1} +$$

$$+ \frac{i}{1+i} S_{x+n-1} - n D_{x+n} + n \cdot \frac{i}{1+i} N_{x+n-1} =$$

$$= N_{x-1} - N_{x+n-1} - n D_{x+n} - \frac{i}{1+i} (S_{x-1} - S_{x+n-1} - n N_{x+n-1}),$$

und Formel (286) geht über in:

$$1 - \frac{n D_{x+n} + \frac{i}{1+i} (S_{x-1} - S_{x+n-1} - n N_{x+n-1})}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}. \qquad (287)$$

Setzt man diese Jahresprämie nach einem angemessenen Zuschlag $= k$, so hat der Versicherte jährlich $P(1+k)$ zu zahlen, damit er versichert sei sowohl für die Auszahlung auf den Erlebensfall, wie auch für die Rückgewähr der gezahlten Jahresprämien P.

Will er, dafs die gesammten gezahlten Jahresprämien beim früheren Ableben zurückgezahlt werden, so beträgt die jährliche Prämie $\frac{P}{1-k}$.

174. Wenn die versicherte Summe die Einheit ist, so ist nach No. 116

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}$$

die Netto-Jahresprämie, und der Ausdruck $\frac{P}{1-k}$ geht, wenn man für k den Wert aus Formel (287) substituirt, über in:

$$\frac{D_{x+n}}{n D_{x+n} + \frac{i}{1+i}(S_{x-1} - S_{x+n-1} - n N_{x+n-1})}. \qquad (288)$$

Dies ist also die Netto-Jahresprämie, welche beim früheren Ableben zurückerstattet wird.

Genau so wie bei der einmaligen Prämie läfst sich diese Formel aus der Erwägung ableiten, dafs die Gesellschaft von den Überlebenden die Prämien selbst mit dem Zins geniefst, von den Ablebenden aber nur den Zins der Prämien. Man hat dann zur Bestimmung der Jahresprämie bei gänzlicher Rückerstattung im Falle früheren Ablebens die Gleichung:

$$y \cdot i\,[l_x(1+i)^{n-1} + 2\,l_{x+1}(1+i)^{n-2} + 3\,l_{x+2}(1+i)^{n-3} + \ldots + n\,l_{x+n-1}] + n\,y \cdot l_{x+n} = l_{x+n}.$$

Wenn man mit $(1+i)^{x+n}$ dividirt, ergiebt sich:

$$y \cdot \frac{i}{1+i}[D_x + 2\,D_{x+1} + 3\,D_{x+2} + \ldots + n\,D_{x+n-1}] + n\,y\,D_{x+n} = D_{x+n},$$

oder

$$y \cdot \frac{i}{1+i}[S_{x-1} - S_{x+n-1} - n\,N_{x+n-1}] + n\,y\,D_{x+n} = D_{x+n}.$$

Hieraus folgt derselbe Wert der Jahresprämie y wie oben.

Aus Formel (288) folgt:

für die Jahresprämie $\frac{1+i}{i}$ ist das versicherte Kapital im Erlebens-

falle mit Rückgewähr der gänzlichen eingezahlten Prämien bei Ableben vor dem Termin der Auszahlung:

$$n \cdot \frac{1+i}{i} + \frac{S_{x-1} - S_{x+n-1} - n\,N_{x+n-1}}{D_{x+n}} =$$

$$= n \cdot \frac{1+i}{i} + \frac{\Sigma\Sigma D_x - \Sigma\Sigma D_{x+n} - n\,\Sigma D_{x+n}}{D_{x+n}}. \qquad (289)$$

175. Die Formel (289) läfst sich auch in nachstehender Weise finden: Der Zins von $\frac{1}{i}$ zahlbar am Ende des Jahres stellt sich auf 1, also auf $\frac{1}{1+i}$, wenn derselbe am Anfang des Jahres zahlbar ist. Deshalb stellt sich der Zins von $\frac{1+i}{i}$ am Anfang des Jahres auf 1. Die jährliche Prämie $\frac{1+i}{i}$ wird im Ablebensfalle ohne Zins restituirt, im Erlebensfalle aber bekommen die Versicherten mehr als die eingezahlten Prämien. Der Zins der Prämien, welche die Versicherten der Gesellschaft überlassen, bildet also die wachsende Jahresprämie für eine Versicherung im Erlebensfalle ohne Rückgewähr, welche die Gesellschaft neben den eingezahlten Prämien den Versicherten auszahlt, wenn sie am festgesetzten Zeitpunkt am Leben sind. Der Zins, hier die Jahresprämie, stellt sich im ersten Jahre auf 1, im zweiten auf 2, im dritten auf 3 u. s. w., und es ist leicht zu ersehen, dafs das für diese wachsende Jahresprämie im Erlebensfalle auszuzahlende Kapital sich stellt auf

$$\frac{\Sigma\Sigma D_x - \Sigma\Sigma D_{x+n} - n\,\Sigma D_{x+n}}{D_{x+n}}.$$

Es kommen dann noch die eingezahlten Prämien $n \cdot \frac{1+i}{i}$ hinzu.

Bleibt das Alter bei der Auszahlung ungeändert $x+n$, wird hingegen das Alter beim Zutritt um 1 kleiner, also die Dauer n der Versicherung nm 1 gröfser, so ändert sich die Formel (289) über in:

$$(n+1)\frac{1+i}{i} + \frac{\Sigma\Sigma D_{x-1} - \Sigma\Sigma D_{x+n} - (n+1)\,\Sigma D_{x+n}}{D_{x+n}}. \qquad (289^*)$$

Subtrahirt man nun (289) von (289*), so kommt:

$$\frac{1+i}{i} + \frac{\Sigma D_{x-1}}{D_{x+n}} - \frac{\Sigma D_{x+n}}{D_{x+n}},$$

wofür man schreiben kann:

$$\frac{1+i}{i} - a_{x+n} + \frac{\Sigma D_{x-1}}{D_{x+n}} = \frac{1}{i} - a_{x+n} + \frac{\Sigma D_{x-1}}{D_{x+n}}.$$

Dieser Ausdruck giebt also die Vermehrung des versicherten Kapitals an, wenn das Alter um 1 kleiner und die Dauer der Versicherung um 1 gröfser wird. Diese Vermehrung nimmt eine äufserst einfache Form an. Wenn das Alter der Auszahlung ungeändert bleibt, so bleibt auch $\frac{1}{i} - a_{x+n}$ ungeändert, wie auch der Nenner des Bruches $\frac{\Sigma D_{x-1}}{D_{x+n}}$; nur der Zähler ΣD_{x-1} ändert sich. Es vereinfacht dies die Berechnungen, wenn es sich darum handelt, einen Tarif für die Versicherung im Erlebensfalle mit Rückgewähr der Prämien im Ablebensfalle zu berechnen, wenn das für die Auszahlung bestimmte Alter dasselbe bleibt.

Man setze das Alter der Auszahlung $x+1$, die Jahresprämie $\frac{1+i}{i}$; beim Alter des Zutritts $x+1$ ist die Auszahlung 0; beim Alter x, also bei der Dauer 1 Jahr ist die Vermehrung des Kapitals deshalb das Kapital selbst:

$$\frac{1}{i} - a_{x+1} + \frac{\Sigma D_x}{D_{x+1}} \left(= \frac{1+i}{i} + \frac{D_x}{D_{x+1}} \right).$$

Man findet dann:

Alter der Versicherten	Dauer der Versicherung	Zunahme des versicherten Kapitals
$x-1$	2	$\frac{1}{i} - a_{x+1} + \frac{\Sigma D_{x-1}}{D_{x+1}}$,
$x-2$	3	$\frac{1}{i} - a_{x+1} + \frac{\Sigma D_{x-2}}{D_{x+1}}$,
$x-3$	4	$\frac{1}{i} - a_{x+1} + \frac{\Sigma D_{x-3}}{D_{x+1}}$,

u. s. w.

(Man sehe im holländischen „Archief voor de verzekeringswetenschap", Teil V, einen Aufsatz des Herrn **Jac. M. Vaz Dias:** Berekening van een tarief voor verzekering bij leven met wederverzekering.)

176. Eine sehr einfache Methode ist es auch, die Jahresprämien zu betrachten als Einlagen für mehrere Kapitalien. (Man sehe im obengenannten Archiv, Teil V, einen Aufsatz von Prof. **A. E. Rahusen:** Een opmerking over de berekening van een tarief voor verzekering bij leven met wederverzekering.)

Nach Formel (283) beträgt das Kapital das mittels der einmaligen

Prämie 1 im Erlebensfalle nach n Jahren mit Rückgewähr im früheren Ablebensfall, versichert wird:

$$\frac{D_{x+n} + d \cdot (N_{n-1} - N_{x+n-1})}{D_{x+n}} = 1 + d \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+n}},$$

und hierfür kann man nach Formel (212) schreiben:

$$1 + \frac{i}{1+i} \cdot \frac{1}{P_{x\,\overline{n}|}}, \qquad (290)$$

worin $P_{x\,\overline{n}|}$ die Jahresprämie für die Einheit im Erlebensfalle nach n Jahren ohne Rückgewähr vorstellt und auch diese Formel läfst sich ohne weiteres erklären, analog wie oben in Nr. 175.

Ist man also im Besitz eines Tarifs der Jahres-Prämien für Versicherung im Erlebensfalle eines bestimmten Alters ohne Rückgewähr, so ist Formel (290) leicht anzuwenden. Man nimmt dann $x + n$ constant.

Um in diesem Falle das Kapital zu finden, das für die Jahresprämie 1 im Erlebensfalle nach n Jahren mit Rückgewähr ausgezahlt wird, setzt man in (290) x nach einander

$$= x,\ x+1,\ x+2, \ldots . x+n-1, \text{ und } n \text{ zu gleicher Zeit}$$
$$= n,\ n-1,\ n-2, \ldots . 1,$$

und summirt dann. Der reciproke Wert des Resultates ist die Jahresprämie für die Einheit im Erlebensfalle mit Rückgewähr.

177. Wie früher die einmalige Prämie wollen wir jetzt auch die Jahresprämie suchen für die Versicherung der Einheit auf den Erlebensfall nach n Jahren mit der Bedingung, dafs bei früherem Ableben alle Jahresprämien mit Zinseszins zurückgezahlt werden; auch hier wollen wir wieder Netto-Prämien voraussetzen.

Die Jahresprämie für die Versicherung auf den Erlebensfall ohne Rückgewähr ist

$$\frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}.$$

Sollen nun die Jahresprämien, jede zum Betrage der Einheit, mit Zinseszins zurückgewährt werden, so mufs beim Ableben im t^{ten} Jahr zurückgezahlt werden:

$$(1+i)^t + (1+i)^{t-1} + (1+i)^{t-2} + \ldots + (1+i) =$$
$$= (1+i)\,\frac{(1+i)^t - 1}{i},$$

weil, vorausgesetzt, dafs die Auszahlung am Ende des Jahres erfolgt,

die erste Jahresprämie t Jahre, die zweite $t-1$ Jahre u. s. w. auf Zinseszins verzinst gewesen ist. Discontiren wir auf den Anfang mittels des Factors $\frac{1}{(1+i)^t}$ und achten wir darauf, dafs die Wahrscheinlichkeit der Auszahlung

$$\frac{l_{x+t-1}-l_{x+t}}{l_x}$$

ist, so ergiebt sich als Barwert der Auszahlung wegen der Sterblichkeit im t^{ten} Jahre:

$$\frac{1+i}{i}\cdot\frac{l_{x+t-1}-l_{x+t}}{l_x}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+i)^t}\right),$$

was sich leicht reduciren läfst auf:

$$\frac{1}{i}\left[(1+i)\cdot\frac{l_{x+t-1}-l_{x+t}}{l_x}-\frac{D_{x+t-1}}{D_x}+(1+i)\frac{D_{x+t}}{D_x}\right].$$

Setzen wir hierin nach einander $t=1, 2, 3 \ldots n$ und addiren, so erhalten wir als den gegenwärtigen Wert der Rückgewähr der Jahresprämien 1:

$$\frac{1}{i}\left[(1+i)\cdot\frac{l_x-l_{x+n}}{l_x}-\frac{N_{x-1}-N_{x+n-1}}{D_x}+\right.$$
$$\left.+(1+i)\cdot\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}\right],$$

was sich umformen läfst in:

$$\frac{1}{i}\cdot\left[i\,\frac{N_{x-1}-N_{x+n-1}}{D_x}-(1+i)\left(\frac{l_{x+n}}{l_x}-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\right]=$$
$$=\frac{N_{x-1}-N_{x+n-1}}{D_x}-\frac{1+i}{i}\cdot\left((1+i)^n-1\right)\frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Die Jahresprämie für die Rückgewähr ist der Quotient aus diesem Wert und demjenigen der temporären Leibrente. Da letzterer

$$\frac{N_{x-1}-N_{x+n-1}}{D_x}$$

ist, so erhält man für die Jahresprämie den Ausdruck:

$$h=1-\frac{(1+i[(1+i)^n-1]}{i}\cdot\frac{D_{x+n}}{N_{x-1}-N_{x+n-1}}.$$

Die Jahresprämie, deren Rückgewähr versichert wird, ist

$$P=\frac{D_{x+n}}{N_{x-1}-N_{x+n-1}},$$

und die ganze Jahresprämie, gegen welche die Auszahlung nach n Jahren stattfindet, bei früherem Ableben aber die ganze bezahlte Prämie mit Zinseszins zurückerstattet wird, ist:

$$\frac{P}{1-h} = \frac{i}{(1+i)\,[(1+i)^n - 1]},$$

also ein Ausdruck, der vom Alter oder von der Sterbenswahrscheinlichkeit unabhängig ist; er stellt die dem Versicherten nie verloren gehende, jährlich gezahlte Summe dar, welche in n Jahren zur Einheit anwächst und schon vorher zu jeder Zeit mit Zinseszins zurückgezahlt werden kann (siehe No. 18).

Überlebens-Rente oder Kapital.

178. Wenn ein x-jähriger Versorger (x) die Versicherung einer Witwenpension oder eines Witwenkapitals abgeschlossen hat zu Gunsten seiner y-jährigen Frau (y), und wenn er dafür eine einmalige Prämie A zahlt, so ist diese Prämie bei früherem Ableben der Frau verloren.

Wenn er jetzt für diesen Fall die Rückgewähr der Prämie A versichern will, so haben wir es mit der Versicherung eines Kapitals A zu thun, das ausgezahlt werden soll, falls (y) vor (x) stirbt. Wenn das Kapital die Einheit ist, beträgt die einmalige Prämie einer derartigen Versicherung nach No. 145:

$$\frac{\Sigma\,(C_y\, l_{x+\frac{1}{2}})}{D_y\, l_x}. \qquad (291)$$

Tafeln für $\Sigma\,(C_x\, l_{y+\frac{1}{2}})$, die zur Berechnung von Tarifen für Witwenkapital etwa vorliegen sollten, könnte man, wenn für Versorger und Versorgte verschiedene Sterblichkeitstafeln gewählt sind, im vorliegenden Falle nicht gebrauchen, denn in Nr. 145 beziehen sich die Gröfsen C auf den Versorger, die l auf die Versorgte, während in Formel (291) das Umgekehrte zutrifft.

179. Zahlt der Versorger eine Jahresprämie bis zum eigenen Ableben oder dem seiner Frau, und will er die Rückerstattung dieser Prämie versichern, so ist die einmalige Prämie für die Rückgewähr der Einheit an Jahresprämie:

$$\frac{C_y\, l_{x+\frac{1}{2}} + 2\,C_{y+1}\, l_{x+1+\frac{1}{2}} + 3\,C_{y+2}\, l_{x+2+\frac{1}{2}} + \cdots}{D_y\, l_x},$$

was man schreiben kann:

$$\frac{\Sigma\,\Sigma\,(C_y\, l_{x+\frac{1}{2}})}{D_y\, l_x}.$$

Um hieraus die Jahresprämie für die Rückgewähr der Einheit an Jahresprämie zu erhalten, hat man nur mit dem Wert der Verbindungsrente

$$\frac{\Sigma(D_y\, l_x)}{D_y\, l_x}$$

zu dividiren, sodafs sich die Jahresprämie ergiebt gleich:

$$\frac{\Sigma\Sigma(C_y\, l_{x+\frac{1}{2}})}{\Sigma(D_y\, l_x)}. \tag{292}$$

180. Die Formeln (291) und (292) lassen sich auch in den D ausdrücken. Man hat nämlich:

$$C_y\, l_{x+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{D_y}{1+i} - D_{y+1}\right)(l_x + l_{x+1}) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{l_x\, D_y}{1+i} + \frac{l_{x+1}\, D_y}{1+i} - l_x\, D_{y+1} - l_{x+1}\, D_{y+1}\right),$$

Formel (291) geht also über in:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{D_{x\,y}}\Big[v\, N_{x-1.y-1} + v\, N_{x.y-1} -$$

$$- N_{x-1.y} - N_{x\,y}\Big].$$

Dies ist, wie sich leicht ergiebt, nichts anderes als

$$\tfrac{1}{2}\left[A_{x\,y} + \frac{D_{x+1}}{D_x}\, a_{x+1.y} - \frac{D_{y+1}}{D_y}\, a_{x.y+1}\right], \tag{293}$$

ein Ausdruck, der unmittelbar aus Formel (261) hervorgehen würde.

Ebenso läfst sich Formel (292) umformen in:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{N_{x-1.y-1}}\left[\frac{1}{1+i}\, S_{x-1.y-1} + \frac{1}{1+i}\, S_{x.y-1} -\right.$$

$$\left. - S_{x-1.y} - S_{x\,y}\right]. \tag{294}$$

Einfacher als die Formel (291) und (292) sind

$$\frac{\Sigma(C_y\, l_x)}{D_y\, l_x} = v\cdot\frac{\Sigma(d_y\, D_x)}{l_y\, D_x} \tag{291*}$$

und

$$\frac{\Sigma\Sigma(C_y\, l_x)}{\Sigma(D_y\, l_x)} = v\cdot\frac{\Sigma\Sigma(d_y\, D_x)}{\Sigma(l_y\, D_x)} \tag{292*}$$

welche indes ein wenig zu hohe Prämien liefern.

Aussteuer- und Stipendien-Versicherung.

181. Wenn bei dieser Versicherungsart der Versorgte (y) stirbt, ehe er das bestimmte Alter erreicht hat, so ist die Prämie verloren.

Zahlt der Versorger (x) eine Jahresprämie (No. 150 und 151) und will er die Rückgewähr dieser Prämie versichern, sodafs beim Ableben des Versorgten vor dem gesetzten Alter alle Prämien der Hauptversicherung zurückerstattet werden, so mufs man darauf achten, dafs in der Zukunft zwei Fälle möglich sind, 1°. kann bei (y)'s Ableben (x) noch am Leben sein, 2°. kann dann (x) schon gestorben sein.

Die Auszahlung des Kapitals oder der Anfang der Rente möge auf m Jahre nach dem Abschliefsen der Versicherung festgesetzt sein.

Es sei die Anzahl der Paare, welche eine solche Versicherung abschliefsen, $l_x\, l_y$. Im t^{ten} Jahre sterben $l_x\, d_{y+t-1}$ Versorgte. Für diese wurde am Anfang des ersten Jahres $l_x\, d_{y+t-1}$ des zweiten Jahres $l_{x+1}\, d_{y+t-1}$, des dritten Jahres $l_{x+2}\, d_{y+t-1}$ etc., des t^{ten} Jahres $l_{x+t-1}\, d_{y+t-1}$ Jahresprämien gezahlt, die nunmehr sämmtlich zurückerstattet werden müssen; ist also die zurückzuerstattende Jahresprämie 1, so beträgt die Rückgewähr in Folge der Sterblichkeit unter den Versorgten im t^{ten} Jahre:

$$(l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{x+t-1})\, d_{y+t-1}.$$

Hier haben wir offenbar gleichzeitig den Versorgten, die vor und denen, die nach ihren Versorgern sterben, Rechnung getragen. Discontirt man mittels des Faktors $\frac{1}{(1+i)^t}$ und dividirt man mit der ursprünglichen Anzahl von Paaren, so hat man als gegenwärtigen Wert der Rückerstattung der Prämie 1 für eine einzelne Versicherung in Folge der Sterblichkeit im t^{ten} Jahre:

$$\frac{(l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{x+t-1})\, C_{y+t-1}}{D_{xy}}.$$

Setzt man hierin nach einander $t = 1, 2, 3 \ldots m$ und addirt, so ergiebt sich als der Gesammtwert der Rückgewähr für den einzelnen Vertrag:

$$\frac{1}{D_{xy}}[l_x\, C_y + (l_x + l_{x+1})\, C_{y+1} + (l_x + l_{x+1} + l_{x+2})\, C_{y+2} + \ldots$$
$$+ (l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{x+m-1})\, C_{y+m-1}] = Q. \quad (295)$$

Hat man eine Tafel für $\Sigma C_y = M_y$, so empfiehlt es sich, besonders

wenn die Dauer (m) der Versicherung nicht sehr kurz ist, diesen Ausdruck noch in folgender Weise weiter zu transformiren:

$$Q = \frac{1}{D_{xy}} [l_x (M_y - M_{y+m}) + l_{x+1} (M_{y+1} - M_{y+m}) +$$
$$+ l_{x+2} (M_{y+2} - M_{y+m}) + \ldots + l_{x+m-1} (M_{y+m-1} - M_{y+m})] =$$
$$= \frac{1}{D_{xy}} [l_x M_y + l_{x+1} M_{y+1} + l_{x+2} M_{y+2} + \ldots$$
$$+ l_{x+m-1} M_{y+m-1} - (l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots$$
$$+ l_{x+m-1}) M_{y+m}]. \qquad (296)$$

Bedeutet a den Wert der Verbindungsrente auf m Jahre, so ist $\frac{Q}{a}$ die Jahresprämie für die Rückgewähr der Einheit der Jahresprämie.

Versicherung auf den Todesfall während einer bestimmten Anzahl von Jahren, mit Rückgewähr aller Prämien auf den Erlebensfall nach Verlauf dieser Jahre.

182. Die Versicherung sei auf eine während der bestimmten Anzahl von (n) Jahren gleichbleibende Jahresprämie abgeschlossen.

Die Netto-Jahresprämie für die temporäre Versicherung der Einheit auf den Todesfall ist:

$$P = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} = \frac{D_x \cdot A_x - D_{x+n} \cdot A_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \text{ (No. 104).}$$

Die gesuchte Brutto-Jahresprämie (stets für die Einheit) sei P', dann muſs auf den Erlebensfall nach n Jahren nP' zurückerstattet werden; die einmalige Netto-Prämie hierfür ist:

$$n \cdot P' \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Der Netto-Wert der ganzen Versicherung ist also am Anfang:

$$P \cdot a_{x\,\overline{n}|} + n \cdot P' \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Soll jetzt in der Einheit der Brutto-Jahresprämie ein Teil α als Zuschlag mit einbegriffen sein, so ist die Netto-Jahresprämie $(1 - \alpha) P'$ und deren Wert am Anfang der Versicherung:

$$(1 - \alpha) P' \cdot a_{x\,\overline{n}|},$$

man hat demnach zur Bestimmung der Brutto-Prämie P' die Gleichung:

$$P \cdot a_{x\,\overline{n}|} + n \cdot P' \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = (1-\alpha)\, P' \cdot a_{x\,\overline{n}|}.$$

Werden P und $a_{x\,\overline{n}|}$ durch die bekannten Ausdrücke ersetzt, so ergiebt sich leicht:

$$P' = \frac{M_x - M_{x+n}}{(1-\alpha)\,(N_{x-1} - N_{x+n-1}) - n\,D_{x+n}}. \qquad (297)$$

Indessen ist diese Versicherung nicht für jede willkürliche Zahl von Jahren möglich; erstens wird die Prämie sehr hoch bei kurzer Dauer, und bei sehr kurzer Dauer wird sie sogar negativ. (Inbetreff der Bedeutung solch einer negativen Prämie vergl. No. 122.)

Lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall, bei welcher eine temporäre Jahresprämie nach Verlauf der betreffenden Jahre in eine Leibrente gleichen Betrages übergeht.

183. Die Jahresprämie laufe n Jahre, und ihr Bruttobetrag sei P', sodafs der Versicherte, wenn er nach n Jahren noch am Leben ist, die Leibrente P' erhält, während seine Versicherung auf den Todesfall in Kraft bleibt.

Eine der soeben benutzten ganz ähnliche Schlufsweise führt zu der Gleichung:

$$A_x + P' \frac{N_{x+n-1}}{D_x} = (1-\alpha) \cdot P' \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x},$$

aus welcher folgt:

$$P' = \frac{M_x}{(1-\alpha)\,N_{x-1} - (2-\alpha)\,N_{x+n-1}}. \qquad (298)$$

Hierin bedeutet α wieder den in der Einheit der Brutto-Prämie einbegriffenen Zuschlag auf die Netto-Prämie, sodafs letztere $(1-\alpha)P'$ ist.

Man sieht, dafs auch diese Versicherungsweise bei kurzer Dauer unmöglich ist, denn für kleine Werte von n wird der Nenner von (298) und damit P' negativ, und dieses Negativwerden des Nenners wird im Allgemeinen schon bei gröfseren Werten von n eintreten als bei dem Nenner von (297).

Ist ${}_nP'_x$ die temporäre Jahresprämie für die lebenslängliche Versicherung, $P'\,{}_n|\,a_x$ die Jahresprämie für die n Jahre aufgeschobene vor-

schüssige Leibrente zum Betrage der Einheit, so sieht man leicht, dafs man die Prämie P' nach Formel (298) auch schreiben kann:

$$P' = \frac{{}_nP'_x}{1 - P'_{n|}a_x}.$$

Die Accente weisen auf Brutto-Prämien hin.

Kapitel VIII.

Brutto-Prämien.

Zuschlag.

184. Die Prämien, wie sie nach den gewählten Sterblichkeitstafeln und nach dem angenommenen Zinsfufs berechnet werden, sind Netto-Prämien. Diese Netto-Prämien wurden früher oft und vielleicht bisweilen noch jetzt in Tarife aufgenommen und so, wie sie sind, angewendet. Dies läfst sich verteidigen, wenn wegen der Wahl der Grundlagen ein so grofser Gewinn aus der Art des Ablebens und aus den Zinsen zu erwarten ist, dafs alle Unkosten der Gesellschaft damit gedeckt werden können. Besser ist es aber, die Grundlagen zwar vorsichtig aber doch so zu wählen, dafs sie sich der Wirklichkeit ziemlich genau anschliefsen. Die dann sich ergebenden Prämien müssen aber zur Bestreitung der Unkosten der versichernden Gesellschaft erhöht werden, denn deren Ausgaben bestehen ja nicht blos in den Auszahlungen an die Versicherten. Die Erhöhung, welche auf die Netto-Prämien gelegt wird, um sie zu Tarif- oder Brutto-Prämien zu erhöhen, heifst Zuschlag. Einige Ausgaben der Gesellschaft kann man als der Prämieneinnahme nahezu proportional annehmen; für die Einkassirungskosten gilt dies sogar ganz genau, nicht in demselben Mafse für die Besoldungen der Direktoren, Beamten und des sonstigen Personals. Die Höhe anderer Ausgaben hängt weniger von der Gesammteinnahme an Prämien ab, als von den gerade abgeschlossenen Versicherungen; namentlich trifft dies zu für die Abschlufs-Provision und die Kosten der ärztlichen Untersuchungen (diese werden aber bei vielen Gesellschaften, wenn auch nicht vollständig, so doch teilweise durch die sogenannten Policenkosten gedeckt), Annoncen und

dergleichen. Wir müssen also einen Unterschied machen zwischen ersten und dauernden Unkosten; die letzteren wollen wir vorläufig der Prämieneinnahme proportional setzen, die ersteren werden je nach den Usancen der verschiedenen Gesellschaften auf verschiedene Weisen berechnet.

Indes muſs der Zuschlag so regulirt werden, daſs die Versicherung den Versicherten eine Chance auf Vorteil giebt. Es ist in finanzieller Hinsicht — und nur aus einem finanziellen Gesichtspunkt kann die Frage hier betrachtet werden — gewiſs nicht zu empfehlen, eine Versicherung auf den Erlebensfall abzuschlieſsen, wenn es sich als vorteilhaft ausstellt, das ersparte Geld einer Sparbank anzuvertrauen und auf diese Weise auch die Gefahr des Verlustes desselben zu vermeiden. Ebenso wenig wäre der Abschluſs einer Leibrente zu empfehlen, wenn man von dem „à fonds perdu“ eingezahlten Geld einen geringeren Zins als den normellen ziehen würde, obwohl das Kapital auf immer verloren ist.

Die Litteratur über den Zuschlag ist nicht reich. Ich erwähne nur: **David J. A. Samot F. I. A.:** The Problem of Loading und **Dr. A. Amthor:** Die Berechnung des Percentsatzes der Verwaltungskosten in der Lebensversicherung (Separatabdruck aus A. Ehrenzweig's „Assecuranz-Jahrbuch“, XX. Jahrgang).

Abschluſs-Provision.

185. Es giebt Gesellschaften, besonders in England, die den Agenten für das Abschlieſsen der Versicherungen wenig oder gar keinen Lohn zahlen, einen hohen dagegen, z. B. 5%, für das Einkassieren der Prämien. Dieses System hat viel für sich, weil es dabei nicht im Interesse des Agenten liegt, nur immerfort neue Versicherungen abzuschlieſsen, wie wenig empfehlenswert diese auch manchmal für die Gesellschaft sein mögen, als vielmehr für Versicherungen zu sorgen, die eine längere Dauer versprechen und ihnen dadurch ein sicheres Einkommen verschaffen. Die meisten Gesellschaften aber zahlen einen geringeren Einkassirungslohn, z. B. 2%, einige 2½ oder 3%, jedoch eine bisweilen recht hohe Vergütung (Abschluſs-Provision) für das Abschlieſsen von Versicherungen.

Diese Abschluſs-Provision wird nach verschiedenen Systemen berechnet; so wird ziemlich oft 1 %, 1½ %, bisweilen 2% des versicherten Kapitals gezahlt. Andere Gesellschaften geben 30 %, 40 %, sogar 50 % und mehr einer Jahresprämie.

Es braucht kaum die Nachteile übertrieben hoher Abschluſs-Provisionen aufzuweisen; es fällt in die Augen, daſs dieselben sehr leicht

die Gesellschaft in die Lage bringen können, für die späteren Jahre nur wenig, bisweilen zu wenig von der Prämieneinnahme zur Deckung der Verwaltungskosten und Erzielung eines Gewinnes übrig zu behalten. Man könnte ja allerdings die Prämien auf willkürliche Abschlufs-Provisionen einrichten und zugleich den zukünftigen Ausgaben Rechnung tragen, allein die Prämien würden dann leicht besonders für gewisse Versicherungsarten so hoch werden, dafs bei der grofsen Concurrenz die Gesellschaften nicht wagen könnten, sie zu fordern. Aufserdem soll die Abschlufs-Provision nicht so hoch sein, dafs von der Prämie des ersten Jahres im Allgemeinen nicht genug übrig bleiben würde, um das Risico dieses Jahres zu decken.

Die Gesellschaften, welche die Abschlufs-Provision nach Procenten des versicherten Kapitals oder der Jahresprämie berechnen, sind gezwungen, diese Procente für verschiedene Versicherungsweisen verschieden zu wählen. So geben sie bei temporärer Versicherung oder auch bei kurzfristiger Versicherung auf den Erlebensfall eine viel niedrigere Provision als bei einer Versicherung von langer Dauer, weil sonst die hohe Provision von den Versicherten in wenigen Jahren gezahlt werden müfste, was die Prämie allzu hoch machen würde. Einige Gesellschaften setzen darum bei einer Versicherung von kurzer Dauer die Abschlufs-Provision auf $1\frac{1}{2}$, 2, sogar 3 % der accumulirten Prämien. Wird die Abschlufs-Provision nach dem versicherten Betrage berechnet, so mufs man sich bei versicherten Renten wieder in besonderer Weise zu helfen suchen, indem man sie in mehr oder weniger rationeller Weise auf ein versichertes Kapital reducirt. Falls die Provision in Procenten der ersten Jahresprämie gezahlt wird, müssen bei derselben Art der Versicherung verschiedene Wege eingeschlagen werden, je nachdem die Prämie einmalig, temporär oder veränderlich gezahlt wird. Beträgt die Provision in anderen Fällen 30 % der ersten Jahresprämie, so hätte es doch offenbar keinen Sinn, bei der einmaligen Prämie 30 % als Provision zu zahlen. Um hier möglichst consequent zu sein, wäre es noch am zweckmäfsigsten, jede Versicherung zu betrachten, als würde fortwährend eine gleich bleibende Jahresprämie bezahlt.

Aber auch dieses Verfahren würde zu Unbilligkeiten führen. So wäre es doch ungerecht, den Agenten eine ebenso hohe Provision für eine Versicherung von 1000 M., die wahrscheinlich innerhalb der nächsten 20 Jahre zur Auszahlung kommt, zu zahlen, wie für eine Versicherung gleichen Betrages, die wahrscheinlich niemals ausgezahlt wird. Ebenso wenig wäre es richtig, für eine Versicherung, deren Jahresprämie im Betrage von 100 M. wahrscheinlich mehr als 20 Jahre laufen wird, keine

höhere Provision zu bewilligen wie für eine andere, bei welcher dieselbe Prämie sicher nicht länger als 5 Jahre gezahlt werden wird.

Soll der Lohn des Agenten richtig bemessen werden, so muſs er dem Wert, den die Versicherung beim Abschluſs hat, proportional sein, und dieser Wert wird durch nichts so genau bezeichnet, wie durch die einmalige Prämie für die betreffende Versicherung. Unter diesem Gesichtspunkte muſs die Abschluſs-Provision in festen Procenten (2 bis 3) der einmaligen Prämie bestehen. Bei diesem System allein kann man für alle Versicherungsarten auf dieselbe Weise verfahren, man ist unabhängig von der Art der Prämienzahlung, und braucht keinen Unterschied zwischen Kapital- und Rentenversicherung zu machen. Auch wird bei anderer Berechnungsart der Abschluſs-Provisionen für die verschiedenen Versicherungsweisen, die einmalige Prämie, wenn auch halb unbewuſst, in Betracht gezogen.

Wird die Jahresprämie in mehreren Raten bezahlt, so soll die Abschluſs-Provision über ebenso viele Termine verteilt werden. Bezahlt der Versicherte während des ersten Jahres eine geringere als die gleichbleibende Jahres-Prämie, so soll die Abschluſs-Provision auch über mehrere Jahre vertheilt werden. Es erscheint dies ebenso erwünscht bei temporären Versicherungen auf den Ablebensfall mit kurzer Dauer.

Wir wollen im Folgenden die Formeln für die erwähnten Systeme entwickeln. Dabei möge für alle Versicherungsweisen die einmalige Netto-Prämie mit A und die praenumerando zahlbare Leibrente mit a bezeichnet werden, gleichgültig ob letztere lebenslänglich, temporär, zunehmend oder abnehmend, für eine oder mehrere Personen bestimmt ist. Die Jahresprämie ist dann durch $P = \frac{A}{a}$ dargestellt.

Erste Unkosten in Procenten der Versicherungssumme.

186. Schätzen wir die ersten Unkosten (Abschluſs-Provision, ärztliche Untersuchung u. s. w.) auf α (z. B. 0.015 bis 0.025) per Einheit der versicherten Summe, rechnen wir für Gewinn und Administrationskosten einen Bruchteil (z. B. 0.06 bis 0.10) der Prämie, unabhängig von der Art, wie sie gezahlt wird, und einen weiteren Bruchteil (z. B. $1\frac{1}{4}$ à $2\frac{1}{2}$ %) derselben als Einkassirungslohn. Die Erhöhungen für Administration, Gewinn und Einkassirungslohn lassen sich zusammenfassen und mögen zusammen β per Einheit der Prämie (z. B. $\beta = 0.08$ bis 0.12) betragen.

Setzen wir die einmalige Brutto-Prämie für die Einheit der versicherten Summe $= A'$, dann ist:

$$A' = A + \alpha + \beta A';$$

und folglich:

$$A' = \frac{A + \alpha}{1 - \beta}. \qquad (299)$$

Dividirt man jetzt A' durch das je nach der Weise der Prämienzahlung bezeichnete a, so erhält man als Brutto-Jahresprämie P', mag sie gleichbleibend, veränderlich, lebenslänglich oder temporär sein:

$$P' = \frac{A + \alpha}{(1 - \beta)\,\mathrm{a}}. \qquad (300)$$

187. Im Vorigen ist vorausgesetzt worden, dafs auch für die Prämie im ersten Jahr der Einkassirungslohn gezahlt wird, und dafs die Administrationskosten — mit Ausnahme derjenigen für den Abschlufs der Versicherung — jedes Jahr dieselbe Anzahl von Procenten der eingehenden Prämie betragen, wie im Übrigen die Prämienzahlung auch geregelt sei, also auch bei einmaliger Prämie.

Man darf jedoch annehmen, dafs die Administrationskosten höher sind, so lange die Prämienzahlung dauert, als wenn sie aufgehört hat; aufserdem ist der Einkassirungslohn des ersten Jahres bei vielen Gesellschaften in der Abschlufs-Provision einbegriffen. Dazu kommt, dafs die Abweichung der Sterblichkeit um so geringeren Einfluſs auf Gewinn oder Verlust ausübt, je kürzer die Dauer der Prämienzahlung gewählt ist.

Bei der Annahme, dafs die Administrationskosten des ersten Jahres um einen Teil μ der Prämie geringer sind als in den folgenden Jahren, sodafs dieselben im ersten Jahre $(\beta - \mu)\,P'$ und während der späteren Jahre $\beta\,P'$ betragen, ergiebt sich die einmalige Prämie:

$$A' = \frac{A + \alpha}{1 - \beta + \mu},$$

während man bei jeder Weise der Prämienzahlung die Jahresprämie P' findet aus der Gleichung:

$$P' \cdot \mathrm{a} = A + \alpha + \beta P'\,\mathrm{a} - \mu P',$$

also in

$$P' = \frac{A + \alpha}{(1 - \beta)\,\mathrm{a} + \mu}. \qquad (301)$$

Man kann z. B. setzen $\alpha = 0.015$; $\beta = 0.11$; $\mu = 0.04$, dann ist:

$$A' = \frac{A + 0.015}{0.93}, \quad P' = \frac{A + 0.015}{0.89\,\mathrm{a} + 0.04}.$$

Erste Unkosten in Procenten der Prämie des ersten Jahres.

188. Bei dieser Berechnungsweise der Abschluſs-Provision ändert sich für dieselbe Versicherungsweise der Prozentsatz mit jedem Wechsel in der Art der Prämienzahlung.

a bedeute die gleichbleibende Leibrente und zwar von derselben Dauer wie die Versicherung selbst.

Man schätze die ersten Unkosten auf einen Teil δ der ersten Jahresprämie, β sei der Teil, der von jeder Jahresprämie für laufende Unkosten und Gewinn, γ der Teil der Jahresprämie, der im zweiten und den folgenden Jahren als Einkassirungslohn zur Berechnung kommt, dann gilt für die Jahresprämie P' die Gleichung:

$$P' \cdot a = A + \delta P' + \beta P' \cdot a + \gamma P' \cdot (a - 1),$$

aus welcher folgt:

$$P' = \frac{A}{(1 - \beta - \gamma)\, a - \delta + \gamma}. \qquad (302)$$

Sollen bei diesem System die Unkosten beim Abschluſs für jede Art der Prämienzahlung dieselben sein, so betragen sie $\delta P'$, wo P' die Jahresprämie nach Formel (302) ist. Wünscht man, daſs die Zuschläge für Administrationskosten und Gewinn beim Anfang der Versicherung, unabhängig von der Weise der Prämienzahlungsmodus denselben Wert haben, so findet man die einmalige Brutto-Prämie aus der Gleichung:

$$A' = A + \delta P' + \beta A',$$

und deshalb

$$A' = \frac{A + \delta P'}{1 - \beta}. \qquad (303)$$

Hieraus läſst sich dann wieder die Brutto-Jahresprämie für andere Arten der Prämienzahlung ableiten. Nehmen wir als Beispiel die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall für die Person eines x-jährigen, dann ist die einmalige Netto-Prämie:

$$A = A_x.$$

Sollen z. B. die ersten Unkosten 40 % einer gleichbleibenden Jahresprämie bei fortwährender Prämienzahlung betragen, also $\delta = 0.4$ sein, und ist weiter $\beta = 0.06$, $\gamma = 0.02$, dann ist die betreffende Jahresprämie nach Formel (302):

$$P' = \frac{A_x}{0.92\, a_x - 0.38},$$

und die einmalige Brutto-Prämie

$$A' = \frac{A_x + 0.4\,P'}{0.94}.$$

Zur Bestimmung der Jahresprämie ${}_{10}P'$, die 10 Jahre gezahlt werden, bei früherem Ableben des Versicherten aber aufhören soll, hat man jetzt die Gleichung:

$${}_{10}P' \cdot a_{x\,\overline{10|}} = A' + 0.02 \cdot {}_{10}P' (a_{x\,\overline{10|}} - 1),$$

folglich

$${}_{10}P' = \frac{A'}{0.98\, a_{x\,\overline{10|}} + 0.02},$$

wo

$$a_{x\,\overline{10|}} = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+10}}{D_x} = \frac{N_{x-1} - N_{x+9}}{D_x}.$$

Auch hier kann man, wie in No. (187) die Administrationskosten für das erste Jahr niedriger stellen.

Erste Unkosten in Procenten der einmaligen Prämie.

189. Man bestimme für erste Unkosten einen Teil λ der einmaligen Brutto-Prämie, während für Administration, Gewinn und Einkassierungslohn zusammen ein Teil β jeder Prämie, also auch der ersten berechnet wird. Alsdann ergiebt sich die einmalige Brutto-Prämie aus:

$$A' = A + \lambda A' + \beta A',$$

sodafs

$$A' = \frac{A}{1 - \lambda - \beta}. \tag{304}$$

Für jede Zahlungsweise der Jahresprämie P' ist letztere

$$P' = \frac{A'}{a} = \frac{A}{(1 - \lambda - \beta)\,a}, \tag{305}$$

wo a je nach der Art der Prämienzahlung berechnet ist.

Diese Methode hat also den doppelten Vorteil, dafs sie den Agentenlohn am richtigsten berechnet und dafs sie äufserst handlich ist, denn hier ist jede Prämie, mag sie einmalig, gleichbleibend oder veränderlich sein, um dieselben Procente zu erhöhen.

Rechnet man z. B. die Abschlufs-Provision auf 2% der einmaligen Prämie und die übrigen Ausgaben auf 10% jeder Prämie, dann ergiebt sich bei allen Zahlungsweisen die Brutto- aus der Netto-Prämie durch Division der letzteren mit 0.88.

Ist man aber der Meinung, dafs der Zuschlag im ersten Jahr geringer sein kann, also mindestens der Einkassirungslohn des ersten Jahres in der Abschlufs-Provision mit einbegriffen sein müsse, so setze man die Administrationskosten bei Zahlung der einmaligen Prämie gleich $(\beta - \mu) A'$ und schlage den Teil μ dann nur auf die zweite und die folgenden Zahlungen zu; in diesem Falle ist die einmalige Prämie:

$$A' = \frac{A}{1 - \lambda - \beta + \mu}, \tag{306}$$

und es folgt wieder jede Art von Jahresprämie P' aus der Gleichung:

$$P' \cdot \mathrm{a} = A + \lambda A' + \beta P' \mathrm{a} - \mu P'. \tag{307}$$

Die Unkosten des Abschliefsens und der Administration proportional der versicherten Summe.

190. Bei einigen Gesellschaften pflegt man nicht nur die Abschlufs-Provision und andere Unkosten, die mit dem Abschliefsen der Versicherungen verbunden sind, sondern auch den Zuschlag für Administrationskosten den versicherten Kapitalien, den Zuschlag für Gewinn und den Einkassirungslohn aber den Prämien proportional zu setzen.

Die Unkosten, welche mit dem Abschliefsen der Versicherung notwendig verbunden sind, seien α, die jährlichen Administrationskosten β per Einheit des versicherten Betrages, der Einkassirungslohn für die Prämien des zweiten und der nachfolgenden Jahre γ per Einheit der Prämie, der Zuschlag für den Gewinn δ per Einheit jeder Prämie.

Wenn P die Netto-Jahresprämie bedeutet, A die einmalige Netto-Prämie für die Einheit, P' die gesuchte Jahresprämie, so ist

$$P' = P + \frac{\alpha}{\mathrm{a}} + \beta + \frac{\gamma(\mathrm{a} - 1)}{\mathrm{a}} \cdot P' + \delta P',$$

woraus folgt:

$$P' = \frac{P + \frac{\alpha}{\mathrm{a}} + \beta}{1 - \left(\frac{\mathrm{a} - 1}{\mathrm{a}} \gamma + \delta\right)} = \frac{A + \alpha + \beta\,\mathrm{a}}{\mathrm{a}(1 - \gamma - \delta) + \gamma}. \tag{308}$$

Setzt man hierin $\gamma = 0$ und multiplicirt mit a, so ergiebt sich die einmalige Brutto-Prämie:

$$A' = \frac{A + \alpha + \beta\,\mathrm{a}}{1 - \delta}. \tag{309}$$

Die Abschlufs-Provision über einige Jahre verteilt.

191. Gegenwärtig wird mehrfach empfohlen, dem Agenten die Abschlufs-Provision für Versicherungen gegen Jahresprämie nicht schon im ersten Jahre ganz zu zahlen, sondern sie lieber z. B. auf 5 Jahre zu verteilen. So wird der Nachteil einer baldigen Anullirung der Versicherung geringer, und die Agenten sind mehr daran interessirt, für das Bestehenbleiben der Versicherungen zu sorgen. Eine solche Mafsregel ist wohl als notwendig zu bezeichnen, wenn die Versicherung oder die Prämienzahlung der Art ist, dafs die Prämien in den ersten Jahren nicht viel mehr als das Risico decken.

Suchen wir für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall die Jahresprämie P', die bestimmt ist zur Deckung sowohl der künftigen Auszahlung wie auch der Abschlufs-Provision, welche dem Agenten während der ersten 5 Jahre im Betrage f per Jahr und per Einheit des versicherten Betrages gezahlt werden soll.

Man findet dann unter Berücksichtigung, dafs in den ersten 5 Jahren jährlich $P' - f$, nachher P' für die eigentliche Versicherung bestimmt ist, P' aus der Gleichung:

$$A_x = (P'_x - f) \cdot (\mathfrak{a}_x - \frac{D_{x+5}}{D_x} \cdot \mathfrak{a}_{x+5}) + P'_x \cdot \frac{D_{x+5}}{D_x} \mathfrak{a}_{x+5},$$

oder

$$A_x = (P'_x - f)\, \mathfrak{a}_x + f \cdot \frac{D_{x+5}}{D_x} \mathfrak{a}_{x+5},$$

und folglich:

$$P'_x = \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x} + f - f \frac{D_{x+5}}{D_x} \cdot \frac{\mathfrak{a}_{x+5}}{\mathfrak{a}_x}.$$

Setzt man hierin die Netto-Jahresprämie $\frac{A_x}{\mathfrak{a}_x} = P_x$, so ergiebt sich leicht:

$$P'_x = P_x + f \frac{N_{x-1} - N_{x+4}}{N_{x-1}}. \qquad (310)$$

Diese Prämie P' mufs dann noch einen Zuschlag erhalten für Administrationskosten, Einkassirungslohn und Gewinn. Ganz ebenso werden bei derselben Regulirung der Abschlufs-Provision die Formeln für andere Arten der Versicherung oder der Prämienzahlung gebildet, sodafs es überflüssig wäre, sie hier besonders zu behandeln.

Sonstige Bestimmungen des Zuschlags.

192. Manche erhöhen die Netto-Jahresprämie um eine Constante und multipliciren sie dann mit einem constanten Faktor, sodafs die Jahresprämie die Form erhält:

$$(1+\nu)\ (P+\mu).$$

Wieder andere erhöhen zunächst die Netto-Jahresprämie mit Hilfe eines constanten Faktors und addiren dazu eine Constante, sodafs die Jahresprämie alsdann die Form gewinnt:

$$(1+\varrho)\ P+\sigma.$$

Im Grunde genommen kommen beide Methoden auf dasselbe hinaus.

Diese Methoden nehmen weniger Rücksicht auf die verschiedenen Gründe des Zuschlags, als vielmehr auf die Prämien der concurrirenden Gesellschaften, und sind deshalb weniger wissenschaftlich als die vorhergehenden.

Bei lebenslänglicher Versicherung im Ablebensfalle vermehren Einige zur Bestimmung der Brutto-Jahresprämie die einmalige Netto-Prämie mit der Netto-Jahresprämie, dividiren die Summe mit dem Wert der vorschüssigen Leibrente und erhöhen danach mit einigen Procenten; man hat nunmehr die Brutto-Jahresprämie:

$$P' = (1+\alpha)\frac{A+P}{\mathfrak{a}} = (1+\alpha)\ P\left(1+\frac{1}{\mathfrak{a}}\right). \qquad (311)$$

Diese Methode basirt sich auf der Annahme, dafs die Prämie des ersten Jahres gröfstenteils durch die ersten Unkosten verbraucht wird. Der Zuschlag wächst mit dem Alter.

Bei Versicherungen, welche innerhalb einer bestimmten Zeit aufhören, sowie bei temporären Versicherungen im Ablebensfalle, Versicherungen im Erlebensfall, gemischten Versicherungen, wird auch nachstehende Formel angewendet:

$$P' = (1+\alpha)\left(1+\frac{\beta\, n}{|_n\,\mathfrak{a}}\right)\cdot P, \qquad (312)$$

worin n die Dauer der Versicherung andeutet. Der Zuschlag wächst mit der Dauer der Versicherung, denn es ist deutlich, dafs $|_n\,\mathfrak{a} < n$ ist.

193. Wenn man aus den Formeln

$$A = 1 - d\cdot\mathfrak{a} \text{ und } P = \frac{A}{\mathfrak{a}}$$

die Gröfse a eliminirt, so erhält man:

$$\frac{A\,d}{P} = 1 - A. \qquad (313)$$

Nun ist $A\,d$ der jährliche (vorschüssige) Zins der einmaligen Prämie A; demnach ist $\frac{A\,d}{P}$ das Kapital, welches versichert werden kann für den Zins der einmaligen Prämie als Jahresprämie. In obenstehender Formel ist also folgender Satz bewiesen: Der Zins der einmaligen Prämie ist die Jahresprämie für das versicherte Kapital verringert um die einmalige Prämie.

Dieser Satz gilt nicht allein bei lebenslänglicher Versicherung auf den Todesfall, sondern auch bei gemischter Versicherung.

Hieraus erfolgt, dafs jemand, welcher eine gewisse Summe bestimmt als einmalige Prämie für eine Versicherung, diese einmalige Prämie selbst bei einer Bank deponiren und den Zins jedes Mal als Jahresprämie bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft einzahlen kann. Zahlt er nun die einmalige Prämie bei der Gesellschaft, so hat er die Versicherung teilweise zu einem Bankgeschäft gemacht und ist nicht 1, sondern $1 - A$ die eigentlich versicherte Summe.

Hieraus würde hervorgehen, dafs der Zuschlag auf die einmalige Netto-Prämie nicht über das Kapital 1, sondern über das Kapital $1 - A$ genommen werden sollte. Ist also αP der Zuschlag auf der Netto-Jahresprämie P, so soll der Zuschlag auf der einmaligen Netto-Prämie A nicht αA, sondern $\alpha A\,(1 - A)$ sein. (Man sehe einen Aufsatz des Herrn **Jac. M. Vaz Dias** über den Gegenstand im bereits erwähnten holländischen Archief V. Teil.)

Im Gegensatz zu Obigem ist zu bemerken, dafs die meisten Gesellschaften sich nicht zu Bankgeschäften leihen wollen, und dafs man auch bei jährlichen Prämien behaupten kann: die eigentlich versicherte Summe ist nicht das Kapital, sondern das Kapital vermindert mit der Reserve, die Reserve ist blos deponirt bei der Gesellschaft; der Zuschlag soll mit jedem Jahre weniger werden. Die meisten Gesellschaften werden dies aber wohl abweisen.

Combinirte Versicherungen.

194. Viele Versicherungen können in zwei oder mehr einzelne Versicherungen zerlegt werden; so kann eine lebenslängliche Versicherung mit temporärer Prämienzahlung zusammengestellt werden aus einer

lebenslänglichen Versicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung und einer Pension zum Betrage der lebenslänglichen Prämie. Zu den combinirten Versicherungen hören auch die gemischten.

Bei solchen Versicherungen mufs man darauf achten, dafs die Prämie für die combinirte Versicherung nicht höher, sondern vielmehr etwas niedriger sei als die Summe der Prämien für die einzelnen Versicherungen.

Bei der gemischten Versicherung wird dies schon für die Netto-Prämien gelten wegen der Wahl der Sterblichkeitstafel. Wenn aber bei anderen Versicherungsweisen die Netto-Prämie der combinirten Versicherung der Summe der Prämien für die einzelnen Versicherungen gleich ist, so kann man bei der Wahl des Zuschlags darauf Rücksicht nehmen.

Schliefsen zwei 40-jährige eine Versicherung ab, der eine für eine Summe auf den Todesfall innerhalb 20 Jahren, der andere für eine nach 20 Jahren anfangende Pension, beide gegen Jahresprämien auf 20 Jahre, so zieht die Gesellschaft den gröfsten Gewinn, wenn der erste noch länger als 20 Jahre am Leben ist und der zweite stirbt, nachdem alle die 20 Jahresprämien gezahlt sind, aber vor dem Tage, wo die erste Pensionszahlung stattfinden sollte; andererseits erleidet die Gesellschaft den gröfsten Verlust, wenn der erste stirbt am Tage nach der Zahlung der ersten Jahresprämie und der zweite steinalt wird.

Schliefst aber ein 40-jähriger die combinirte Versicherung desselben Kapitals für den Fall, dafs er innerhalb 20 Jahren stirbt, und derselben Pension, anzufangen nach 20 Jahren, so ist zwar die Netto-Prämie der Summe der Netto-Prämien für die einzelnen Versicherungen gleich, aber es ist jetzt nicht möglich, dafs die gröfsten Verluste (ebenso wenig natürlich die gröfsten Gewinne) der beiden Versicherungen hier beide eintreten, wie dies vorher denkbar war. Der gröfste Gewinn und der gröfste Verlust für die Gesellschaft sind verringert, eine Auszahlung mufs jedenfalls stattfinden, aber eine so grofse wie bei den zwei Versicherungen ist unmöglich, d. h. das mathematische Risico der combinirten Versicherung ist geringer als bei den Versicherungen der zwei Personen zusammengenommen. Der Zuschlag kann um etwas (nicht viel) geringer sein.

Kauft sich jemand zu gleicher Zeit eine lebenslängliche Versicherung im Ablebensfalle und eine sofort anfangende Leibrente, so könnte die Gesellschaft auf den Zuschlag etwas fallen lassen; denn auch in diesem Falle verringert sich das mathematische Risico. Beträgt die Leibrente jährlich mehr als der Zins der gesammten Einlage, so ist ein frühes Ableben im Interesse der Gesellschaft; in solchem Falle wäre eine ärztliche Untersuchung absolut nutzlos.

Man stellt Tarife zusammen für lebenslängliche Versicherung im Ablebensfall, aber mit begrenzter Prämienzahlung, wobei die Versicherten am Ende der Prämienzahlung allerlei Wahl treffen können (Wahltarif), z. B. aufser der prämienfreien Police noch eine Leibrente, oder statt letzterer ein Kapital, oder auch keine prämienfreie Police mehr, sondern einen gänzlichen Rückkauf. Man ist sehr erfinderisch hierin und solche Combinationen scheinen für Manche Anziehungskraft zu besitzen. Man soll aber nicht aus den Augen verlieren, dafs die Gesellschaften sich solche Willkür bezahlen lassen, wozu sie faktisch genötigt sind.

Es wäre offenbarer Unsinn, wenn ein Tarif für Versicherung auf bestimmte Verfallzeit (No. 126) eine höhere Prämie angäbe als für eine gemischte Versicherung von gleicher Dauer bei demselben Alter. Eine solche Unregelmäfsigkeit ist wohl schon vorgekommen; sie war entstanden durch Unachtsamkeit bei Feststellung des Zuschlags, indem die Differenz der Netto-Prämien gering war. Es ist daher immer zu empfehlen, seine eigenen Tarife zu vergleichen.

Das Vergleichen der Prämien mit den Unkosten.

195. Um den Bericht einer Gesellschaft zu prüfen, mufs man auch darauf achten, ob ein gehöriges Verhältnis besteht zwischen der Prämieneinnahme und den gewöhnlichen Unkosten, zwischen den abgeschlossenen neuen Versicherungen und den dafür gezahlten Abschlufs-Provisionen nebst sonstigen Unkosten, die mit dem Abschliefsen verbunden sind.

Auf diese Weise stöfst man auf die Frage: wenn die Brutto-Jahresprämie P' ist und man voraussetzt, dafs ein gewisser Teil α davon im zweiten und den nachfolgenden Jahren für Administrationskosten und Gewinn bestimmt ist, welcher Teil der Prämie des ersten Jahres kann dann auf die ersten Unkosten verwendet werden? Stellt a den Wert der Leibrente 1 per Jahr (der fortlaufenden oder temporären je nach der Prämienzahlung) dar, dann ist der gegenwärtige Wert desjenigen, was sowohl für die Auszahlung wie auch für die Unkosten des ersten Jahres bestimmt ist:

$$P' \cdot a - \alpha P' (a - 1) = P' [a (1 - \alpha) + \alpha].$$

Subtrahirt man hiervon die einmalige Netto-Prämie A für die Versicherung, so bleibt für die ersten Unkosten:

$$P' [a (1 - \alpha) + \alpha] - A$$

übrig.

Extra-Risicos.

196. Versicherungs-Kandidaten für Auszahlung von Kapitalien oder Renten auf den Todesfall, deren Gesundheitszustand, Lebensweise oder Beruf nur eine geringe Lebensdauer wahrscheinlich machen, werden von den Gesellschaften zurückgewiesen. Es läfst sich denken, dafs die eine Gesellschaft in dieser Hinsicht strenger verfährt als die andere, dafs die eine mehr auf diesen Punkt Gewicht legt, die andere auf jenen.

Indessen tritt z. B. oft der Fall auf, dafs der Gesundheitszustand nicht geradezu schlecht, aber zweifelhaft ist, sodafs der betreffende Kandidat der Gesellschaft weniger begehrenswert erscheint als die Mehrzahl der Versicherten gleichen Alters. Man fürchtet vielleicht Anlage zu gewissen Krankheiten, sei es konstitutionellen oder erblichen. In Ermangelung einer genügenden Statistik wäre es gewifs das einfachste, solche Kandidaten abzuweisen; die meisten Gesellschaften lassen sie jedoch unter bestimmten Bedingungen beitreten.

Bisweilen wird dazu die gewöhnliche Prämie um einige Procente erhöht, und zwar um so mehr, je bedenklicher der Gesundheitszustand ist. Dies ist nun gewifs das allerschlechteste Verfahren. Wenn man hier die Ursache der Prämienerhöhung in erschöpfender Weise in Rechnung ziehen wollte, so müfsten bei derselben Ursache diese Procente nicht nur bei jedem anderen Alter verschieden sein, sondern auch bei jeder anderen Dauer der Versicherung, verschieden bei Versicherung auf den Todesfall, verschieden bei der gemischten. Es hätte z. B. geradezu keinen Sinn, dieselbe procentweise Erhöhung bei einer temporären und einer gemischten Versicherung anzuwenden.

Es giebt mehr und mehr Gesellschaften, welche die Frauen für Versicherung im Ablebensfall und gemischte Versicherung minderwertig finden und deshalb von ihnen eine höhere Prämie fordern als von den Männern. Oft fordert man, nicht sehr wissenschaftlich, eine Erhöhung von $2^1/_2$ bis $5\,\%$.

Ehe eine Gesellschaft wegen des Gesundheitszustandes eine Versicherung abweist oder eine erhöhte Prämie fordert, sollte sie immer prüfen, ob ihr nicht eine andere Versicherungsweise die nötige Sicherheit bieten würde.

Ein 30-jähriger, der eine lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall abzuschliefsen wünscht, kann z. B. nach der Meinung des Arztes eine gleich grofse Wahrscheinlichkeit haben, 50 Jahre alt zu werden, wie die meisten Menschen gleichen Alters, aber eine verhältnismäfsig grofse

Sterbenswahrscheinlichkeit, nachdem er dieses Alter überschritten hat. In einem solchen Falle wäre es am einfachsten, für das Leben dieses Kandidaten eine gemischte Versicherung mit 20-jähriger Dauer zur gewöhnlichen Prämie abzuschliefsen.

Ist dagegen der Gesundheitszustand derart, dafs die Sterbenswahrscheinlichkeit während der ersten 10 Jahre grofs ist, dieselbe aber, insoweit man solches vorhersehen kann, wieder normal wird, wenn die betreffende Person 40 Jahre erreicht hat, so kann sie zugelassen werden zu einer um 10 Jahre aufgeschobenen Versicherung auf den Todesfall zur gewöhnlichen Prämie oder auch unter Umständen zu einer lebenslänglichen Versicherung, wieder zu normaler Prämie, wofern ausbedingt wird, dafs beim Ableben innerhalb der 10 Jahre die Auszahlung nur teilweise stattfinden wird, oder die eingelegten Prämien gänzlich oder teilweise zurückerstattet werden.

Es kann auch sein, dafs die gröfsere Sterbenswahrscheinlichkeit nicht auf eine gewisse Periode beschränkt ist, dafs aber der Kandidat, der z. B. 30 Jahre alt sein möge, in Bezug auf Lebenswahrscheinlichkeit dem 40-jährigen gleichsteht; in diesem Falle ist es am besten, ihm das Alter 40 Jahre zuzuschreiben und ihn die normale Prämie für dieses Alter zahlen zu lassen. Natürlich mufs man in einem solchen Falle wieder viel genauer sein, wenn der Kandidat eine temporäre Versicherung, als wenn er eine gemischte Versicherung einzugehen wünscht.

Im Allgemeinen kann man sagen, dafs die Gesundheit bei der temporären Versicherung die peinlichste Rücksichtnahme erfordert und dafs es bei demselben Gesundheitszustand durchaus nicht gleichgültig ist, wie die Prämienzahlung sich gestaltet, ob einmalig, temporär, abnehmend, zunehmend. Jedenfalls heifst es hier: in je weniger Terminen die Prämie gezahlt wird, desto angenehmer ist es der Gesellschaft.

Wenn jemand eine gemischte Versicherung abschliefsen will und der Arzt schreibt ihm ein höheres Alter zu, so mufs man bei Berücksichtigung dieses Umstandes eine gewisse Falle vermeiden, die wir an folgendem Beispiel aufweisen wollen.

Ein 30-jähriger will eine Versicherung abschliefsen, die im 60-jährigen Alter oder beim früheren Ableben ausgezahlt werden soll; der Arzt schreibt ihm ein Alter von 40 Jahren zu; es wäre nun sehr ungenau und unrichtig, den Kandidaten die Prämie eines 40-jährigen zahlen zu lassen, der im Alter von 60 Jahren die Auszahlung erhalten soll. Vielmehr mufs die Prämie des 40-jährigen gefordert werden, dessen Auszahlung nach 30 Jahren fällig wird.

Die Erhöhung des Alters darf ja die Prämie um nicht mehr erhöhen, als es die erhöhte Sterbenswahrscheinlichkeit mit sich bringt, und dies ist bei einer gemischten Versicherung, die zugleich eine Versicherung auf den Todesfall und auf den Erlebensfall ist, sogar weniger stark der Fall, wie bei einer einmaligen Versicherung auf den Todesfall. Dafs diese Bemerkung, die für den Mathematiker allerdings überflüssig ist, für einige Versicherer ihren Nutzen haben kann, hat sich öfters gezeigt.

197. Wenn die Gesellschaft dem Kandidaten eine höhere Altersstufe zuschreibt, ist es nicht immer nötig, die der höheren Altersstufe entsprechende Prämie zu fordern; man kann die Versicherung aufschieben und die gewöhnliche Prämie für das nicht erhöhte Alter und die unmittelbar beginnende Versicherung zahlen lassen. Dann ist die Frage, um wie lange die Versicherung in Berücksichtigung der Erhöhung der Altersstufe aufgeschoben werden mufs.

Nehmen wir also an, dafs ein x-jähriger sich für ein Kapital 1 auf den Todesfall zu versichern wünsche. Die hierzu unter normalen Verhältnissen erforderliche Prämie setzen wir $= P_x$ (netto). Die Gesellschaft schreibt aber dem Kandidaten das erhöhte Alter y zu, sodafs er jährlich und lebenslänglich P_y (netto), d. h. die Prämie des y-jährigen zahlen müfste, um schon von Anfang an versichert zu sein. Der Kandidat verweigert dies aber, er wünscht jährlich nicht mehr als P_x zu zahlen, willigt aber ein, dafs, wenn er innerhalb einer gewissen Anzahl von Jahren sterben sollte, die Auszahlung nicht stattzufinden braucht. Wir fragen nach dieser Anzahl von Jahren (n), um welche die Versicherung aufgeschoben werden mufs. Die Person wird als eine y-jährige betrachtet; als solche mufs sie für eine Versicherung, die um n Jahre aufgeschoben wird, die jährliche (netto) Prämie (vergl. No. 103):

$$\frac{D_{y+n}}{N_{y-1}} \frac{A_{y+n}}{} = \frac{M_{y+n}}{N_{y-1}}$$

zahlen; wir erhalten also die Gleichung:

$$P_x = \frac{M_{y+n}}{N_{y-1}},$$

sodafs

$$M_{y+n} = P_x \cdot N_{y-1}.$$

Bildet man also das Produkt $P_x N_{y-1}$ und sieht nach, welcher Wert in der Tafel für M am genausten dem Wert für $P_x N_{y-1}$ am nächsten kommt, so hat man den Wert für $y+n$ und mithin auch für n; es

versteht sich von selbst, dafs selten oder nie $P_x N_{y-1}$ einem der Werte für M genau gleich sein wird. Fürchtet man die Anzahl der Jahre zu klein zu nehmen, so wähle man den gröfsten der zwei auf einander folgenden Werte, zwischen welchen n liegt.

Wir hätten hier den Zuschlag berücksichtigen können, welchen man sowohl auf P_x als auf die Prämie für die aufgeschobene Versicherung legen mufs, und dies könnte in dem Wert für n eine geringe Änderung verursachen, einen Unterschied, der aber sogar mathematisch $= 0$ ist, wenn der Zuschlag aus einem festen Procentsatz besteht. Man kann darum eine ausführliche Berechnung unterlassen, und n mit Netto-Prämien berechnen, obgleich Brutto-Prämien gezahlt werden müssen.

198. Eine andere Berechnungsweise, die wahrscheinlich manchem mehr zusagen wird, besteht darin, dafs die Versicherung, für welche jährlich die Prämie des x-jährigen gezahlt wird, obgleich dem Versicherten y Jahre zugeschrieben sind, zwar unmittelbar beginnt, dafs aber beim Ableben innerhalb einer bestimmten Anzahl von Jahren weniger als die versicherte Summe ausgezahlt wird, eine Summe jedoch, die sich der eigentlich versicherten Summe immer mehr nähert und dieselbe endlich erreicht, falls der Versicherte am Leben bleibt.

Dafs die Zahl der Jahre, während welcher die Versicherungssumme niedriger sein soll, nicht ganz willkürlich gewählt werden darf, wollen wir nach Aufstellung der Formel zeigen.

Setzen wir also die Anzahl der Jahre mit einer geringeren Auszahlung $= m$, und lassen wir diese Auszahlung während der m Jahre jährlich um denselben Betrag zunehmen.

Man frage dann, wie hoch die Auszahlungen in den verschiedenen Jahren im Falle des Ablebens anzusetzen sind.

Wenn die versicherte Summe die Einheit ist, so werde beim Ableben innerhalb des 1^{ten} Jahres $1 - mn$

„ „ 2^{ten} „ $1 - (m-1)n$

„ „ 3^{ten} „ $1 - (m-2)n$

⋮

„ „ m^{ten} „ $1 - n$

und bei späterem Ableben 1 ausgezahlt. Es ist also nunmehr die Summe n zu berechnen. Hierzu können wir sagen: der y-jährige — denn dieses Alter wird der Person zugeschrieben — ist versichert 1^0. auf eine feste Summe $1 - mn$, und 2^0. auf eine jährlich um n zunehmende Summe, welche also beim Ableben innerhalb des ersten Jahres Null, beim Ableben innerhalb des zweiten Jahres n, innerhalb des dritten

Jahres $2n$ u. s. w. bis zu mn beträgt. Für diese zunehmende Auszahlung wäre die Netto-Jahresprämie (vergl. No. 107):

$$n \cdot \frac{C_{y+1} + 2C_{y+2} + 3C_{y+3} + \ldots + (m-1)C_{y+m-1} + m(C_{y+m} + C_{y+m+1} + \ldots)}{\Sigma D_y}$$

$$= n \cdot \frac{\Sigma M_{y+1} - \Sigma M_{y+m+1}}{\Sigma D_y} = n \cdot \frac{R_{y+1} - R_{y+m+1}}{N_{y-1}};$$

hierfür schreiben wir zur Abkürzung $n \cdot f(m, y)$.

Die Jahresprämie für die gleichbleibende Auszahlung zum Betrage von $1 - mn$ für die Person des y-jährigen ist:

$$(1 - mn)\frac{M_y}{N_{y-1}}.$$

Die Jahresprämie für beide Versicherungen zusammen ist also:

$$\frac{(1 - mn)M_y}{N_{y-1}} + n f(m, y).$$

Der Versicherte zahlt indessen jährlich $\frac{M_x}{N_{x-1}}$; sodafs man zur Bestimmung von n hat:

$$\frac{(1 - mn)M_y}{N_{y-1}} + n f(m, y) = \frac{M_x}{N_{x-1}},$$

und also:

$$n \cdot \left[m \frac{M_y}{N_{y-1}} - f(m, y)\right] = \frac{M_y}{N_{y-1}} - \frac{M_x}{N_{x-1}}.$$

Setzt man jetzt

$$\frac{M_x}{N_{x-1}} = P_x, \quad \frac{M_y}{N_{y-1}} = P_y,$$

dann ist

$$n[m P_y - f(m, y)] = P_y - P_x, \tag{314}$$

woraus sich n sofort finden läfst. Weiter erhält man für die Auszahlung beim Ableben innerhalb des 1ten Jahres:

$$1 - mn = \frac{P_x - \frac{f(m, y)}{m}}{P_y - \frac{f(m, y)}{m}}. \tag{315}$$

Nimmt man jetzt $m = \infty$, dann ist:

$$n = 0 \text{ und } 1 - mn = \frac{P_x}{P_y},$$

d. h. der Versicherte zahlt P_x per Jahr, die Auszahlung ist gleichbleibend, aber auf $\frac{P_x}{P_y}$ reducirt, wie es sich gehört.

Nimmt man $m = 1$, dann giebt Formel (315) für die Auszahlung beim Ableben im ersten Jahr:

$$\frac{P_x - \frac{R_{y+1} - R_{y+2}}{N_{y-1}}}{P_y - \frac{R_{y+1} - R_{y+2}}{N_{y-1}}} = \frac{P_x - \frac{M_{y+1}}{N_{y-1}}}{P_y - \frac{M_{y+1}}{N_{y-1}}}. \qquad (316)$$

Setzt man in Formel (316) $y = x$, d. h. findet die Versicherung in der gewöhnlichen Weise statt, dann geht die Formel über in

$$\frac{\frac{M_x}{N_{x-1}} - \frac{M_{x+1}}{N_{x-1}}}{\frac{C_x}{N_{x-1}}} = 1,$$

wie zu erwarten war.

Sobald aber x und y keine kleine Differenz bilden, also eine Erhöhung des Alters um mehrere Jahre stattgefunden hat, ist der Zähler in (316) negativ. Dies würde keinen Sinn haben, sodafs dann gewifs m gröfser als 1 gewählt werden mufs. Man ist demnach in der Wahl für m nicht ganz frei.

Wenn man Tafeln hat für a und für die Prämien P, so ist es nach Formel (314) nicht schwer, den niedrigsten Wert zu finden, den m in jedem besonderen Falle haben kann. Man wählt oft für m die wahrscheinliche Lebensdauer (vergl. No. 85) des x-jährigen oder vielmehr die ganze Zahl, welche ihr am nächsten kommt. Ebenso wie in No. 197 kann man auch hier bei der Berechnung von n annehmen, dafs der Versicherte Netto-Prämien zahlt; ein strenges Rechnen mit Brutto-Prämien ist zwar möglich, aber complicirt, und die Differenz der Resultate nicht grofs.

199. Es kann auch vorkommen, dafs ein Grund, die Prämien zu erhöhen, jungen und alten Leuten gegenüber in gleichem Mafse zutrifft; in diesem Falle mufs die Erhöhung aus einer Extra-Prämie bestehen, die der versicherten Summe proportional und für jedes Alter gleich hoch ist, vorausgesetzt, dafs die Dauer des erhöhten Risikos dieselbe ist. Solche Fälle werden aber weniger den Gesundheitszustand zum Grund haben als z. B. das gröfsere Risiko, das Seereisen oder gefährliche Berufe mit sich bringen.

Zugleich mit den Gründen, die ein Risiko erhöhen, kann auch die Erhöhung der Prämie, die für das höhere Risiko gefordert wird, wegfallen. Dennoch fordern einige Gesellschaften, ehe sie zur normalen Prämie zurückkehren, eine ärztliche Untersuchung zwecks Feststellung, ob die Ursachen, welche die Prämienerhöhung veranlafsten, nachteilig auf den Gesundheitszustand eingewirkt haben.

Ebenso wie die gewöhnliche Prämie kann man auch die Extra-Prämie in kürzerer Frist zahlen lassen, als die Versicherung läuft; um diese einmalige oder temporäre Prämie zu berechnen, gehe man von der jährlichen Extra-Prämie aus und reducire sie mittels der Werte der entsprechenden Leibrenten auf die gewünschte Prämie. Sei z. B. die Extra-Prämie für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall e per Jahr, der Versicherte wolle aber die Extra-Prämie in 5 Jahren zahlen, so ist diese 5-jährige Extra-Prämie:

$$e \cdot \frac{a_x}{|_5 a_x} = e \cdot \frac{N_x}{N_{x-1} - N_{x+4}}.$$

Wenn das wirkliche Alter x auf das Alter y erhöht worden ist, so ist die vorstehende Formel rücksichtlich der a nicht ganz richtig. Die Abweichung wird aber in den meisten Fällen nicht beträchtlich sein, und kann in Betracht gezogen werden. Ist z. B. e die Erhöhung der Prämie, weil dem x-jährigen das Alter y zugeschrieben wird, und will er die Erhöhung in 5 Jahren zahlen, so beträgt die erforderliche Extra-Prämie

$$e \cdot \frac{N_{y-1}}{N_{y-1} - N_{y+4}}.$$

pro Jahr.

200. Man mufs zugeben, dafs die statistischen Grundlagen zur Bestimmung der Extra-Prämien für Extra-Risikos sehr spärlich vorhanden und diese Extra-Prämien deswegen ziemlich willkürlich sind, sodafs auf diesem Gebiet eine Gesellschaft häufig der anderen nachahmt. Man kann dies bedauern und die Extra-Prämien verwerfen. Zu der gewöhnlichen Prämie annehmen oder überhaupt zurückweisen ist unzweifelhaft ein Verfahren, welches viel für sich hat; will man aber nicht gar zu oft zurückweisen, so mufs man sich mit höheren Prämien behelfen.

Die Gegner der Extra-Prämien für Extra-Risikos dürfen nicht vergessen, dafs der Vorwurf der Willkür ebenso gut gegen andere Gesellschaften erhoben werden kann, die einfach annehmen oder zurückweisen. Zeigt sich doch, dafs die eine annimmt, den die andere zurückweist.

Ist doch selbst die Wahl der Sterblichkeitstafel und des Zinsfufses nicht ganz frei von Willkür.

Mancherlei Zweige der Versicherung werden ohne genügende statistische Grundlagen behandelt; oder richtiger: nur bei der Lebensversicherung sind solche ziemlich ausreichend vorhanden, und bei der Invaliditäts- und der Morbilitäts-Versicherung werden die Daten zahlreicher, und das ist erfreuend, denn es wird mehr und mehr nötig, die Invalididäts-Versicherung ebenso allgemein zu machen als die Lebensversicherung und die beiden Branchen so zu vereinigen, dafs die Prämienzahlung aufhört bei eintretender Invalidität (**Gerecke** auf dem Pariser Congrefs). Alle anderen Versicherungszweige sind als vorläufige Versuche zu betrachten, aus welchen durch fortwährende Beobachtung eine mehr wissenschaftliche Berechnung entstehen kann, wenigstens, wenn man sorgfältig aufzeichnet. So hat ja die Lebensversicherung selbst auch angefangen, und unter diesem Gesichtspunkt wollen auch die Extra-Prämien betrachtet sein.

Aufser den genannten Weisen, anormale Leben zu versichern, hat man indes noch andere Systeme erdacht, z. B. anfänglich im Ablebensfall eine geringere Summe auszuzahlen (**Fouse** in America; man sehe auch **Dr. Max Kehm:** Über die Versicherung minderwertiger Leben), aber keine dieser Weisen ist eine wahrlich rationelle.

In dieser Hinsicht ist es eine sehr verdienstvolle Arbeit, welche Prof. **Dr. Ernst Blaschke** geliefert hat in seiner Denkschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben. Er teilt die anormalen Leben in verschiedene Gefahrenklassen ein und stellt für jede Klasse eine absonderliche Sterblichkeitstafel zusammen, wonach die Prämien und Reserven berechnet werden sollen.

Es ist hier die geeignete Stelle zu erwähnen, dafs man mehr und mehr anfängt, auch Kandidaten für Versicherung im Ablebensfall anzunehmen ohne vorhergehende ärztliche Untersuchung; dies geschieht aber natürlich nicht ohne erschwerende Bedingungen; so sind die Prämien höher wie für die mit gutem Erfolg ärztlich Untersuchten und wenn der Versicherte im ersten Jahre stirbt, werden die Prämien zurückerstattet, stirbt er im zweiten, dritten oder sogar vierten Jahre, so wird ein wachsender Teil der versicherten Summe, bei späterem Ableben die ganze Summe ausgezahlt.

Mit Recht kann man in dieser Hinsicht von der Zukunft vieles hoffen; wenn es aber einen Punkt giebt, der keine dergleichen Hoff-

nungen zuläfst, so ist es der, je genaue Grundlagen zu den Extra-Prämien für Kriegs-Risiko zu gewinnen.

Der Statistiker, welcher aus der Geschichte der vergangenen Jahrhunderte auf die Zahl der Kriege, die innerhalb des nächsten Jahrhunderts zu erwarten sind, auf die wahrscheinliche Dauer jedes Krieges, auf die Zahl der Teilnehmer, die der Opfer des Krieges glaubt schliefsen zu können, erweist der Wissenschaft der Statistik einen geringeren Dienst, als wenn er einfach seine Unwissenheit eingestände.

201. Bis jetzt haben wir immer die Versicherung mit Auszahlung im Todesfall im Auge gehabt. Es giebt aber auch Leute, die bei Versicherung einer Leibrente ebenfalls eine ärztliche Untersuchung wünschen. Sie meinen nämlich, dafs die Selbstwahl bei dieser Versicherungsweise zu stark wirkt und dafs also vorzugsweise aufsergewöhnlich gesunde Menschen diese Art der Versicherung wählen werden. Sie schlagen deshalb vor, jeden Kandidaten für die Versicherung einer unmittelbar beginnenden Leibrente, z. B. zehn Jahre jünger zu setzen, als sein wirkliches Alter beträgt, sodafs seine Einlage höher ist, als der Tarif angiebt, und ihn nur dann nach dem Tarif zahlen zu lassen, wenn eine ärztliche Untersuchung gezeigt hat, dafs er ungesund genug dazu ist. Wir wollen jetzt die Nachteile, welche mit diesem Verfahren verbunden sind, nicht aufzählen, sondern uns einfach auf den Hinweis beschränken, dafs man sich gegen die erwähnten Gefahren nötigenfalls durch angemessene Erhöhung der Leibrententarife schützen kann.

Die Rechnung mit dem Alter.

202. Nur ausnahmsweise wird der Beitritt zu einer Versicherung gerade am Geburtstage des Beitretenden erfolgen. Es ist nicht immer nötig, bei der Anwendung eines Tarifs diesen Umstand zu berücksichtigen. Ist nämlich der Tarif hoch genug, so kann man bei Bemessung der Prämie allen, z. B. zwischen 40 und 41 Jahr alten Personen das Alter 40 zuteilen. Man kann auch von vornherein den Tarif dieser Usance anpassen, indem man z. B. dem 40-jährigen die Prämie des $40\frac{1}{2}$-jährigen zuschreibt. Bei einigen Gesellschaften wird die Prämie aus denen für die ganzen Altersjahre, welche das betreffende Alter einschliefsen, interpolirt, indem man die Differenzen in den Prämien den Differenzen im Alter proportional setzt. Wieder bei andern Gesellschaften wird das Alter der Beitretenden immer zu dem nächstliegenden ganzen Altersjahr abgerundet, sodafs jemandem, der älter als $40\frac{1}{2}$ und jünger als 41 Jahr ist, das Alter 41 Jahr zugeschrieben wird (nearest

birthday). Es geschieht auch wohl, dafs man beim Anwenden der Tarife das Alter rechnet nach dem folgenden Geburtstag (next birthday), sodafs Jemand, der zwischen 40 und 41 Jahr alt ist, auf 41 Jahr gerechnet wird.

Durchschnittliche Prämien.

203. Es kommt bisweilen vor, dafs eine ziemlich grofse Anzahl von Personen ungleichen Alters sich gegenseitig für eine Summe auf den Todesfall versichern und dafür sämmtlich denselben Beitrag per Jahr zahlen wollen.

Hierbei wird möglicherweise eine jüngere Person viel zu viel, eine ältere viel zu wenig zahlen. Es wäre aber verfehlt, dies ein Unrecht zu nennen, wenn es sich um eine freiwillige Vereinbarung zur gegenseitigen freundschaftlichen Unterstützung handelt. Selbst bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft können die Prämien nie vollkommen gerecht sein; sonst müfste man Tarife haben nicht nur für die zahlreichen Berufe und Ämter, sondern auch für allerlei andere Umstände. So ist z. B. eine Stadt desselben Landes gesünder als die andere u. s. w.

Zu einer Gruppe der genannten Art mögen gehören

l_x Personen im Alter x Jahr,
l_{x+1} „ „ „ $x+1$ „ ,
l_{x+2} „ „ „ $x+2$ „ ,
u. s. w.,

wobei nicht ausgeschlossen ist, dafs einige dieser Zahlen $l = 0$ sind. Ist dann die versicherte Summe S, so ist, wie man sofort einsieht, die durchschnittliche einmalige Prämie:

$$S \cdot \frac{l_x A_x + l_{x+1} A_{x+1} + l_{x+2} A_{x+2} + \cdots}{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}, \qquad (317)$$

und die durchschnittliche gleichbleibende lebenslängliche Jahresprämie:

$$S \cdot \frac{l_x A_x + l_{x+1} A_{x+1} + l_{x+2} A_{x+2} + \cdots}{l_x a_x + l_{x+1} a_{x+1} + l_{x+2} a_{x+2} + \cdots}. \qquad (318)$$

Wenn nun das Absterben genau nach der Sterblichkeitstafel stattfände, der Zins immer dem vorausgesetzten Zinsfufs entspräche und keine neuen Personen zuträten oder andere bei Lebzeiten austräten, dann brauchte keine neue Berechnung mehr stattzufinden, die Einlagen könnten einkassirt, die Auszahlungen geleistet und der Rest verzinst

werden. Da nun aber diese Voraussetzung nicht zutreffen wird, so ist dann und wann die Vornahme einer Untersuchung und Verbesserung notwendig.

Stehen nach einiger Zeit, z. B. zwei Jahre nach dem Anfang

l'_x Personen im Alter x Jahr,

l'_{x+1} „ „ „ $x+1$ „

u. s. w.,

und ist eine Summe V als Reserve übrig geblieben, dann ist es sehr wohl möglich, dafs die Prämie etwas abnehmen kann, aber ebenso wahrscheinlich wird sie zunehmen müssen.

Die durchschnittliche Jahresprämie mufs jetzt für den Betrag S sein:

$$\frac{S(l'_x A_x + l'_{x+1} A_{x+1} + l'_{x+2} A_{x+2} + \ldots) - V}{l'_x a_x + l'_{x+1} a_{x+1} + l'_{v+2} a_{x+2} + \ldots}, \qquad (319)$$

doch ist es gleich bequem, die jährliche Einlage unverändert zu lassen, den versicherten Betrag aber proportional zu- oder abnehmen zu lassen.

Es ist nicht schwer, die Formeln für durchschnittliche Prämien auch bei anderen Versicherungsweisen aufzustellen, z. B. bei einer Witwenkasse, wo jeder Ehemann denselben Beitrag zahlen will.

In der „Österreichischen Versicherungszeitung“ vom 14. März 1896 giebt **Dr. K. Wagner** einen Artikel: Ein Beitrag zur Versicherung von Vereinen als Gesammtheit.

Zur durchschnittlichen Jahresprämie giebt er (in die hiesige Bezeichnungsweise übergebracht) die Formel:

$$S \cdot \frac{l_x P_x + l_{x+1} P_{x+1} + l_{x+2} P_{x+2} + \ldots}{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots} \qquad (319^*)$$

worin P_x die Netto-Jahresprämie zur Versicherung der Einheit für den x-jährigen ist.

Auch diese Formel ist zu benutzen, sie giebt aber nicht wie Formel (318) die gleichbleibende Jahresprämie; die Prämie nach Formel (319*) mufs notwendig jedes Jahr ändern. (Man vergleiche einen Artikel meiner Tochter **Henriette F. Landré**: Gemiddelde premie im IV. Teil des holländischen Archiefs.) In dieser Hinsicht verdient (318) den Vorzug.

Kapitel IX.

Leibrenten und Prämien in Raten und continuirlich.

Strengste Methode.

204. Bis jetzt haben wir uns nur mit Leibrenten und Prämien beschäftigt, die einmal im Jahre gezahlt werden. Nicht selten werden aber halbjährliche oder vierteljährliche Zahlungen gewünscht. Wenn man den Wert einer z. B. halbjährlich zahlbaren Leibrente sehr genau berechnen wollte, so müfste man eine Sterblichkeitstafel besitzen, welche die Art des Ablebens für jedes halbe Jahr angiebt. Eine solche Tafel wäre genau so aufzustellen, wie eine für die Sterblichkeit nach ganzen Jahren. Man müfste dann den Zins feststellen, den das Geld jedes halbe Jahr einträgt, und mit der halbjährlichen Sterblichkeitstafel gerade so rechnen wie mit der jährlichen. In Ermangelung einer halbjährlichen Sterblichkeitstafel kann man sich eine solche näherungsweise aus einer jährlichen Tafel ableiten. Wirklich hat man jene Methode zur Berechnung halbjährlicher Prämien angewendet; wenn es sich um einen isolirten Fall handelt, für den man die Rechnungen doch gesondert auszuführen hat, so läfst sie sich auch sehr wohl verteidigen. Bei Zahlungen in vielen Terminen wird die Rechnung aber sehr weitläufig. Man hat darum Methoden gesucht, welche die Werte der terminweisen Leibrenten aus denen, die einmal per Jahr gezahlt werden, ableiten lassen.

Ratenweise Leibrenten durch einfache Interpolation.

205. Sei a_x der Wert der Leibrente vom Betrage der Einheit, zahlbar am Anfang jedes Jahres, so lange der Versicherte am Leben ist, dann ist $a_x - 1$ der Wert der am Ende jedes Jahres zahlbaren Leibrente 1. Um jetzt den Wert dieser Leibrente zu bestimmen, wenn die Zahlung zwischen dem Anfang und dem Ende des Jahres stattfindet, kann man in roher Annäherung die Differenz zwischen den Werten der Leibrente der Differenz zwischen der Zeit der Zahlung proportional

setzen. Dann ist also $a_x - \frac{m}{n}$ der Wert der Leibrente 1 per Jahr, stets $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang jedes Jahres zahlbar. Setzt man jetzt nach einander $m = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ und addirt, so ergiebt sich als Wert der Leibrente zum Betrage der Einheit, am Anfang jedes n^{ten} Teils des Jahres zahlbar, so lange der Versicherte am Leben ist:

$$a_x + \left(a_x - \frac{1}{n}\right) + \left(a_x - \frac{2}{n}\right) + \left(a_x - \frac{3}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(a_x - \frac{n-1}{n}\right) = n a_x - \frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n} = n a_x - \frac{1}{2}(n-1).$$

Wenn nun statt 1 am Anfang jedes n^{ten} Teils des Jahres $\frac{1}{n}$ gezahlt wird, so mufs man mit n dividiren und man erhält für den Wert der Leibrente 1 per Jahr, zahlbar in n gleichen Terminen, also $\frac{1}{n}$ am Anfang jedes n^{ten} Teils des Jahres:

$$a_x^{(n)} = a_x - \frac{n-1}{2n}. \qquad (320)$$

Nach dieser Formel ist nunmehr der Wert der Leibrente, praenumerando zahlbar:

halbjährlich	$a_x^{(2)}$	$= a_x - \frac{1}{4}$,
vierteljährlich	$a_x^{(4)}$	$= a_x - \frac{3}{8}$,
monatlich	$a_x^{(12)}$	$= a_x - \frac{11}{24}$,
wöchentlich	$a_x^{(52)}$	$= a_x - \frac{51}{104}$.

Will man den Wert der postnumerando zahlbaren Leibrente $a_x = a_x - 1$ zu dem einer Leibrente $\frac{1}{n}$, zahlbar am Ende jedes n^{ten} Teils des Jahres, umbilden, so mufs man in Formel (320) substituiren:

$$a_x = a_x + 1, \; a_x^{(n)} = a_x^{(n)} + \frac{1}{n},$$

und man erhält:

$$a_x^{(n)} = a_x + 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{n},$$

oder

$$a_x^{(n)} = a_x + \frac{n-1}{2n}. \qquad (321)$$

Um den Wert der continuirlichen Leibrente, d. h. einer Leibrente zu erhalten, die in unendlich vielen gleichmäfsig über das Jahr verteilten Terminen gezahlt wird, mufs man in Formel (320), welche man schreiben kann:

$$a_x^{(n)} = a_x - \frac{1 - \frac{1}{n}}{2},$$

$n = \infty$ nehmen. Es ergiebt sich dann für die continuirliche Leibrente

$$\bar{a}_x = a_x - \tfrac{1}{2} = a_x + \tfrac{1}{2}, \qquad (322)$$

und natürlich

$$\bar{a}_x = \bar{a}_x .$$

Dieser Wert der continuirlichen Leibrente mufs als der Grenzwert angesehen werden, dem sich der Wert der lebenslänglichen Versorgung für eine Person nähert, welche zwar jedes Jahr eine gleiche Summe, diese aber in sehr vielen über das Jahr verteilten gleichen Teilbeträgen erhält (Prof. Dr. **P. van Geer**).

206. Dafs die Leibrente $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres zahlbar, den Wert $a_x - \frac{m}{n}$ hat, läfst sich auch folgendermafsen erklären. Es läuft auf dasselbe hinaus, ob jemand 1 erhält, jedes Mal $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres, oder $\frac{n-m}{n}$ am Anfang und $\frac{m}{n}$ am Ende. Alle Zahlungen $\frac{n-m}{n}$ am Anfang des Jahres haben einen Gesammtwert $\frac{n-m}{n} a_x$; alle Zahlungen $\frac{m}{n}$ am Ende des Jahres haben einen solchen von $\frac{m}{n}(a_x - 1)$, und somit haben alle Zahlungen 1, jedes Mal $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres, einen Gesammtwert

$$\frac{n-m}{n} a_x + \frac{m}{n}(a_x - 1) = a_x - \frac{m}{n}.$$

Die Zerlegung der Zahlung 1 in zwei Zahlungen $\frac{n-m}{n}$ und $\frac{m}{n}$ läfst sich auf zwei verschiedene Weisen begründen:

Setzt man voraus, dafs am Anfang des Jahres l_x, am Ende l_{x+1}

Personen vorhanden sind und dafs in jedem Jahresteil gleich viele Personen sterben, dann leben $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres:

$$l_x - \frac{m}{n}(l_x - l_{x+1}) = \frac{n-m}{n} l_x + \frac{m}{n} l_{x+1}.$$

Wenn jede am Leben befindliche Person am Anfang des Jahres $\frac{n-m}{n}$ empfängt und, vorausgesetzt, dafs sie dann noch lebt, am Ende des Jahres $\frac{m}{n}$, so erhalten sie zusammen eben so viel, als wenn jede Person, die $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres am Leben ist, die Einheit erhält. Die Zerlegung der Zahlung in zwei Teile steht also gut im Einklang mit dem Ableben, wenn man von dem Zins während des Jahres gänzlich absieht.

Man kann aber auch so rechnen: $\frac{n-m}{m}$, am Anfang des Jahres gezahlt, giebt während des Jahres den Zins $\frac{n-m}{m} i$; die Einheit, in zwei Teile zerlegt, nämlich $\frac{n-m}{m}$ am Anfang und $\frac{m}{n}$ am Ende des Jahres, giebt also als Zins bis zum Ende des Jahres $\left(1 - \frac{m}{n}\right) i$, eben so viel wie die Einheit, $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang gezahlt, während des noch übrigen Teils des Jahres. Jene Zerlegung steht also mit der Verzinsung im Einklang, wenn man von dem Ableben während des Jahres völlig absieht, also annimmt, dafs alle Todesfälle am Ende des Jahres stattfinden. Beide Rechnungen weisen darauf hin, dafs Formel (320) einen etwas zu grofsen Wert für die Leibrente in Raten liefert.

Leibrente in Raten, bei gleichmäfsigem Ableben im Laufe jedes Jahres.

207. Hierbei sind mehrere Methoden möglich, deren Unterschied in der Art liegt, wie mit dem Zins während eines Jahresteils gerechnet wird.

Wenn die Zahl der Lebenden am Anfang des Jahres l_x, am Ende

l_{x+1} ist, so beträgt nach dem vorangehenden Abschnitt deren Zahl $\frac{m}{n}$ nach dem Anfang des Jahres:

$$\frac{n-m}{n} l_x + \frac{m}{n} l_{x+1}.$$

Discontiren wir jetzt, indem wir den Zins im Laufe des Jahres der Zeit proportional setzen, dann haben die allen diesen Personen gezahlten Einheiten am Anfang des ersten Jahres den Wert:

$$\left(\frac{n-m}{n} l_x + \frac{m}{n} l_{x+1}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{m}{n} i}.$$

Ähnlich haben die Einheiten, welche den Überlebenden ein Jahr später ausgezahlt werden, am Anfang des ersten Jahres einen Wert:

$$\left(\frac{n-m}{n} l_{x+1} + \frac{m}{n} l_{x+2}\right) \cdot \frac{1}{(1+i)\left(1+\frac{m}{n} i\right)} \text{ u. s. w.}$$

Der Gesammtwert dieser Zahlungen ist:

$$\frac{1}{1+\frac{m}{n} i}\left[\frac{n-m}{n}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{1+i} + \frac{l_{x+2}}{(1+i)^2} + \ldots\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{m}{n}\left(l_{x+1} + \frac{l_{x+2}}{1+i} + \frac{l_{x+3}}{(1+i)^2} + \ldots\right)\right].$$

Dividirt man jetzt mit l_x, dann erhält man als Wert der Leibrente im Betrage 1 per Jahr, zahlbar jedes Mal $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres:

$$\frac{1}{1+\frac{m}{n} i}\left[\frac{n-m}{n} a_x + \frac{m}{n}(1+i)(a_x - 1)\right] =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{m}{n} i}\left[\left(1+\frac{m}{n} i\right) a_x - \frac{m}{n}(1+i)\right] = a_x - \frac{m}{n+mi}(1+i).$$

Nimmt man hier nach einander $m = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ und addirt, so erhält man den Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente vom Betrage 1 am Anfang jedes n^{ten} Jahrteils; dividirt man alsdann diesen

Ausdruck mit n, so ergiebt sich als Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente 1 per Jahr, aber jährlich zahlbar in n gleichen Raten:

$$a_x^{(n)} = a_x - \frac{1+i}{n}\left(\frac{1}{n+i} + \frac{2}{n+2i} + \frac{3}{n+3i} + \cdots + \frac{n-1}{n+(n-1)i}\right), \tag{323}$$

was wir auch schreiben können:

$$a_x - \frac{1+i}{n^2}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}} + \frac{2}{1+2\frac{i}{n}} + \frac{3}{1+3\frac{i}{n}} + \cdots + \frac{n-1}{1+(n-1)\frac{i}{n}}\right). \tag{324}$$

Durch Entwicklung der eingeklammerten Gröfse nach steigenden Potenzen von i findet man für den Wert der Leibrente in n Terminen:

$$a_x^{(n)} = a_x - (1+i)\left[\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)i + \tfrac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 i^2 - \ldots\right] =$$
$$= a_x - \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{6n^2}i + \frac{n^3-1}{12n^2}i^2. \tag{325}$$

Nimmt man $n = \infty$, dann folgt als Wert der continuirlichen Leibrente aus Formel (325):

$$a_x - (1+i)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}i + \tfrac{1}{4}i^2 - \tfrac{1}{5}i^3 - \ldots\right) =$$
$$= a_x - (1+i)\left(\frac{1}{i} - \frac{L(1+i)}{i^2}\right);$$

wo L wieder den natürlichen Logarithmus bedeutet. Der Wert der continuirlichen Leibrente ist also:

$$\bar{a}_x = a_x - \frac{1+i}{i^2}[i - L(1+i)], \tag{326}$$

bis zu den zweiten Potenzen von i ist

$$\bar{a}_x = \bar{a}_x = a_x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}i + \tfrac{1}{12}i^2. \tag{327}$$

208. Discontirt man nach kaufmännischer Art die Zahlungen, welche im Laufe des Jahres stattfinden, nach dem Anfang (No. 13),

sodafs die Einheit, deren Auszahlung $\frac{m}{n}$ Jahr nach Beginn des Jahres stattfinden wird, am Anfang dieses Jahres einen Wert $1 - \frac{m}{n} i$ hat, dann liefert eine mit der obigen völlig übereinstimmende Entwicklung als den Wert der Leibrente in n Raten:

$$a^{(n)} = \left[1 - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} i^2\right] a - \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{6n^2} i + \\ + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} i^2 \qquad (328)$$

und als den der continuirlichen Leibrente:

$$\bar{a} = (1 - \tfrac{1}{3} i^2) a - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} i + \tfrac{1}{3} i^2, \qquad (329)$$

wo wir zur Abkürzung den Index x bei a weggelassen haben, wie wir öfters thun werden, wenn Mifsverständnisse ausgeschlossen sind.

209. Bewertet man die Zahlung, welche $\frac{m}{n}$ Jahr nach Beginn des Jahres stattfinden wird, zuerst nach dem Ende des Jahres mittels des Faktors $1 + \frac{n-m}{n} i$, und nachher wieder nach dem Anfang des Jahres mittels des Faktors $\frac{1}{1+i}$, sodafs der Discontirungsfaktor

$$\frac{1 + \frac{n-m}{n} i}{1+i} \text{ (No. 14)}$$

wird, so ergiebt sich Dr. **G. J. D. Mounier**'s Formel:

$$a^{(n)} = \left[1 + \frac{(n^2-1) i^2}{6n^2(1+i)}\right] a - \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{6n^2} i \qquad (330)$$

und weiter:

$$\bar{a} = \left[1 + \frac{i^2}{6(1+i)}\right] a - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} i. \qquad (331)$$

210. Discontirt man die Auszahlung $\frac{n-m}{n} l_x + \frac{m}{n} l_{x+1}$ nach dem Anfang des Jahres durch den Discontirungsfaktor $\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}$, dann ist

der Wert einer Leibrente 1 per Jahr, $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang jedes Jahres zahlbar:

$$\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}\left\{\left(1+\frac{m}{n}\,i\right)\mathrm{a}-\frac{m}{n}\,(1+i)\right\}.$$

Setzt man hierin $1+i=q^n$, dann geht dieser Ausdruck über in

$$\frac{1}{q^m}\left\{\left(1-\frac{m}{n}+\frac{m}{n}\,q^n\right)\mathrm{a}-\frac{m}{n}\,q^n\right\}=$$

$$=\left[\left(1-\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{q^{n-m}}{q^n}+\frac{m}{n}\,q^{n-m}\right]\mathrm{a}-\frac{m}{n}\,q^{n-m}=$$

$$=\left[\frac{1}{q^n}\cdot q^{n-m}+\frac{1}{n}\cdot\frac{q^n-1}{q^n}\cdot m\,q^{n-m}\right]\mathrm{a}-\frac{1}{n}\cdot m\,q^{n-m}.$$

Dadurch, daſs man nach einander $m=0,1,2,3\ldots(n-1)$ nimmt, addirt, und mit n dividirt, ergiebt sich als der Wert der Leibrente 1 per Jahr, in n Terminen zahlbar,

$$\mathrm{a}^{(n)}=\left[\frac{1}{nq^n}\cdot A+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{q^n-1}{q^n}\cdot B\right]\mathrm{a}-\frac{1}{n^2}\,B,$$

worin

$$A=q^n+q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q=\frac{q^{n+1}-q}{q-1},$$

$$B=q^{n-1}+2\,q^{n-2}+3\,q^{n-3}+\ldots+(n-1)\,q \text{ ist.}$$

Um B zu summiren, haben wir zu beachten, daſs $B=U-n$ ist, wenn man in U aus No. 111 s durch q ersetzt; wir finden daher:

$$B=\frac{q}{(q-1)^2}\,(q^n-n\,q+n-1),$$

und demnach

$$\frac{1}{n\,q^n}\cdot A+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{q^n-1}{q^n}\cdot B=$$

$$=\frac{1}{n\,q^{n-1}}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{(q^n-1)\,(q^n-n\,q+n-1)}{n^2\,q^{n-1}\,(q-1)^2},$$

was sich leicht reduciren läſst auf:

$$\frac{1}{n^2\,q^{n-1}}\cdot\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)^2.$$

Indem wir wieder q^n durch $1+i$ ersetzen, folgt als der Wert der Leibrente in n Raten:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = \frac{1}{n^2(1+i)^{\frac{n-1}{n}}} \left(\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{n}}-1}\right)^2 \cdot \mathfrak{a} -$$

$$- \frac{(1+i)^{\frac{1}{n}}}{n^2[(1+i)^{\frac{1}{n}}-1]^2} \cdot [i - n(1+i)^{\frac{1}{n}} + n]. \qquad (332)$$

Diese Gleichung wollen wir schreiben:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = C \cdot \mathfrak{a} - D.$$

C und D entwickeln wir jetzt bis in die zweite Potenz von i. Dazu ist:

$$\frac{1}{(1+i)^{\frac{n-1}{n}}} = (1+i)^{-\frac{n-1}{n}} = 1 - \frac{n-1}{n} i + \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} i^2;$$

$$(1+i)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} i - \frac{n-1}{2n^2} i^2 +$$

$$+ \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} i^3 - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^4} i^4;$$

$$\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{n}}-1} = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{n-1}{2n^2} i + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} i^2} =$$

$$= n + \frac{n-1}{2} i - \frac{n^2-1}{12n} i^2;$$

$$\left(\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{n}}-1}\right)^2 = n^2 + n(n-1) i + \frac{(n-1)(n-5)}{12} i^2.$$

Man findet sonach:

$$C = \frac{1}{n^2} \cdot \left[1 - \frac{n-1}{n} i + \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} i^2\right] \times$$

$$\times \left[n^2 + n(n-1) i + \frac{(n-1)(n-5)}{12} i^2\right] = 1 + \frac{n^2-1}{12n^2} i^2.$$

Weiter ist:

$$\frac{1}{[(1+i)^{\frac{1}{n}}-1]^2}=\frac{1}{i^2}\cdot\left[n^2+n(n-1)i+\frac{(n-1)(n-5)}{12}i^2\right],$$

$$i-n(1+i)^{\frac{1}{n}}+n=i^2\cdot\left[\frac{n-1}{2n}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}i+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^3}i^2\right],$$

sodafs man hat:

$$D=\left[1+\frac{1}{n}i-\frac{n-1}{2n^2}i^2\right]\times\left[1+\frac{n-1}{n}i+\frac{(n-1)(n-5)}{12n^2}i^2\right]\times$$

$$\times\left[\frac{n-1}{2n}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}i+\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^3}i^2\right].$$

Multiplicirt man zunächst die zwei ersten Faktoren und hebt aus dem dritten den Faktor $\frac{n-1}{2n}$ heraus, so ergiebt sich:

$$D=\frac{n-1}{2n}\cdot\left[1+i+\frac{n^2-1}{12n^2}i^2\right]\times\left[1-\frac{2n-1}{3n}i+\right.$$

$$\left.+\frac{6n^2-5n+1}{12n^2}i^2\right]=\frac{n-1}{2n}\cdot\left[1+\frac{n+1}{3n}i-\frac{n+1}{12n}i^2\right]=$$

$$=\frac{n-1}{2n}+\frac{n^2-1}{6n^2}i-\frac{n^2-1}{24n^2}i^2.$$

Bis zur zweiten Potenz von i genau ist also:

$$a^{(n)}=\left(1+\frac{n^2-1}{12n^2}i^2\right)a-\frac{n-1}{2n}-\frac{n^2-1}{6n^2}i+\frac{n^2-1}{24n^2}i^2. \quad (333)$$

Substituiren wir in der Formel (332) $n[(1+i)^{\frac{1}{n}}-1]=j_n$ (siehe No. 8), d. h. $(1+i)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{j_n}{n}$, so wird sie:

$$a^{(n)}=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{j_n}\right)\frac{1}{j_n}\cdot\frac{i^2}{1+i}\cdot a-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{j_n}\right)\cdot\frac{i-j_n}{j_n}. \quad (334)$$

Um hieraus den Wert der continuirlichen Leibrente abzuleiten, ist zu beachten, dafs für $n = \infty$, Lim $\frac{1}{n} = 0$ und Lim $j_n = L(1+i) = \delta$ wird, sodafs man hat:

$$\bar{a} = \frac{i^2}{(1+i)\,[L(1+i)]^2} \cdot a - \frac{i - L(1+i)}{[L(1+i)]^2}. \qquad (335)$$

Entwickelt man bis zur zweiten Potenz von i, so folgt:

$$\bar{a} = (1 + \tfrac{1}{12} i^2)\, a - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} i + \tfrac{1}{24} i^2, \qquad (336)$$

wie sich allerdings auch aus (333) ergiebt.

Die Formel (334) läfst sich schreiben:

$$a_x^{(n)} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{j_n}\right)\left[1 - \frac{i}{j_n}\left(1 - \frac{i}{1+i} a_x\right)\right],$$

sodafs die einfache Formel hervorgeht:

$$a_x^{(n)} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{j_n}\right)\left(1 - \frac{i}{j_n} A_x\right) \qquad (337)$$

und entsprechend:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{L(1+i)}\left(1 - \frac{i}{L(1+i)} A_x\right) = \frac{1}{L(1+i)}(1 - \bar{A}_x), \qquad (338)$$

wo $\bar{A}_x$ den Wert der Lebensversicherung mit Auszahlung unmittelbar nach dem Tode bedeutet (No. 108). Die a und A müssen auf derselben Sterblichkeitstafel beruhn.

Es verdient Beachtung, dafs die vier verschiedenen Formeln (323), (328), (330) und (333) bis zur ersten Potenz von i für die Leibrente in Raten denselben Wert ergeben, nämlich:

$$a^{(n)} = a - \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{6n^2} i \qquad (339)$$

und also für die continuirliche Leibrente:

$$\bar{a} = a - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} i. \qquad (340)$$

Aus der Formel (338) folgt:

$$\bar{A}_x = 1 - L(1+i) \cdot \bar{a}_x = 1 - \delta \cdot \bar{a}_x \ldots . \qquad (341)$$

Leibrente in Raten unter Aussonderung des Zins- und Rentenverlustes.

211. Wenn auch im Sterbejahr alle Raten gezahlt würden, so fände man den Wert der jährlich in n Raten praenumerando zahlbaren

Leibrente aus dem Wert der jährlich einmal zahlbaren durch Multiplication der letzteren mit

$$\frac{i}{n\,[1+i-(1+i)^{1-\frac{1}{n}}]}$$

(vergl. No. 29), welchen Faktor wir mit N bezeichnen wollen.

Es ist nun aber noch zu berücksichtigen, dafs der Ausfall einer oder mehrerer Rentenzahlungen im Sterbejahr den obigen Wert der Leibrente verringert. Sei M der durchschnittliche Wert des Verlustes an Rente im Sterbejahr, reducirt auf das Ende des Jahres, und sei A_x die einmalige Prämie für Versicherung der Einheit auf den Todesfall, am Ende des Sterbejahres zahlbar, dann ist der gegenwärtige Wert jenes Rentenverlustes $M \cdot A_x$, und der Wert der Leibrente in n Raten also:

$$\mathfrak{a}_x^{(n)} = N \cdot \mathfrak{a}_x - M \cdot A_x. \qquad (342)$$

Der durchschnittliche Rentenverlust ist nicht unabhängig vom Sterbealter.

Im Folgenden sehen wir aber davon ab und nehmen zur Berechnung von M an, dafs sich die Todesfälle gleichmäfsig über das Jahr verteilen, dafs also von n Personen, die in einem Jahr sterben, in jedem Jahresteil $\frac{1}{n}$ e i n e stirbt.

Der Verlust an Rente der n Personen ist nun, geordnet nach dem Jahresteil, in welchem jede stirbt, in Reduction auf das Ende des Jahres, also unter Berücksichtigung des Zinses in folgender Tafel angegeben:

Jahresteil des Ablebens:	Verlust:
1^{ter}	$\frac{1}{n}\left[(1+i)^{1-\frac{1}{n}} + (1+i)^{1-\frac{2}{n}} + (1+i)^{1-\frac{3}{n}} + \ldots + (1+i)^{\frac{1}{n}}\right]$
2^{ter}	$\frac{1}{n}\left[(1+i)^{1-\frac{2}{n}} + (1+i)^{1-\frac{3}{n}} + \ldots + (1+i)^{\frac{1}{n}}\right]$
3^{ter}	$\frac{1}{n}\left[(1+i)^{1-\frac{3}{n}} + \ldots + (1+i)^{\frac{1}{n}}\right]$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1^{\text{ter}}$	$\frac{1}{n}\left[(1+i)^{\frac{1}{n}}\right]$.

Hieraus ergiebt sich durch Addition und Division mit n der durchschnittliche Verlust am Ende des Sterbejahres:

$$M = \frac{(1+i)^{1-\frac{1}{n}} + 2(1+i)^{1-\frac{2}{n}} + 3(1+i)^{1-\frac{3}{n}} + \ldots + (n-1)(1+i)^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

A_x mufs in Formel (342) nach derselben Sterblichkeitstafel berechnet werden wie a_x.

Diese Formel läfst sich noch umformen. Schreiben wir nämlich:

$$A_x = 1 - \frac{i}{1+i} a_x,$$

dann wird sie:

$$a_x^{(n)} = \left(N + \frac{i}{1+i} M\right) a_x - M,$$

und es zeigt sich, dafs sie keine andere ist als die Formel:

$$a_x^{(n)} = C \cdot a_x - D \text{ in No. 210.}$$

Wenn man wie dort $1 + i = q^n$ setzt, erhält man nämlich:

$$M = \frac{q^{n-1} + 2q^{n-2} + 3q^{n-3} + \ldots + (n-1)q}{n^2} = \frac{B}{n^2} = D;$$

$$N = \frac{i}{n\left[1+i-(1+i)^{1-\frac{1}{n}}\right]} = \frac{q^n - 1}{n(q^n - q^{n-1})} =$$

$$= \frac{q^n - 1}{nq^{n-1}(q-1)} = \frac{q^{n+1} - q}{nq^n(q-1)} = \frac{A}{nq^n};$$

$$N + \frac{i}{1+i} M = \frac{A}{nq^n} + \frac{q^n - 1}{q^n} \cdot \frac{B}{n^2} = C.$$

Die Gröfse $M = D$ läfst sich indessen auch in folgender Weise bestimmen. Der Wert des Verlustes, reducirt auf das Ende des Jahres, ist für denjenigen, welcher im m^{ten} Jahresteil stirbt:

$$\frac{1}{n} \cdot \left[(1+i)^{1-\frac{m}{n}} + (1+i)^{1-\frac{m-1}{n}} + (1+i)^{1-\frac{m-2}{n}} + \ldots + (1+i)^{\frac{1}{n}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{(1+i)^{\frac{1}{n}}}{(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1} \left[1 + i^{\frac{n-m}{n}} - 1\right].$$

Wenn man hier nach einander $m = 1, 2, 3 \ldots n$ setzt, addirt und durch n dividirt, so findet man denselben Wert für D wie in No. 210.

Bis zur zweiten Potenz von i ist

$$N = 1 - \frac{n-1}{2n} i + \frac{5n^2 - 6n + 1}{12n^2} i^2.$$

Leibrente in Raten mittels der discontirten Lebenden.

212. Man kann die Voraussetzung des gleichmäfsigen Ablebens im Laufe des Jahres durch die Annahme vermeiden, dafs die discontirten Lebenden in dem Ausdruck:

$$a_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots}{D_x}$$

näherungsweise eine arithmetische Reihe höherer Ordnung bilden.

Ohne irgend ein Gesetz für die Weise des Ablebens während eines Jahres anzunehmen, ist

$$a_x^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{D_x} \cdot [D_x + D_{x+\frac{1}{n}} + D_{x+\frac{2}{n}} + D_{x+\frac{3}{n}} + \ldots$$

$$D_{x+1} + D_{x+1+\frac{1}{n}} + D_{x+1+\frac{2}{n}} + \ldots].$$

Gesetzt, dafs die D eine arithmetische Reihe dritter Ordnung bilden, hat man:

$$D_{y+\frac{\alpha}{n}} = D_y - \frac{\alpha}{n} \Delta D_y + \frac{\frac{\alpha}{n}\left(\frac{\alpha}{n} - 1\right)}{2} \Delta^2 D_y -$$

$$- \frac{\frac{\alpha}{n}\left(\frac{\alpha}{n} - 1\right)\left(\frac{\alpha}{n} - 2\right)}{6} \Delta^3 D_y =$$

$$= D_y - \frac{\alpha}{n} \Delta D_y + \frac{\alpha^2 - n\alpha}{2n^2} \Delta^2 D_y -$$

$$- \frac{\alpha^3 - 3n\alpha^2 + 2n^2\alpha}{6n^3} \Delta^3 D_y,$$

wo $$\Delta D_y = D_y - D_{y+1}, \quad \Delta^2 D_y = \Delta D_y - \Delta D_{y+1},$$

$$\Delta^3 D_y = \Delta^2 D_y - \Delta^2 D_{y+1}.$$

Setzt man nach einander $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ und addirt, so ergiebt sich:

$$D_y + D_{y+\frac{1}{n}} + D_{y+\frac{2}{n}} + \ldots + D_{y+\frac{n-1}{n}} =$$

$$= n D_y - \frac{n-1}{2} \Delta D_y + \frac{\frac{1}{6} n (n-1)(2n-1) - \frac{1}{2} n^2 (n-1)}{2 n^2} \Delta^2 D_y$$

$$- \frac{\frac{1}{4} n^2 (n-1)^2 - \frac{1}{2} n^2 (n-1)(2n-1) + n^3 (n-1)}{6 n^3} \Delta^3 D_y =$$

$$= n D_y - \frac{n-1}{2} \Delta D_y - \frac{n^2-1}{12 n} \Delta^2 D_y - \frac{n^2-1}{24 n} \Delta^3 D_y .$$

In diesem letzten Ausdruck nehme man wieder nach einander $y = x, x+1, x+2$ u. s. w. bis zum höchsten Alter der Sterblichkeitstafel und addire, dann folgt:

$$D_x + D_{x+\frac{1}{n}} + D_{x+\frac{2}{n}} + \ldots + D_{x+1} + D_{x+1+\frac{1}{n}} + \ldots =$$

$$= n \sum_x D_y - \frac{n-1}{2} \sum_x \Delta D_y - \frac{n^2-1}{12 n} \sum_x \Delta^2 D_y - \frac{n^2-1}{24 n} \sum_x \Delta^3 D_y .$$

Nun ist

$$\sum_x D_y = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots = \Sigma D_x ,$$

$$\sum_x \Delta D_y = \sum_x D_y - \sum_x D_{y+1} = \Sigma D_x - \Sigma D_{x+1} = D_x ,$$

$$\sum_x \Delta^2 D_y = \sum_x \Delta D_y - \sum_x \Delta D_{y+1} = D_x - D_{x+1} ,$$

$$\Delta^3 D_y = \sum_x \Delta^2 D_y - \sum_x \Delta^2 D_{y+1} = (D_x - D_{x+1}) - (D_{x+1} - D_{x+2}) =$$

$$= D_x - 2 D_{x+1} + D_{x+2} .$$

Man hat also:

$$D_x + D_{x+\frac{1}{n}} + D_{x+\frac{2}{n}} + \ldots + D_{x+1} + D_{x+1+\frac{1}{n}} + \ldots$$

$$= n \cdot \Sigma D_x - \frac{n-1}{2} \cdot D_x - \frac{n^2-1}{12 n} \cdot (D_x - D_{x+1}) -$$

$$- \frac{n^2-1}{24 n} \cdot (D_x - 2 D_{x+1} + D_{x+2}) =$$

$$= n \cdot \Sigma D_x - \frac{n-1}{2} \cdot D_x - \frac{n^2-1}{24 n} \cdot (3 D_x - 4 D_{x+1} + D_{x+2}).$$

Wenn man mit $n D_x$ dividirt und darauf achtet, dafs

$$\frac{\Sigma D_x}{D_x} = a_x ,$$

so ergiebt sich als Wert der praenumerando in n Raten zahlbaren Leibrente:

$$a_x^{(n)} = a_x - \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{24n^2} \cdot \frac{3D_x - 4D_{x+1} + D_{x+2}}{D_x}. \quad (343)$$

oder

$$a_x^{(n)} = a_x - \frac{(n-1)(5n+1)}{8n^2} + \frac{n^2-1}{24n^2} \cdot \frac{4D_{x+1} - D_{x+2}}{D_x}.$$

Wenn man die D als Glieder einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung ansähe, würde man finden:

$$a_x^{(n)} = a_x - \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{12n^2} \cdot \frac{D_x - D_{x+1}}{D_x}, \quad (343^*)$$

wofür man schreiben könnte:

$$a_x - \frac{(n-1)(7n+1)}{12n^2} + \frac{n^2-1}{12n^2} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}.$$

Betrachtet man endlich die D als Glieder einer gewöhnlichen arithmetischen Reihe, dann kommt man wieder auf die roheste Annäherung:

$$a^{(n)} = a - \frac{n-1}{2n}.$$

Es sei noch darauf hingewiesen, dafs die Formeln (339) und (343*) denselben Wert für die ratenweise Leibrente geben, wenn

$$\frac{D_x - D_{x+1}}{D_x} = 2i, \text{ also } \frac{D_{x+1}}{D_x} = 1 - 2i$$

und also

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = (1+i)(1-2i) = 1 - i - 2i^2 \text{ ist.}$$

Setzt man die Sterbenswahrscheinlichkeit des x-jährigen während eines Jahres $= q_x$, so folgt hieraus $q_x = i + 2i^2$. Rechnet man mit $4\,\%$, so ist $q_x = 0{,}0432$, eine Sterbenswahrscheinlichkeit, die dem Alter von 60 Jahren ungefähr entspricht. Für jüngere Altersjahre, ausgenommen die ersten Lebensjahre, liefert Formel (343*) einen gröfseren, für höhere einen kleineren Wert als (339).

Die hier behandelte Methode hat den grofsen Vorteil vor anderen, dafs sie unverändert für Leibrenten auf mehrere Personen benutzt werden kann, wenn man den D die dann geeignete Bedeutung giebt. Handelt es sich um eine Verbindungsrente für zwei x und y Jahr alte Personen, so ist in Formel (343) $l_x D_y$ für D_x, $l_{x+1} D_{y+1}$ für D_{x+1}, $l_{x+2} D_{y+2}$ für D_{x+2} u. s. w. zu substituiren.

In der Praxis begnügt man sich sehr oft mit der rohesten Annäherung $a - \frac{n-1}{2n}$. Vergleicht man diese mit den genaueren Formeln, dann erweist sich die Zahl $\frac{n-1}{2n}$ kaum bis zur zweiten Decimale zuverlässig. Diese geringere Genauheit ist nicht gefährlich im Vergleich mit der geringen Verlässlichkeit der Decimalen in a selbst, man sieht aber bei dieser Gelegenheit, dafs es nur eine durchaus scheinbare Genauigkeit sein würde, wollte man bei Anwendung der Formel $a - 0.25$ die Leibrente in halbjährlichen Raten bis auf viele Decimalen angeben.

Analytische Formel für die Leibrente in Raten.

213. Nach einer Formel von **Mac-Laurin** bezw. **Euler** (wahrscheinlich haben beide sie unabhängig von einander gefunden) ist näherungsweise:

$$\frac{1}{n}\left[F(x)+F\left(x+\frac{1}{n}\right)+F\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots+F\left(x+\frac{q}{n}\right)\right]=$$
$$=\int_x^{x+\frac{q}{n}} F(x)\,dx+\frac{1}{2n}\left[F\left(x+\frac{q}{n}\right)+F(x)\right]+$$
$$+\frac{1}{12n^2}\left[F'\left(x+\frac{q}{n}\right)-F'(x)\right], \qquad (344)$$

wo F eine continuirliche Function bedeutet (vergl. z. B. Dr. **J. Dienger:** Die Differential- und Integralrechnung und Dr. **O. Schlömilch:** Vorlesungen über einzelne Teile der höheren Analysis).

Im Falle nun, dafs, bei einem gewissen Wert für q anfangend, $F\left(x+\frac{q}{n}\right)$ und $F'\left(x+\frac{q}{n}\right)$ immer $= 0$ sind, ist

$$\frac{1}{n}\left[F(x)+F\left(x+\frac{1}{n}\right)+F\left(x+\frac{2}{n}\right)+F\left(x+\frac{3}{n}\right)+\ldots\right]=$$
$$=\int_x^{\infty} F(x)\,dx+\frac{1}{2n}F(x)-\frac{1}{12n^2}F'(x). \qquad (345)$$

Stellt man hierin $n=1$, so findet man:

$$F(x)+F(x+1)+F(x+2)+\ldots=$$
$$=\int_x^{\infty} F(x)\,dx+\tfrac{1}{2}F(x)-\tfrac{1}{12}F'(x). \qquad (346)$$

Subtrahirt man (346) von (345), so ergiebt sich:

$$\frac{1}{n}\left[F(x)+F\left(x+\frac{1}{n}\right)+F\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots\right]=$$
$$=[F(x)+F(x+1)+F(x+2)+\ldots]-$$
$$-\frac{n-1}{2n}F(x)+\frac{n^2-1}{12n^2}F'(x). \qquad (347)$$

214. Ist $F(x)$ die discontirte Anzahl der Lebenden im Alter x, und dividirt man beide Glieder der Formel (347) mit $F(x)$, so sieht man sofort, dafs

$$\mathring{a}_x^{(n)}=\mathring{a}_x-\frac{n-1}{2n}+\frac{n^2-1}{12n^2}\cdot\frac{F'(x)}{F(x)} \qquad (348)$$

Bedeutet jetzt $f(x)$ die Anzahl der Lebenden im Alter x, dann ist

$$F(x)=\frac{f(x)}{(1+i)^x},$$

woraus sich ergiebt:

$$F'(x)=\frac{f'(x)}{(1+i)^x}-\frac{f(x)}{(1+i)^x}\cdot L(1+i),$$

und also:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-L(1+i).$$

Nun ist (No. 39) $-\frac{f'(x)}{f(x)}$ die Sterbe-Intensität des x-jährigen, welche wir mit μ_x bezeichnen; man erhält demnach:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=-\mu_x-L(1+i),$$

der Wert der Leibrente in n Raten ist also:

$$\mathring{a}_x^{(n)}=\mathring{a}_x-\frac{n-1}{2n}-\frac{n^2-1}{12n^2}[\mu_x+L(1+i)], \qquad (349)$$

und derjenige der continuirlichen Leibrente:

$$\bar{a}_x=\mathring{a}_x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{12}[\mu_x+L(1+i)]. \qquad (350)$$

Um die Formel anzuwenden, könnte man setzen:

$$\mu_x=\frac{f(x-1)-f(x+1)}{2f(x)} \text{ (Formel 79).}$$

Vernachlässigt man in $L(1+i)$ die Potenzen von i, sodafs $L(1+i)=i$ gesetzt wird, und nimmt man $\mu_x=i$, dann geht

Formel (349) über in (339); nun ist für die meisten Altersstufen i eine zu grofse Zahl für die Sterbe-Intensität, sodafs im Allgemeinen $\mu_x + L(1+i) < 2i$ sein und daher Formel (339) einen etwas zu geringen Wert für die ratenweise Leibrente ergeben wird; bei den allerjüngsten und den allerhöchsten Altersstufen findet das Umgekehrte statt.

Hier zeigt sich am deutlichsten, wie ungenau es ist, ein gleichmäfsiges Ableben während eines Jahres für sehr junge Kinder und für die höchsten Altersstufen anzunehmen.

Man kann zwar Formel (345) bis zu jeder beliebigen Anzahl von Gliedern fortsetzen, aber, von der schwierigen Anwendung ganz abgesehn, gehört die Reihe auf der rechten Seite zu den halbconvergenten Reihen, d. h. Reihen, die zwar divergiren, die aber dennoch bis zu einer gewissen Anzahl von Gliedern eine um so bessere Annäherung geben, je mehr Glieder aufgenommen sind, bei der Aufnahme noch mehrerer Glieder jedoch eine steigende Abweichung aufweisen.

Ebenso wäre man im Irrtum, wenn man meinte, dafs Formel (343) viel genauer würde, je mehr Glieder man aufnähme, und man voraussetzte, dafs die D eine Reihe der vierten oder höheren Ordnung bildeten; das Gegenteil kann stattfinden, wie von **Sprague** gegebene Beispiele zeigen. Die Formeln (349) und (350) sind auch auf Verbindungsrenten anzuwenden, wenn man darin:

$$a_x^{(n)},\ \bar{a}_x,\ a_x \text{ und } \mu_x$$

ersetzt durch:

$$a_{xy}^{(n)},\ \bar{a}_{xy},\ a_{xy} \text{ und } \mu_{xy},$$

wo μ_{xy} dasselbe ist für die Auflösung der Paare durch Sterblichkeit, wie μ_x für die Sterblichkeit der einzelnen Personen, indem $\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y$ ist. (Siehe No. 46.)

Pension in Raten.

215. Soll die Pension anfangen nach m Jahren und gezahlt werden in n Raten per Jahr für das erste Mal heute nach $m + \frac{1}{n}$ Jahren.

Die Leibrente in n Raten postnumerando auf dem Haupte eines x-jährigen hat den Näherungswert

$$a_x - \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{n} = a_x - \frac{n+1}{2n}.$$

Hieraus erfolgt, dafs obengenannte Pension zum Barwert hat:

$$\frac{D_{x+m}}{D_x}\left(a_{x+m}-\frac{n+1}{2n}\right)=\frac{\Sigma D_{x+m}-\frac{n+1}{2n}D_{x+m}}{D_x}. \quad (351)$$

Temporäre Leibrente in Raten.

216. Den Wert einer solchen Leibrente könnten wir nach der Methode in No. 212 berechnen, indem wir die D beim letzten der festgesetzten Jahre abbrechen; wir können aber eben so gut von der lebenslänglichen ratenweisen Leibrente ausgehn. Der Wert der m-jährigen, jährlich in n Raten praenumerando zahlbaren Leibrente ist nämlich für den x-jährigen, wie man sofort aus Formel (175) erkennt:

$$a_x^{(n)}-\frac{D_{x+m}}{D_x}a_{x+m}^{(n)}.$$

Substituirt man hierin:

$$a_x^{(n)}=a_x-\frac{n-1}{2n},\quad a_{x+m}^{(n)}=a_{x+m}-\frac{n-1}{2n},$$

so ergiebt sich der in Frage stehende Wert der Leibrente gleich

$$a_x-\frac{n-1}{2n}-\frac{D_{x+m}}{D_x}\left(a_{x+m}-\frac{n-1}{2n}\right)=$$

$$=\frac{N_{x-1}}{D_x}-\frac{n-1}{2n}-\frac{D_{x+m}}{D_x}\left(\frac{N_{x+m-1}}{D_{x+m}}-\frac{n-1}{2n}\right)=$$

$$=\frac{N_{x-1}-N_{x+m-1}}{D_x}-\frac{n-1}{2n}\cdot\left(1-\frac{D_{x+m}}{D_x}\right),$$

wofür man schreiben kann:

$${}_{|m}a_x-\frac{n-1}{2n}\left(1-\frac{D_{x+m}}{D_x}\right). \quad (352)$$

Man hätte auch die Formel (342) benutzen können, vorausgesetzt, dafs man unter a_x die temporäre, einmal per Jahr zahlbare Leibrente, unter A_x die einmalige Prämie für die temporäre Versicherung der Einheit auf den Todesfall von gleicher Dauer verstände.

Leibrente in Raten bis zum Tage des Ablebens.

217. Wenn im Sterbejahre des Versicherten noch für den von ihm durchlebten Teil des letzten Jahres ausgezahlt wird, so hat man, um von

der entsprechenden, einmal im Jahr zahlbaren Rente auf die ratenweise überzugehn, nur den Zins zu berücksichtigen; denn auch im Sterbejahre bekommt der Versicherte denselben Betrag an Rente, mag die Zahlung jährlich auf einmal oder in Raten erfolgen. Wird die Leibrente postnumerando gezahlt und ist ihr Wert $\mathring{a}$ bei jährlich einmaliger Zahlung, dann ist derselbe bei Zahlung in n Raten (vergl. No. 27):

$$\frac{1}{n}\,\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{n}}-1}\cdot\mathring{a},$$

oder bei Entwicklung bis zur zweiten Potenz von i:

$$\left(1+\frac{n-1}{2n}\,i-\frac{n^2-1}{12n^2}\,i^2\right)\cdot\mathring{a}.$$

In der Praxis ist

$$\left(1+\frac{n-1}{2n}\,i\right)\cdot\mathring{a}$$

meistens genau genug.

Substituirt man nach Formel (203):

$$\mathring{a}_x=(1-\tfrac{1}{2}\,i)\;a_x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\,i,$$

und vernachlässigt man die zweite Potenz von i, so ergiebt sich der Wert der postnumerando in jährlich n Raten bis zum Tage des Todes zahlbaren Leibrente:

$$\mathring{a}_x^{(n)}=\left(1-\frac{1}{2n}\,i\right)a_x+\tfrac{1}{2}-\frac{1}{4n}\,i.$$

Zwar müfste die Correction für das letzte Jahr etwas geringer sein als für die übrigen Jahre; wie gering aber der Einfluſs auf das Resultat ist, zeigt folgende Entwicklung, wo auch mit dem letzten Jahre gerechnet wird.

Bei der Zahlung in n Raten beträgt die Nachzahlung im Durchschnitt $\frac{1}{2n}$, und der Barwert dieser Nachzahlung ist näherungsweise $\frac{1}{2n}\,(1+\frac{1}{2}\,i)\;\frac{1}{1+i}\,(1-i\,a_x)$. Vernachlässigt man hierin nach der Division mit $1+i$ die zweiten und höheren Potenzen von i, so erhält man:

$$\frac{1}{2n}\,(1-\tfrac{1}{2}\,i)-\frac{1}{2n}\,i\cdot a_x.$$

Der Wert der Leibrente in n Raten bis zum Tage des Todes wird also näherungsweise:

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(n)} = a_x + \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{2n}\,(1 - \tfrac{1}{2}i) - \frac{1}{2n}\,i\,a_x\,,$$

was sich sogleich reducirt zu

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(n)} = \left(1 - \frac{1}{2n}\,i\right) a_x + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{4n}\,i, \qquad (352^*)$$

ebenso wie oben.

Die Formel (352*) ist ohne Algebra zu beweisen.

Die postnumerando zahlbare Leibrente in n Raten ohne Nachzahlung hat zum Näherungswert:

$$a_x + \frac{n-1}{2n}.$$

Soll die Leibrente vollständig sein, so mufs beim Tode durchschnittlich noch ein halber Termin gezahlt werden; die Nachzahlung beträgt also durchschnittlich $\frac{1}{2n}$.

Der Rentner empfängt aber durchschnittlich ebensoviel an Rente und genieſst ebensoviel an Zins, wenn ihm in der Mitte des ersten $\frac{1}{n}$ Jahres $\frac{1}{2n}$, und je $\frac{1}{n}$ Jahr später, auch im Jahresteil des Ablebens, der Betrag $\frac{1}{n}$ gezahlt wird.

Für die Summe

$$a_x + \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{2n} = a_x + \tfrac{1}{2}$$

kann gegeben werden $\frac{1}{2n}$ am Anfang des ersten Jahres und $\frac{1}{n}$ am Anfang jedes folgenden $\frac{1}{n}$ Teils des Jahres, sodafs für diese Summe jede Zahlung $\frac{1}{2n}$ Jahr früher wie oben stattfinden kann.

Multiplicirt man daher für Vergütung an Zins mit $1 - \frac{1}{2n}\,i$, so findet man für den Wert der postnumerando vollständigen Leibrente in n Raten per Jahr

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(n)} = (1 - \frac{1}{2n}\,i)\,(a_x + \tfrac{1}{2}) = (1 - \frac{1}{2n}\,i)\,a_x + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2n}\,i.$$

Für $n = 1$ hat man den Wert der vollständigen, postnumerando jährlich bezahlbaren Leibrente

$$\mathring{a}_x = (1 - \tfrac{1}{2}\, i)\,(a_x + \tfrac{1}{2}).$$

Vollständige und unvollständige Leibrente in Raten mittels einer gemeinschaftlichen Formel.

218. Man kann eine einfache Formel zusammenstellen, wonach die Auszahlung beim Tode des Rentners ein willkürlich bestimmter Betrag sein kann. Wir gehen von der praenumerando zahlbaren Leibrente aus.

Giebt man mit c die durchschnittliche Zeit an, welche verläuft zwischen dem Anfang des Jahres und den Zeitpunkten, in welchen die Raten ausgezahlt werden, so ist die N der Formel (342) näherungsweise: $1 - c\,i$.

Ist b der Betrag (die M der Formel (342)), der im Sterbejahr durchschnittlich weniger als die Einheit ausgezahlt wird, so ist näherungsweise der Barwert dieses Rentenverlustes $b\ (1 - i\,\mathrm{a}_x)$, wobei zur einmaligen Prämie für die Einheit im Ablebensfall $1 - i\,\mathrm{a}_x$ genommen ist.

Man findet also für die praenumerando Leibrente in Raten:

$$[1 - (c - b)\,i]\,\mathrm{a}_x - b. \qquad (353)$$

(Man sehe einen Aufsatz von Prof. **A. E. Rahusen** im III. Teil des mehr genannten holländischen Archiefs.)

Sucht man z. B. den Wert der Leibrente bis zum Tage des Ablebens jährlich in n Raten am Ende jedes Termins, so ist

$$c = \frac{n+1}{2n},\quad b = \tfrac{1}{2}$$

und man findet:

$$\mathring{a}_x^{(n)} = (1 - \frac{1}{2n}\, i)\,\mathrm{a}_x - \tfrac{1}{2} = (1 - \frac{1}{2n}\, i)\,a_x + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2n}\, i, \qquad (353^*)$$

welche nur einen geringen Unterschied mit der genaueren Formel (352*) hat.

Fragt man den Wert derselben Rente, aber zahlbar am Anfang jedes Termins, so ist:

$$c = \frac{n-1}{2n},\ b = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

und wir erhalten:

$$(1 - \frac{1}{2n} i)\, a - \tfrac{1}{2} + \frac{1}{n} = (1 - \frac{1}{2n} i)\, a + \frac{n+2}{2n} - \frac{1}{2n} i.$$

Ist es einfach die Rede von dem Werte der unvollständigen Leibrente in n Raten am Anfang jedes Termins, so ist:

$$c = \frac{n-1}{2n} \text{ und } b = \frac{n-1}{2n}$$

und man erhält:

$$a_x - \frac{n-1}{2n}.$$

Ein paar andere Beispiele der Anwendung von Formel (353) sind vielleicht nicht überflüssig.

Eine Leibrente wird ausgezahlt in dreimonatlichen Raten. Die Auszahlung findet statt in der Mitte des Termins für Alle, welche am Anfang des Termins noch am Leben waren.

Man hat dann $c = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{8}$ und der Wert der Leibrente ist

$$(1 - \tfrac{1}{8} i)\, a_x - \tfrac{3}{8}.$$

Eine Leibrente wird ausgezahlt in monatlichen Raten. Die Auszahlung geschieht am Ende jedes Termins, indem am Ende des Monats, worin der Rentner gestorben ist, noch eine doppelte Rate ausgezahlt wird.

Man hat dann $c = \frac{13}{24}$, $b = \frac{3}{8}$ und die Formel der Rente ist:

$$(1 - \tfrac{1}{6} i)\, a_x - \tfrac{3}{8}.$$

Wenn im Sterbejahre durchschnittlich mehr als die Einheit ausgezahlt wird, ist b negativ.

Verbindungsrente in Raten.

219. Um den Wert der unmittelbar beginnenden Leibrente für zwei Personen abzuleiten, hat man oft einfach Formel (332) oder gar die ungenaue (321) angewendet. Obgleich nun selbst die letztere in sehr vielen Fällen genügt, mufs man doch beachten, dafs für Verbindungsrenten jene Formeln schon wieder ungenauer sind wie für Leibrenten auf eine Person; ist es schon nicht ganz richtig, dafs sich das Ableben gleichmäfsig über das Jahr verteilt, so trifft es noch weniger zu, dafs die Auflösungen der Paare durch das Ableben gleichmäfsig verteilt sind. Denken wir uns nämlich das Ableben der Männer und Frauen aus einer Anzahl von Ehepaaren gleichmäfsig über das Jahr

verteilt, so entspricht beim Ableben beider Teile eines Paares doch nur demjenigen des ersten Teils die Auflösung eines Paares, d. h. die Auflösung der Paare ist am Anfang des Jahres häufiger wie gegen das Ende hin.

Dasselbe wäre in Betracht zu ziehen bei Benutzung der Formel (342), in welcher A_x die einmalige Prämie für die Einheit auf den ersten Todesfall, der ein Paar betrifft, bedeuten müfste, denn schliefslich ist Formel (342) dieselbe wie (332). Wird eine grofse Genauigkeit verlangt, dann könnte man, wie gesagt, die Methode aus No. 212 anwenden. Vom mathematischen Standpunkte ist es jedoch von Interesse, die ratenweise Verbindungsrente unter der Voraussetzung zu berechnen, dafs die Sterblichkeit der betreffenden Personen gleichmäfsig über das ganze Jahr verteilt ist. Dies ist auch durch Herrn **J. H. Schuylenburg** ausgeführt worden. Hier wollen wir unter derselben Voraussetzung auf möglichst einfachem Wege zu einer Formel in endlicher Form gelangen.

Es sei $l_x\, l_y$ die Zahl der Paare; $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des $t+1^{\text{ten}}$ Jahres sind davon noch vorhanden:

$$\left(\frac{n-m}{n} l_{x+t} + \frac{m}{n} l_{x+t+1}\right)\left(\frac{n-m}{n} l_{y+t} + \frac{m}{n} l_{y+t+1}\right) =$$

$$= \frac{(n-m)^2}{n^2} l_{x+t}\, l_{y+t} + \frac{m(n-m)}{n^2} l_{x+t}\, l_{y+t+1} +$$

$$+ \frac{m(n-m)}{n^2} l_{x+t+1}\, l_{y+t} + \frac{m^2}{n^2} l_{x+t+1}\, l_{y+t+1}. \qquad (354)$$

Jedes dieser Paare erhält eine Summe $\frac{1}{n}$, welche, auf den Anfang discontirt,

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \frac{1}{(1+i)^m} \text{ wird.}$$

Hiermit multiplicire man den obigen Ausdruck, nehme alsdann $t = 0, 1, 2, 3$ u. s. w., addire und dividire mit $l_x\, l_y$, dann ergiebt sich als Wert der jedes Mal $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres zahlbaren Verbindungsrente $\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}\left\{\frac{(n-m)^2}{n^3}\,a_{x\,y}+\frac{m\,(n-m)}{n^3}\,\frac{l_{y+1}}{l_y}\,a_{x\,.\,y+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{m\,(n-m)}{n^3}\,\frac{l_{x+1}}{l_x}\,a_{x+1\,.\,y}+\frac{m^2}{n^3}\,(1+i)\,(a_{x\,y}-1)\right\}=$$

$$=\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}\left\{\left[\frac{(n-m)^2}{n^3}+(1+i)\,\frac{m^2}{n^3}\right]a_{x\,y}+\right.$$

$$+\frac{m\,(n-m)}{n^3}\,\frac{l_{y+1}}{l_y}\,a_{x\,.\,y+1}+$$

$$\left.+\frac{m\,(n-m)}{n^3}\,\frac{l_{x+1}}{l_x}\,a_{x+1\,.\,y}-(1+i)\,\frac{m^2}{n^3}\right\}.$$

Setzt man hierin nach einander $m = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ und addirt, so folgt der Wert der Verbindungsrente in n Raten, den wir schreiben wollen:

$$a_{x\,y}^{(n)}=[E+(1+i)\,F]\,a_{x\,y}+\frac{l_{y+1}}{l_y}\,G\cdot a_{x\,.\,y+1}+$$

$$+\frac{l_{x+1}}{l_x}\,G\cdot a_{x+1\,.\,y}-(1+i)\,F, \qquad (355)$$

und zwar ist

$$E=\frac{1}{n^3}\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{(n-m)^2}{(1+i)^{\frac{m}{n}}},\quad F=\frac{1}{n^3}\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{m^2}{(1+i)^{\frac{m}{n}}},$$

$$G=\frac{1}{n^3}\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{m\,(n-m)}{(1+i)^{\frac{m}{n}}},$$

wo die Summen Σ sich also über alle ganzen Werte von $m = 0$ bis $m = n-1$ erstrecken.

Wenn man wie früher $(1+i)^{\frac{1}{n}} = q$ setzt, so ist

$$\Sigma\frac{(n-m)^2}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}=\Sigma\frac{(n-m)^2}{q^m}=$$

$$=n^2+\frac{(n-1)^2}{q}+\frac{(n-2)^2}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{q^{n-1}}\,(1+2^2\,q+3^2\,q^2+\ldots+n^2\,q^{n-1}).$$

Um $$Z = 1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \ldots + n^2 q^{n-1}$$

zu bestimmen, multiplicire men mit $1 - q$, dann ist

$$Z(1-q) = 1 + 3q + 5q^2 + \ldots + (2n-1) q^{n-1} - n^2 q^n =$$
$$= 2(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}) -$$
$$- (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) - n^2 q^n.$$

Unter Benutzung des Wertes der Reihe:

$$1 + 2q + 3q^2 + \ldots + n q^{n-1}$$

(siehe Reihe Y von No. 111) wird

$$Z(1-q) = 2 \times \frac{1 - (n+1) q^n + n q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{1 - q^n}{1 - q} - n^2 q^n,$$

d. h.

$$Z = \frac{n^2 q^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1) q^{n+1} + (n+1)^2 q^n - q - 1}{(q-1)^3}.$$

Nimmt man wieder $q = (1+i)^{\frac{1}{n}}$ und setzt $1 + i = r$, so folgt:

$$E = \frac{n^2 r^{\frac{n+2}{n}} - (2n^2 + 2n - 1) r^{\frac{n+1}{n}} + (n+1)^2 r - r^{\frac{1}{n}} - 1}{n^3 r^{\frac{n-1}{n}} (r^{\frac{1}{n}} - 1)^3}.$$

$$\Sigma \frac{m^2}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{q} + \frac{2^2}{q^2} + \frac{3^2}{q^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{q^{n-1}}$$

ergiebt sich, wenn man in der Reihe Z, n durch $n - 1$, q durch $\frac{1}{q}$ ersetzt und dann mit q dividirt. Deshalb ist nach einer leichten Reduction:

$$\Sigma \frac{m^2}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} = \frac{q^{n+1} + q^n - n^2 q^2 + (2n^2 - 2n - 1) q - (n-1)^2}{(q-1)^3 q^{n-1}}$$

und also:

$$F = \frac{r^{\frac{n+1}{n}} + r - n^2 r^{\frac{2}{n}} + (2n^2 - 2n - 1) r^{\frac{1}{n}} - (n-1)^2}{n^3 r^{\frac{n-1}{n}} (r^{\frac{1}{n}} - 1)^3}.$$

$$\Sigma \frac{m(n-m)}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} = n \Sigma \frac{m}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} - \Sigma \frac{m^2}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}.$$

Jetzt ist

$$\Sigma \frac{m}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \ldots + \frac{n-1}{q^{n-1}}$$

und der Wert der rechten Seite folgt aus der Reihe Y in No. 111, wenn man n durch $n-1$, k durch $\frac{1}{q}$ ersetzt und alsdann mit q dividirt; daher ist

$$\Sigma \frac{m}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} = \frac{q^n - nq + n - 1}{(q-1)^2 q^{n-1}}.$$

So gelangt man schliefslich zu

$$\Sigma \frac{m(n-m)}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} = \frac{(n-1)q^{n+1} - (n+1)q^n + (n+1)q - n + 1}{(q-1)^3 q^{n-1}},$$

und folglich ist:

$$G = \frac{(n-1)r^{\frac{n+1}{n}} - (n+1)r + (n+1)r^{\frac{1}{n}} - n + 1}{n^3 r^{\frac{n-1}{n}} (r^{\frac{1}{n}} - 1)^3}.$$

Die Constanten der Formel (355) für die Verbindungsrente in n Raten sind nunmehr sämmtlich in endlicher Form ausgedrückt.

Substituirt man

$$r^{\frac{1}{n}} = (1+i)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{j_n}{n} \text{ (Formel 13).}$$

und $r = 1+i$, so können wir sie schreiben:

$$E = \frac{1 + \frac{j_n}{n}}{1+i} \cdot \frac{(1+i)(1-j_n)^2 + i - 1 + \frac{ij_n}{n}}{{j_n}^2},$$

$$F = \frac{1 + \frac{j_n}{n}}{1+i} \cdot \frac{1 + 2i - (1+j_n)^2 + \frac{ij_n}{n}}{{j_n}^3},$$

$$G = \frac{1 + \frac{j_n}{n}}{1+i} \cdot \frac{(2+i)j_n - 2i - \frac{ij_n}{n}}{{j_n}^3}.$$

Um den Wert der continuirlichen Verbindungsrente zu bestimmen, haben wir für E, F, G die Grenzen zu nehmen, denen sie sich nähern für $n = \infty$. Unter Berücksichtigung, daſs Lim $j_n = L(1+i)$ ist, findet man:

$$\text{Lim } E = \frac{(1+i)\,[1 - L(1+i)]^2 + i - 1}{(1+i)\,[L(1+i)]^3},$$

$$\text{Lim } F = \frac{1 + 2i - [1 + L(1+i)]^2}{(1+i)\,[L(1+i)]^3},$$

$$\text{Lim } G = \frac{(2+i)\,L(1+i) - 2i}{(1+i)\,[L(1+i)]^3}.$$

Man könnte jetzt E, F und G und ebenso ihre Grenzwerte nach Potenzen von i entwickeln. Dies würde keinen analytischen Schwierigkeiten begegnen. Wir wollen aber lieber die roheste Annäherung bei der Annahme des gleichmäſsigen Ablebens während eines Jahres angeben. Dazu haben wir in der Entwicklung der Formel (355) selbst die erste Potenz von i zu vernachlässigen, sodaſs in den Ausdrücken für E, F und G

$$(1+i)^{\frac{m}{n}} = 1 \text{ ist.}$$

Alsdann wird E:

$$\frac{1}{n^3}\,\Sigma\,(n-m)^2 = \frac{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 2^2 + 1}{n^3} =$$

$$= \frac{(n+1)\,(2n+1)}{6n^2}.$$

F wird:

$$\frac{1}{n^3}\,\Sigma\,m^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} =$$

$$= \frac{(n-1)\,(2n-1)}{6n^2}.$$

G wird:

$$\frac{1}{n^3}\,\Sigma\,m\,(n-m) = \frac{1}{n^2}\,\Sigma\,m - \frac{1}{n^3}\,\Sigma\,m^2 =$$

$$= \frac{n-1}{2n} - \frac{(n-1)\,(2n-1)}{6n^2} = \frac{(n+1)\,(n-1)}{6n^2},$$

und Formel (355) geht über in:

$$a_{xy}^{(n)} = \frac{2n^2+1}{3n^2} a_{xy} + \\ + \frac{(n+1)(n-1)}{6n^2} \left(\frac{l_{y+1}}{l_y} a_{x.y+1} + \frac{l_{x+1}}{l_x} a_{x+1.y} \right) - \\ - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \qquad (356)$$

Die continuirliche Verbindungsrente wird dann:

$$\bar{a}_{xy} = \tfrac{2}{3} a_{xy} + \tfrac{1}{6} \left(\frac{l_{y+1}}{l_y} a_{x.y+1} + \frac{l_{x+1}}{l_x} a_{x+1.y} \right) - \tfrac{2}{3}. \qquad (357)$$

220. Formel (355) hat den Nachteil, dafs man zur Berechnung von $a_{xy}^{(n)}$ aufser a_{xy} auch $a_{x+1.y}$ und $a_{x.y+1}$ braucht. Dies kann man aber in folgender Weise umgehen.

Formel (354) läfst sich schreiben:

$$\frac{n-m}{n} l_{x+t} l_{y+t} + \frac{m}{n} l_{x+t+1} l_{y+t+1} - \\ - \frac{m(n-m)}{n^2} (l_{x+t} - l_{x+t+1}) (l_{y+t} - l_{y+t+1}).$$

Setzen wir

$$l_{x+t} - l_{x+t+1} = d_{x+t},$$
$$l_{y+t} - l_{y+t+1} = d_{y+t},$$

wo nun d_{x+t} und d_{y+t} die Anzahl der Todesfälle darstellen, welche im Laufe eines Jahres die l_{x+t} bezw. l_{y+t} Personen betreffen, dann kann man (354) schreiben:

$$\frac{n-m}{n} l_{x+t} l_{y+t} + \frac{m}{n} l_{x+t+1} l_{y+t+1} - \\ - \frac{m(n-m)}{n^2} d_{x+t} d_{y+t}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \frac{1}{(1+i)^m},$$

nimmt nach einander $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ addirt und dividirt mit $l_x\, l_y$, so erhält man den Wert der Verbindungsrente zum Betrage von $\frac{1}{n}$,

jedesmal $\frac{m}{n}$ Jahr nach dem Anfang des Jahres zahlbar, und zwar ist derselbe:

$$\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}\left\{\frac{n-m}{n^2}\,a_{xy}+\frac{m}{n^2}(1+i)(a_{xy}-1)-\right.$$
$$\left.-\frac{m(n-m)}{n^3}\cdot\frac{1}{l_x l_y}\sum_{t=0}\frac{d_{x+t}\,d_{y+t}}{(1+i)^t}\right\},$$

wo die durch Σ angedeutete Summirung über alle ganzen Werte für t, von 0 bis zum Ende der Sterblichkeitstafel auszudehnen ist.

Der Wert von

$$\frac{1}{l_x l_y}\sum_{t=0}\frac{d_{x+t}\,d_{y+t}}{(1+i)^t},$$

welchen wir mit Q_{xy} bezeichnen wollen, ist nun gesondert zu berechnen. Es geschieht dies ganz ebenso wie die Berechnung von a_{xy}. Die Bedeutung von Q_{xy} ist leicht zu erkennen. Es stellt diese Gröfse die einmalige Prämie für die Versicherung der Einheit dar, die ausgezahlt wird, wenn die beiden Personen in demselben Jahre sterben, und zwar am Anfang dieses Jahres. Führen wir oben Q_{xy} ein, so erhält man:

$$\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}\left\{\left(\frac{n-m}{n^2}+(1+i)\frac{m}{n^2}\right)a_{xy}-(1+i)\frac{m}{n^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{m(n-m)}{n^3}Q_{xy}\right\}.$$

Wenn man hier nach einander $m = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ nimmt und addirt, ergiebt sich als Wert der jährlich praenumerando in n Raten zahlbaren Leibrente vom Betrage 1 per Jahr:

$$a_{xy}^{(n)}=\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{n-m}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}+(1+i)\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{m}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}\right\}a_{xy}-$$
$$-(1+i)\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{m}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}-\frac{1}{n^3}\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{m(n-m)}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}\cdot Q_{xy}, \quad (358)$$

was wir schreiben:

$$a_{xy}^{(n)}=[H+(1+i)K]\,a_{xy}-(1+i)K-G\cdot Q_{xy}.$$

Der Koeffizient von Q_{xy} ist mit G bezeichnet, weil er dem G in No. 219 gleich ist.

Nun ist (vergl. No. 219):

$$H = \frac{1}{n^2}\left[n\,\Sigma\,\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} - \Sigma\,\frac{m}{(1+i)^{\frac{m}{n}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\left[n\cdot\frac{q^n-1}{(q-1)\,q^{n-1}} - \frac{q^n - n\,q + n - 1}{(q-1)^2\,q^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{n\,q^{n+1} - (n+1)\,q^n + 1}{n^2\,(q-1)^2\,q^{n-1}} = \frac{n\,r^{\frac{n+1}{n}} - (n+1)\,r + 1}{n^2\,r^{\frac{n-1}{n}}\,(r^{\frac{1}{n}}-1)^2},$$

$$K = \frac{1}{n^2}\,\Sigma\,\frac{m}{(1+i)^{\frac{m}{n}}} = \frac{q^n - n\,q + n - 1}{n^2\,(q-1)^2\,q^{n-1}} = \frac{r - n\,r^{\frac{1}{n}} + n - 1}{n^2\,(r^{\frac{1}{n}}-1)^2\,r^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$H + (1+i)\,K = H + r\,K = \frac{(r-1)^2}{n^2\,(r^{\frac{1}{n}}-1)^2\,r^{\frac{n-1}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{n^2\,(1+i)^{\frac{n-1}{n}}}\cdot\left(\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{n}}-1}\right)^2 = C;$$

es ist dies dasselbe C wie in No. 210.

Weiter ist

$$(1+i)\,K = r\,K = r^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{r - n\,r^{\frac{1}{n}} + n - 1}{n^2\,(r^{\frac{1}{n}}-1)^2} =$$

$$= \frac{(1+i)^{\frac{1}{n}}}{n^2\,[(1+i)^{\frac{1}{n}}-1]^2}\,[i - n\,(1+i)^{\frac{1}{n}} + n] = D,$$

d. h. gleich dem D in No. 210.

Man findet demnach für die Verbindungsrente in n Raten den Wert:

$$a^{(n)}_{x\,y} = C\cdot a_{x\,y} - G\cdot Q_{x\,y} - D. \qquad (359)$$

Setzt man für C, G und D die Grenzwerte, denen sich diese Größen mit zunehmendem n nähern, so folgt als Wert der continuirlichen Verbindungsrente:

$$\bar{a}_{x\,y} = \frac{i^2}{(1+i)\,[L\,(1+i)]^2}\,a_{x\,y} -$$

$$- \frac{(2+i)\,L\,(1+i) - 2\,i}{(1+i)\,[L\,(1+i)]^3}\,Q_{x\,y} - \frac{i - L\,(1+i)}{[L\,(1+i)]^2}. \qquad (360)$$

Wenn man die Zahlen C, G und D nach den Potenzen von i entwickelt, und selbst die erste Potenz vernachlässigt, bekommt man die Annäherungen:

$$\mathfrak{a}^{(n)}_{xy} = \mathfrak{a}_{xy} - \frac{(n+1)(n-1)}{6n^2} Q_{xy} - \frac{n-1}{2n}, \tag{361}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}_{xy} = \mathfrak{a}_{xy} - \tfrac{1}{6} Q_{xy} - \tfrac{1}{2}. \tag{362}$$

Die Art der Ableitung zeigt, daſs Formel (359) = (355) und ebenso die Formeln (361) = (356) und (362) = (357) sind.

Die Formeln (361) und (362) sind von demselben Grade der Genauigkeit für zwei Leben als (320) und (322) für ein Leben. Sie rechnen gut mit dem gleichmäſsigen Ableben, nicht mit dem Zins.

Zur Berechnung der vollständigen Verbindungsrente in n Raten muſs die einmalige Prämie für die unvollständige Rente in n Raten vermehrt werden um die einmalige Prämie für $\frac{1}{2n}$ mal den Rentenbetrag beim ersten Ableben.

Leibrente in Raten für eine Person, aus der Verbindungsrente in Raten abgeleitet.

221. Nimmt man in den Formeln für die Verbindungsrente

$$l_y = l_{y+1} = l_{y+2} = \text{u. s. w.},$$

d. h. macht man die Rente nur abhängig von dem Leben des x-jährigen, dann geht die Verbindungsrente über in die Leibrente für e i n e Person; es ist

$$d_y = l_y - l_{y+1} = 0,$$
$$d_{y+1} = 0 \text{ u. s. w.},$$

und demnach auch $Q_{xy} = 0$, während $\mathfrak{a}_{xy}$ übergeht in $\mathfrak{a}_x$.

Formel (359) geht daher über in

$$\mathfrak{a}^{(n)}_x = C \cdot \mathfrak{a}_x - D,$$

d. h. in Formel (332).

Dieselbe Formel folgt auch aus (355); wenn man darin

$$l_y = l_{y+1} = l_{y+2} = \text{u. s. w.}$$

setzt, denn diese wird dadurch:

$$a_x^{(n)} = [E + (1+i)F]\, a_x + G \cdot a_x + \frac{l_{x+1}}{l_x} G \cdot a_{x+1} - (1+i)F,$$

oder, da

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} a_{x+1} = (1+i)\,(a_x - 1) \text{ ist,}$$

$$a_x^{(n)} = [E + (1+i)F + (2+i)G]\, a_x - (1+i)\,(F+G),$$

worin, wie sich leicht ergiebt,

$$E + (1+i)F + (2+i)G = C, \text{ und } (1+i)\,(F+G) = D \text{ ist.}$$

Witwenpension in Raten.

222. Die einmalige Prämie für eine Witwenpension ist $a_x - a_{xy}$ wenn die erste Auszahlung am Anfang desjenigen Jahres stattfindet, welches dem Sterbejahre des Versorgers folgt, oder was durchschnittlich auf dasselbe hinauskommt, ein halbes Jahr nach dem Sterbetage des Versorgers.

Ebenso ist $a_y^{(n)} - a_{xy}^{(n)}$ die einmalige Prämie für die Witwenpension in n Raten, deren erste Auszahlung, zum Betrage von $\frac{1}{n}$, am Anfang des ersten Jahresteiles $\frac{1}{n}$ stattfindet, der dem Jahresteile $\frac{1}{n}$ folgt, in welchem der Versorger gestorben ist, was etwa der ersten Auszahlung $\frac{1}{2n}$ Jahr nach dem Sterbetage des Versorgers gleichkommt. Bei einer Witwenpension, die halbjährlich zahlbar ist, würde hiernach die erste Auszahlung drei Monate nach dem Tode des Versorgers stattfinden.

Nun sind die Correctionen, die man bei der Leibrente und der Verbindungsrente anwenden mufs, um zu der Ratenzahlung der Rente zu gelangen, nicht gleich, selbst dann nicht, wenn man bei der Leibrente ein gleichmäfsiges Ableben, bei der Verbindungsrente eine gleichmäfsige Auflösung der Paare im Laufe des Jahres voraussetzt. Letztere Annahme widerspricht zwar ersterer, sie macht aber die Correctionen für die Witwenpension so klein wie möglich; man erhält nämlich alsdann für die Witwenpension in n Raten $C \cdot (a_y - a_{xy})$, also einen Ausdruck, der nur dann der jährlichen Witwenpension entspricht, wenn man $C = 1$ nimmt, d. h. die zweiten und höheren Potenzen von i vernachlässigt.

Man erhält in rohester Annäherung mittels der Formeln (320) und (361), für die Witwenpension in jährlich n Raten:

$$\mathfrak{a}^{(n)}_{x|y} = \mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{xy} + \frac{(n+1)(n-1)}{6n^2} Q_{xy}. \qquad (363)$$

Die Correctionszahl $\frac{(n+1)(n-1)}{6n^2} Q_{xy}$ (für eine continuirliche Witwenpension $\frac{1}{6} Q_{xy}$), welche von den Todesfällen des Versorgers und der Versorgten innerhalb desselben Jahres abhängt und im Allgemeinen gröfser oder kleiner ist, je nachdem x und y beide gröfser oder kleiner sind, ist im Allgemeinen klein gegen den Wert der Witwenpension selbst.

223. Wir werden jetzt noch auf eine andere Weise nachweisen, welchen Fehler man macht, wenn man

$$\mathfrak{a}^{(n)}_y - \mathfrak{a}^{(n)}_{xy} = \mathfrak{a}_x - \mathfrak{a}_{xy}$$

setzt und also die Correction von $\mathfrak{a}_y$ und $\mathfrak{a}_{xy}$ für die Zahlung in Raten gleich grofs nimmt.

Wir setzen hierbei voraus, dafs $\mathfrak{a} - \frac{n-1}{2n}$ die Leibrente auf eine Person in n Raten per Jahr genau genug angiebt.

Die Formel (240) für den Wert der Witwenpension läfst sich schreiben:

$$\mathfrak{a}_{xy} = \frac{1}{l_x D_y} \sum_{t=1} (d_{x+t-1} D_{y+t} \cdot \mathfrak{a}_{y+t}), \qquad (364)$$

wo die Summirung sich erstreckt über alle ganzen Werte von t, von $t = 1$ angefangen.

Ohne Benutzung des Summationszeichens hat der Ausdruck die Form:

$$\frac{1}{l_x D_y} (d_x D_{y+1} \mathfrak{a}_{y+1} + d_{x+1} D_{y+2} \mathfrak{a}_{y+2} + d_{x+2} D_{y+3} \mathfrak{a}_{y+3} + \ldots) = \mathfrak{a}_{xy}. \qquad (365)$$

Soll nun die Witwenpension alljährlich in n Raten gezahlt werden, so hat man jedes $\mathfrak{a}$ zu ersetzen durch $\mathfrak{a} - \frac{n-1}{2n}$. Das $\mathfrak{a}_{xy}$ von Formel (365) vermindert sich dadurch um

$$\frac{n-1}{2n} \cdot \frac{1}{l_x D_y} (d_x D_{y+1} + d_{x+1} D_{y+2} + d_{x+2} D_{y+3} + \ldots), \qquad (366)$$

wobei aber vorausgesetzt wird, dafs die erste Auszahlung zum Betrage von $\frac{1}{n}$ stattfindet am Anfange des Jahres nach dem Sterbejahre des Ehemannes.

Setzt man

$$\frac{1}{l_x D_y}(d_x D_{y+1} + d_{x+1} D_{y+2} + d_{x+2} D_{y+3} + \ldots) = T_{xy}, \qquad (366^*)$$

was nichts anderes ist als der Barwert der Einheit, welche ausgezahlt wird am Ende des Sterbejahres des Mannes, wenn die Frau dann noch am Leben ist, so bekommt man:

$$a_{xy} - \frac{n-1}{2n} T_{xy}. \qquad (367)$$

Zur Vereinfachung werden wir uns jetzt auf die Zahlung in halbjährlichen Raten beschränken und also $n = 2$ setzen.

Bei Anwendung der Formel

$$a_{x|y} - \tfrac{1}{4} T_{xy} \qquad (368)$$

wird keine Rücksicht darauf genommen, dafs die Witwenpension vom Betrage $\frac{1}{2}$ schon an die Witwen gezahlt werden soll, deren Ehemänner in der ersten Hälfte eines Jahres gestorben sind. Nehmen wir also an, dafs die Hälfte der Witwen noch eine Zahlung vom Betrage $\frac{1}{2}$ mehr empfängt, als Formel (368) voraussetzt, so giebt dies für jede Witwe durchschnittlich $\frac{1}{4}$ mehr, als $a - \frac{1}{4}$ voraussetzt, und es zeigt sich, dafs die Correction, welcher die Formel (365) — oder was dasselbe ist $a_y - a_{xy}$ — unterzogen werden mufs, sich auf null reducirt. Die Formel für die Witwenpension in halbjährlichen Raten wird einfach

$$a_y - a_{xy},$$

dieselbe also wie für die einmalige Zahlung per Jahr.

Diese Ableitung setzt voraus, dafs in der ersten Hälfte des Jahres ebenso viele Witwen in den Genufs der Pension treten wie in der zweiten Hälfte. Wie wir schon gesehen haben, ist diese Voraussetzung nicht zutreffend. Es giebt Witwen, welche im Laufe des Jahres eine erste Auszahlung erhalten und in der zweiten Hälfte des Jahres sterben.

Ist nun während eines Jahres die Zahl der Paare, von denen Mann und Frau beide in diesem Jahre sterben, β, so kann man annehmen, dafs während dieses Jahres $\frac{1}{2}\beta$ dieser Männer vor ihrer Frau sterben. Von diesen $\frac{1}{2}\beta$ Männern waren $\frac{1}{4}\beta$ schon in der ersten Hälfte des Jahres vor ihrer Frau gestorben; es giebt also $\frac{1}{4}\beta$ Frauen, welche nur eine Auszahlung von $\frac{1}{2}$ empfangen und dann sterben; durchschnittlich empfängt

also jede Witwe, welche in demselben Jahre wie ihr Mann stirbt, den Betrag $\frac{1}{8}$ an Pension.

Ist nun U_{xy} der Wert der Einheit, welche ausgezahlt werden mufs. wenn Mann und Frau in demselben Jahre sterben, und zwar in der Mitte des Sterbejahres, so ist der Wert der Witwenpension in halbjährlichen Raten

$$a^{(2)}_{x|y} = a_y - a_{xy} + \tfrac{1}{8} U_{xy}. \qquad (369)$$

Die erste Auszahlung kann nun stattfinden ein Vierteljahr nach dem Tode des Mannes.

Setzt man in Formel (363) $n = 2$, so wird sie:

$$a^{(2)}_{x|y} = a_y - a_{xy} + \tfrac{1}{8} Q_{xy}, \qquad (370)$$

der geringe Unterschied zwischen den Formeln (369) und (370) ist auffallend. Q_{xy} setzt die Auszahlung (wenn Mann und Frau in demselben Jahre sterben) am Anfang, U_{xy} in der Mitte des Sterbejahres voraus.

Man erhält Q_{xy}, wenn man die Formel (366*) mit $1 + i$, und U_{xy}, wenn man ihn mit $1 + \frac{1}{2} i$ multiplicirt.

In gleicher Weise als wie wir in No. 133 den Wert der vollständigen jährlich zahlbaren Witwenpension abgeleitet haben, findet man, unter Anwendung der No. 217 als Wert der vollständigen Witwenpension, zahlbar in alljährlich n Raten zum ersten Mal $\frac{1}{n}$ Jahr nach dem Tode des Mannes, näherungsweise:

$$\left(1 - \frac{1}{2n} i\right) a_{xy}.$$

Und hieraus folgt, dafs die continuirliche Witwenpension näherungsweise den Wert

$$a_y - a_{xy}$$

hat, was darauf hinauskommt, dafs die Correctionszahl $\frac{1}{8} Q_{xy}$ (siehe No. 222) gleich null gesetzt ist.

Beim Überlebenskapital ist es viel ungenauer als bei Überlebensrente, den Fall unberücksichtigt zu lassen, dafs Mann und Frau in demselben Jahre sterben, denn der Wert des Überlebenskapitals ist kleiner, in den meisten Fällen viel kleiner als die Einheit; im Fall der Witwenpension aber ist der Einflufs gewöhnlich viel geringer, weil der Wert der Überlebensrente in den meisten Fällen ein Mehrfaches der Einheit beträgt.

Prämien in Raten.

224. Um die jährliche in n Raten fortlaufend oder temporär zahlbare Prämie für jede beliebige Versicherungsweise zu bestimmen, hat

man nur die einmalige Prämie mit dem Wert der entsprechenden, praenumerando jeden n^{ten} Teil des Jahres zahlbaren Leibrente vom Betrage der Einheit zu dividiren.

Die allgemeine Formel für eine solche Prämie per $\frac{1}{n}$ Jahr ist demnach $\frac{1}{n} \cdot \frac{A}{a^{(n)}}$, wenn A die einmalige Prämie ist.

Ein paar Beispiele werden zur Verdeutlichung genügen.

Handelt es sich um eine lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall, so kann man nehmen:

$$a_x^{(n)} = a_x - \frac{n-1}{2n};$$

da hier $A = A_x$, so ist die Prämie jeden n^{ten} Teil des Jahres:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{A_x}{a_x - \frac{n-1}{2n}}. \qquad (371)$$

Will man die Formel in den Grundzahlen ausdrücken, so setze man:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \text{ und } a_x^{(n)} = \frac{N_{x-1}}{D_x} - \frac{n-1}{2n},$$

dann ergiebt sich die jeden n^{ten} Jahresteil zahlbare Prämie gleich

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{M_x}{N_{x-1} - \frac{n-1}{2n} D_x}, \qquad (372)$$

sodafs beispielsweise die halbjährliche Prämie $\frac{M_x}{2N_{x-1} - \frac{1}{2}D_x}$, die vierteljährliche $\frac{M_x}{4N_{x-1} - \frac{3}{2}D_x}$ ist.

225. Bei einer aufgeschobenen ratenweisen Leibrente, für welche die Prämie in denselben Raten gezahlt werden soll, hat man, wenn die Anzahl der Raten n ist und die Dauer des Aufschubs m Jahre beträgt, die Rente also erstmalig m Jahre nach dem Abschlufs der Versicherung ausgezahlt wird, näherungsweise:

$${}_m|a_x^{(n)} = \frac{N_{x+m-1}}{D_x} - \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x}, \qquad (373)$$

denn die nach m Jahren im Erlebensfalle auszuzahlende Einheit hat

den gegenwärtigen Wert $\frac{D_{x+m}}{D_x}$ und die Leibrente in n Raten für den $x+m$-jährigen den Wert:

$$\frac{N_{x+m-1}}{D_{x+m}} - \frac{n-1}{2n}.$$

Um die jeden n^{ten} Jahresteil während der m Jahre zahlbare Prämie zu bestimmen, mufs man nach Formel (352) ${}_m|a_x^{(n)}$ dividiren mit

$$n \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+m-1}}{D_x} - \frac{n-1}{2}\left(1 - \frac{D_{x+m}}{D_x}\right),$$

sodafs sich als die, jeden n^{ten} Jahresteil zu zahlende Prämie für die Pension 1 per Jahr in n Raten ergiebt:

$$\frac{N_{x+m-1} - \frac{n-1}{2n} D_{x+m}}{n(N_{x-1} - N_{x+m-1}) - \frac{n-1}{2}(D_x - D_{x+m})}. \qquad (374)$$

Will man z. B. die wöchentliche Prämie für eine Pension von 1 M. per Woche, nach m Jahren anfangend, berechnen, d. h. also eine Pension von 52 M. per Jahr, zahlbar in 52 Raten, für die auch die Prämie in 52 Raten per Jahr gezahlt wird, so kann man angenähert

$$\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

setzen, und es wird die gesuchte Prämie in Pfennigen annähernd genau

$$100 \cdot \frac{N_{x+m-1} - \frac{1}{2} D_{x+m}}{N_{x-1} - N_{x+m-1} - \frac{1}{2}(D_x - D_{x+m})}.$$

226. Wir haben die Prämie in Raten aus der einmaligen Prämie abgeleitet, man kann sie aber auch aus der Jahresprämie gewinnen.

Ist nämlich die Jahresprämie P, dann ist $A = P \cdot a$, und man hat für die jeden n^{ten} Jahresteil zu zahlende Prämie:

$$\frac{P a}{n \cdot a^{(n)}} = P \cdot \frac{a}{n \cdot a^{(n)}},$$

wo dann die a die gleiche Dauer haben wie die Jahresprämie P.

227. Man kann aber die Prämien in Raten unmittelbar aus den Jahresprämien ableiten, ohne sich der Leibrente in Raten zu bedienen.

Nach dieser Methode beachte man, dafs bei Ratenzahlungen der Gesellschaft zweierlei Ersatz gebührt: 1. für den Zinsverlust, welchen sie jedes Jahr erleiden würde, wenn man die Jahresprämie einfach divi-

dirte mit der Anzahl Raten per Jahr; 2. für den Prämienverlust, welchen sie erleiden würde, indem es Versicherte giebt, die in ihrem Sterbejahre noch keine volle Jahresprämie eingezahlt haben.

Es ist leicht zu ersehen, dafs bei Zahlung in jährlich n Raten, die Versicherte in ihrem Sterbejahre durchschnittlich für nahezu $\frac{n-1}{2n}$ Jahr zu wenig zahlen.

Gilt es eine lebenslängliche gleichbleibende Prämie, so kann der Versicherte das während des Sterbejahres zu wenig Eingezahlte vergüten, indem er jährlich einen Zuschlag zahlt für den Teil seiner Jahresprämie, der in seinem Sterbejahre wegen der Ratenzahlung verloren gehen könnte.

Für jede Einheit an Jahresprämie hat der Versicherte $\frac{n-1}{2n} \cdot P$ mehr zu zahlen, wenn P die Jahresprämie ist für die Einheit im Ablebensfall.

Wegen dieser Ursache hat man für die Ratenzahlung die Jahresprämie also zu multipliciren mit $1 + \frac{n-1}{2n} P$.

Aber wegen des Zinses soll die zu leistende Jahresprämie mit $1 + \frac{n-1}{2n} i$ multiplicirt werden.

Um also die jährlich zu leistende Jahresprämie in n Raten zahlen zu lassen, u. z. derart, dafs nach dem Tode keine Nachzahlung von Prämienraten stattzufinden hat, mufs man die Jahresprämie mit

$$\left(1 + \frac{n-1}{2n} P\right)\left(1 + \frac{n-1}{2n} i\right)$$

multipliciren und mit n dividiren.

Man macht nur einen sehr geringen Fehler, wenn man das Ergebnis dieser beiden Factoren ersetzt durch

$$1 + \frac{n-1}{2n}(P + i). \qquad (375)$$

Gilt es, wie bei einer gemischten Versicherung, eine temporäre Prämie, welche auf eine Prämie in n Raten per Jahr reducirt werden soll, so bleibt die Formel unverändert, aber P stellt dann die temporäre Prämie für die temporäre Versicherung auf den Todesfall für dieselbe Anzahl Jahre vor.

Auch auf Versicherung auf das Leben mehrerer Personen ist die Formel anwendbar. Soll man z. B. die Jahresprämie für eine Witwen-

pension reduciren auf eine Prämie in n Raten, so stellt P die Jahresprämie für die Einheit, welche zahlbar ist beim ersten Ableben, vor.

Bei einer sehr grofsen Anzahl Raten gestaltet sich die Formel (375):

$$1 + \tfrac{1}{2}(P + i).$$

228. Bei einigen Gesellschaften ist es Regel, dafs die Versicherten auch bei Ratenzahlung während ihres Sterbejahres die Prämie für das ganze Jahr erlegen müssen. In diesem Falle gelangt man zu der Prämie in Raten einfach durch Erhöhung der Jahresprämie für den Verlust an Zins, wozu sich die Berechnung von No. 29 verwenden läfst. Man kann natürlich jene Bedingung nur dann den Versicherten auferlegen, wenn nach dem Tode eine Auszahlung erfolgt, denn dann hat man es in der Hand, die Forderung an Prämie auf die Auszahlungssumme zu verrechnen. Das kann man aber nicht, wenn, wie bei Versicherung auf den Erlebensfall, dem Ableben keine Auszahlung folgt. Es ist also bisweilen notwendig, Prämien in Raten zu berechnen, die mit dem Tode aufhören; darum braucht man aber noch nicht gleich Netto-Prämien in Raten, vielmehr könnte man die Raten-Prämie auch direct aus den Brutto-Jahresprämien ableiten und dazu die Rechnungsweise in No. 226 und 227 auf die Brutto-Prämien P anwenden.

Indessen giebt es viele Gesellschaften, die sich weniger Umstände machen, indem sie statt besondere Tarife für terminweise Zahlungen aufzustellen, zur Berechnung der verschiedenen terminweisen Zahlungen die Jahresprämien um feste Procentsätze erhöhen, Procentsätze, die im Allgemeinen grofs genug gewählt sind, um zugleich den Verlust an Prämie und Zins zu decken; man erhöht z. B. die Jahresprämie um $1\frac{1}{2}\,\%$ bei halbjährlicher, um $2\,\%$ bei vierteljährlicher, um $3\,\%$ bei monatlicher Zahlung.

229. Bei der Leibrente verfährt man wohl auch so, dafs man den Wert der praenumerando zahlbaren als Netto-Einlage annimmt, während die Rente vierteljährlich und postnumerando ausgezahlt wird; die einmalige Netto-Prämie enthält dann schon einen teilweisen Zuschlag in Anbetracht der Auszahlungsweise und mufs noch weiter erhöht werden. Es giebt auch Gesellschaften, welche den Versicherten die Wahl lassen, in wie viel Terminen sie ihre Rente ausgezahlt haben wollen. Dies ist freilich eine sehr grofse Freigebigkeit.

230. Bei der Witwenpension nimmt man meistens keine besondere Rücksicht auf die Ratenzahlung derselben. Man kann hierbei bestimmen, dafs die erste Zahlung der Pension immer ein halbes Jahr nach dem Tode des Versorgers erfolgen soll. Wird eine vierteljährliche

Prämienzahlung gewünscht, so kann man den Verlust an Zins einfach durch Erhöhung der Jahresprämie ausgleichen und den Verlust an Prämie aufser Betracht lassen; dann wird man auch die Pension vierteljährlich zahlen können, und zwar zum ersten Male ein halbes Jahr nach dem Tode des Versorgers. Die Gesellschaft erhält dabei an Prämie etwas zu wenig, spart aber auch etwas an Pension. Soll die Zahlung der Pension bei vierteljährlichen Raten zum ersten Male drei Monate nach dem Tode des Mannes stattfinden, dann mufs die Jahresprämie, wenn diese auch in vier Terminen gezahlt wird, nicht nur wegen des Verlustes an Zins der Prämie erhöht, sondern auch aufserdem mit $1 + \frac{1}{4} i$ multiplicirt werden.

Die strenge Formel für die Netto-Prämie per Vierteljahr wäre:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{a_y^{(4)}}{a_{x\,y}^{(4)}} - 1\right], \tag{376}$$

diese würde dann auch voraussetzen, dafs die erste vierteljährliche Pension ein halbes Vierteljahr nach dem Tode des Mannes ausgezahlt würde.

Zwar mufs der Mathematiker im Stande sein, kleine Einflüsse zu schätzen und eine Untersuchung über ihre Gröfse anzustellen, auch kann in einzelnen Fällen eine besondere Rechnung nötig sein, man braucht aber darum nicht für die Zahlungen in allerlei Terminen ganze ausführliche Tarife aufzustellen, wo einige Proben genügen, die Ziffern für die erforderliche Erhöhung so allgemein wie möglich zu bestimmen.

231. Wir wollen noch eine Weise der Prämienzahlung behandeln. Es kommt zuweilen vor, dafs jemand die Prämien wöchentlich, aber immer ein halbes Jahr hindurch überhaupt keine zahlen will. Sei dann die Jahresprämie P, so ist die wöchentliche Prämie während eines halben Jahres nach der Methode von No. 205:

$$P \cdot \frac{a_x}{26\,a_x - \frac{25}{4}} = P \cdot \frac{N_{x-1}}{26\,N_{x-1} - \frac{25}{4} D_x}, \tag{377}$$

wenn von einer lebenslänglichen Versicherung die Rede ist. Die wöchentlich praenumerando zahlbare Rente in der Höhe der Einheit, jedes Jahr während des ersten Semesters zu leisten, hat nämlich zum Näherungswert:

$$a_x + (a_x - \tfrac{1}{52}) + (a_x - \tfrac{2}{52}) + (a_x - \tfrac{3}{52}) + \ldots + (a_x - \tfrac{25}{52}) = 26\,a_x - \tfrac{25}{4}.$$

Handelt es sich aber um eine gemischte Versicherung von m-jähriger Dauer, dann wird die Formel:

$$P \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+m-1}}{26\,(N_{x-1} - N_{x+m-1}) - \frac{25}{4}(D_x - D_{x+m})}. \tag{378}$$

Soll der Versicherte nach je drei Monaten auf dieselbe Zeit seiner wöchentlichen Prämienzahlung enthoben sein, so beträgt diese bei lebenslänglicher Versicherung:

$$P \cdot \frac{N_{x-1}}{26\,N_{x-1} - \frac{19}{2}\,D_x}, \tag{379}$$

bei gemischter Versicherung:

$$P \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+m-1}}{26\,(N_{x-1} - N_{x+m-1}) - \frac{19}{2}\,(D_x - D_{x+m})}. \tag{380}$$

Die Leibrente wöchentlich praenumerando zahlbar in der Höhe der Einheit, jedesmal während eines Vierteljahres zu leisten, um dann wieder während eines Vierteljahres einzustellen, hat nämlich zum Wert:

$$a_x + (a_x - \tfrac{1}{52}) + (a_x - \tfrac{2}{52}) + \ldots + (a_x - \tfrac{12}{52}) + (a_x - \tfrac{26}{52}) + (a_x - \tfrac{27}{52}) + \\ + (a_x - \tfrac{28}{52}) + \ldots + (a_x - \tfrac{38}{52}) = 26\,a_x - \tfrac{19}{2}.$$

Unter P darf man hier in der Regel nicht die Brutto-Jahresprämie verstehen, weil der Zuschlag bei der wöchentlichen Prämie gewöhnlich anders (höher) ist als bei der Jahresprämie. P mufs vielmehr als die Netto-Jahresprämie gelten und es mufs nachher die wöchentliche Prämie um den Zuschlag erhöht werden, der bei Zahlung einer wöchentlichen Prämie gebräuchlich ist.

Ist indessen w die gewöhnliche fortdauernd zu zahlende wöchentliche Brutto-Prämie, so kann man bei lebenslänglicher Versicherung auch nehmen:

$$P = \frac{52\,a_x - \frac{51}{2}}{a_x} \cdot w = \left(52 - \tfrac{51}{2} \cdot \frac{1}{a_x}\right) \cdot w;$$

und bei gemischter Versicherung:

$$P = \frac{52\,(N_{x-1} - N_{x+m-1}) - \frac{51}{2}\,(D_x - D_{x+m})}{N_{x-1} - N_{x+m-1}} \cdot w.$$

Bei Anwendung dieser P in den Formeln (377) bis (380) brauchen die wöchentlichen Prämien bei halbjährlichem oder vierteljährlichem Erlafs nicht erhöht zu werden.

Bei der lebenslänglichen oder bei gemischter Versicherung mit nicht allzu kurzer Dauer wird sich diese Art wöchentlicher Prämien meist wenig von dem Doppelten der wöchentlichen Prämien bei fortwährender Zahlung unterscheiden, besonders wenn es sich um geringe Beträge handelt, wie solche bei der wöchentlichen Prämienzahlung die Regel bilden.

Leibrenten und Prämien während einer gemischten Anzahl von Jahren.

232. Dieser Fall kommt oft vor bei den Gesellschaften, die bei Versicherung auf den Erlebensfall und bei gemischter Versicherung die Auszahlung auf einen bestimmten Geburtstag des Versicherten festsetzen.

Sei die Dauer der Versicherung $n + \frac{r}{s}$ Jahr, die einmalige Prämie bei einer Dauer von n Jahren sei ${}_nA$, bei einer Dauer von $n+1$ Jahren ${}_{n+1}A$, dann erhält man mit genügender Annäherung die einmalige Prämie bei der Dauer von $n + \frac{r}{s}$ Jahr durch einfache Interpolation, indem man sie setzt:

$$= \frac{1}{s}[(s-r) \cdot {}_nA + r \cdot {}_{n+1}A]. \qquad (381)$$

Die Jahresprämie (P) während dieser $n + \frac{r}{s}$ Jahre wollen wir so verstehen, dafs am Anfang jedes Jahres (sofern der Versicherte nicht bereits gestorben ist) P bezahlt wird, ausgenommen im letzten Jahr, wo die Auszahlung nur den Bruchteil $\frac{r}{s}$ der Prämie, also $\frac{r}{s} \cdot P$ beträgt.

Ist die Jahresprämie bei der Dauer von n Jahren ${}_nP$, bei der Dauer von $n+1$ Jahren ${}_{n+1}P$, dann bildet eine gute Annäherung für die Jahresprämie bei der Dauer von $n + \frac{r}{s}$ Jahren der Ausdruck:

$$\frac{(s-r)\, n \cdot {}_nP + r\,(n+1) \cdot {}_{n+1}P}{sn + r}, \qquad (382)$$

welcher dadurch hervorgeht, dafs die Differenz der sämmtlichen Prämien der Differenz der Dauer proportional gesetzt wird.

Wirklich geht derselbe für $r = 0$ über in ${}_nP$, und für $r = s$ in ${}_{n+1}P$. Bei einer Dauer von $n + \frac{1}{2}$ Jahren beispielsweise wäre die Jahresprämie:

$$\frac{n \cdot {}_nP + (n+1) \cdot {}_{n+1}P}{2n+1}.$$

Man könnte die Jahresprämie auch erhalten durch Division der einmaligen Prämie (381) mit dem Wert der Leibrente 1 per Jahr auf $n + \frac{r}{s}$ Jahre, d. h. 1 am Anfang jedes Jahres, aber $\frac{r}{s}$ am Anfang des

letzten. Sei der Wert der Leibrente auf n Jahre ${}_n\mathrm{a}$, dann ist augenscheinlich derjenige auf $n + \frac{r}{s}$ Jahre:

$${}_n\mathrm{a} + \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{r}{s} = {}_n\mathrm{a} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{r}{s}.$$

Nun ist aber

$${}_n\mathrm{a} = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x},$$

$${}_{n+1}\mathrm{a} = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n}}{D_x} = {}_n\mathrm{a} + \frac{D_{x+n}}{D_x};$$

sodafs

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_{n+1}\mathrm{a} - {}_n\mathrm{a}.$$

Man findet demnach für den Wert der Leibrente mit $n + \frac{r}{s}$-jähriger Dauer:

$${}_n\mathrm{a} + \frac{r}{s}({}_{n+1}\mathrm{a} - {}_n\mathrm{a}) = \frac{(s-r) \cdot {}_n\mathrm{a} - r \cdot {}_{n+1}\mathrm{a}}{s} \qquad (383)$$

und sieht also, dafs nicht nur näherungsweise, sondern in aller Strenge der Wert der Leibrente während einer gemischten Anzahl von Jahren gefunden wird, indem man denselben auf dem einfachsten Weg zwischen die Werte für die nächstliegenden ganzen Anzahlen von Jahren interpolirt.

Sonach ist also der Wert der Leibrente während $n + \frac{1}{2}$ Jahren in aller Strenge:

$$\tfrac{1}{2}({}_n\mathrm{a} + {}_{n+1}\mathrm{a}).$$

Die Formeln für einmalige und Jahresprämie bei gemischter Versicherung:

$$1 - \frac{i}{1+i}\,\mathrm{a} \text{ und } \frac{1}{\mathrm{a}} - \frac{i}{1+i}$$

bleiben gültig, wenn die Dauer der Versicherung eine gemischte Anzahl von Jahren ist, nur mufs man die a nach Formel (383) berechnen, und jetzt zeigt sich, dafs bei gemischter Versicherung Formel (381) für die einmalige Prämie bei der zu Grunde gelegten praktischen Bedeutung der Jahresrente während einer gemischten Anzahl von Jahren sogar streng ist.

Bei der Aufstellung eines Tarifs kann man, wenn die Auszahlung am Geburtstage stattfinden soll, bei nicht allzu kurzer Dauer der Ver-

sicherung annehmen, dafs der Beitritt durchschnittlich $\frac{1}{2}$ Jahr nach dem Geburtstage stattfindet. Von denen, die im Alter zwischen 40 und 41 Jahren beitreten und ihr Geld gerade am 60sten Geburtstag haben wollen, kann man daher voraussetzen, dafs die Auszahlung desselben nach $19\frac{1}{2}$ Jahren erfolgen wird.

Pension auf zwei Personen mit gänzlichem Übergang auf die Längstlebende.

233. Diese Art der Versicherung giebt Anlafs zu Schwierigkeiten mit der Weise der Prämienzahlung.

Soll die Prämienzahlung während der Aufschubszeit beim ersten Ableben aufhören, so mufs eine ärztliche Untersuchung der beiden Personen stattfinden, denn wenn eine derselben bald sterben sollte, so wäre die Gesellschaft verpflichtet, der anderen die Pension auszuzahlen.

Soll die Prämienzahlung nur aufhören beim Ableben einer bestimmten der beiden Personen, so soll diese Person untersucht werden.

Die Prämienzahlung kann auch geleistet werden bis zum Tode des zuletztsterbenden und zwar ist in diesem Falle keine ärztliche Untersuchung erforderlich. Hierbei kann aber leicht ein Mifsstand eintreten. Ist die Prämie gleichbleibend, und kommt eine der beiden Personen bald zu sterben, so kann es im Vorteil der zurückbleibenden sein, die Prämienzahlung nicht fortzusetzen, sondern die Versicherung anulliren zu lassen und sich gegen eine billigere Prämie dieselbe Pension zu versichern.

Dieser Mifsstand ist zu vermeiden, indem nicht eine gleichbleibende Prämie gezahlt wird, sondern eine Prämie, welche vermindert beim ersten Sterbefall. Es ist dann wünschenswert, die Prämienzahlung derart einzurichten, dafs, sobald eine der Personen stirbt, die zurückbleibende eine ebenso grofse Prämie zu zahlen bekommt, als sie hätte zahlen müssen, wenn sie sich vom Anfang an nur eine eigene Pension versichert hätte

Gesetzt die Pension (in der Höhe der Einheit per Jahr) soll zum ersten Male ausgezahlt werden nach n Jahren, falls beide Personen oder auch nur eine derselben am Leben sind.

Die einmalige (netto) Prämie für die Pension wird angegeben durch die Formel:

$$ {}_n|\,a_{\overline{xy}} = {}_n|\,a_x + {}_n|\,a_y - {}_n|\,a_{xy}. $$

Stirbt nun (x), so mufs die Prämie für (y) sich auf $\frac{{}_n|\,a_y}{{}_n\,a_y}$ stellen und stirbt (y), so stellt sich die Prämie für (x) auf $\frac{{}_n|\,a_x}{{}_n\,a_x}$.

Um die Jahresprämie Z zu bestimmen, welche bezahlt werden soll' so lange während n Jahre (x) und (y) beide am Leben sind, soll man zum Ausdruck bringen, dafs der Barwert der Prämien dem Barwert der Auszahlungen gleich sein soll, und bekommt man also die Gleichung:

$$Z \cdot {}_n a_{xy} + \frac{{}_n|a_x}{{}_n a_x} \cdot ({}_n a_x - {}_n a_{xy}) + \frac{{}_n|a_y}{{}_n a_y} \cdot ({}_n a_y - {}_n a_{xy}) =$$
$$= {}_n|a_x + {}_n|a_y - {}_n|a_{xy}. \qquad (384)$$

Hier gilt es Netto-Prämien, welche noch um den Zuschlag erhöht werden müssen zur Bestimmung der Brutto-Prämien.

Kapitel X.

Prämien-Reserve.

Die Notwendigkeit der Reserve.

234. Man kann sich denken, dafs jemand immer von einem Jahr zum anderen eine Versicherung eingeht, laut welcher im Falle seines Ablebens innerhalb des betreffenden Jahres eine gewisse Summe ausgezahlt werden soll. Ein solcher hätte dann jedes Jahr eine andere Prämie zu zahlen nach Mafsgabe der veränderten Sterbenswahrscheinlichkeit, eine Prämie, die in der Regel zunehmen und beim Erreichen eines hohen Alters sehr bedeutend werden würde, um schliefslich der versicherten Summe nahezu gleich zu kommen. Zahlt man statt dessen eine gleich bleibende Jahresprämie, so ist diese Prämie anfangs höher, später niedriger als die Prämie für die Versicherung derselben Summe auf ein Jahr. (Von möglichen Ausnahmen sprechen wir später.) In noch höherem Mafse gilt dies im Falle einer periodisch abnehmenden Jahresprämie, und ganz besonders der einmaligen Prämie, bei welcher auf einmal für alle nachfolgenden Jahre mitgezahlt wird.

Wenn alle Versicherten eine einmalige Prämie zahlten, so verstände es sich von selbst, dafs die Gesellschaft ihre Auszahlungen bald einstellen müfste, wenn sie den ganzen Überschufs des Prämien-Empfangs über die Auszahlungen als Gewinn betrachtete und verteilte. Sie mufs

deshalb eine gewisse Summe in Reserve stellen, eine Prämien-Reserve bilden. Bei jährlicher Prämienzahlung würde das Deficit ohne die Bildung der Prämien-Reserve nicht so grofs sein, aber dennoch ist es hier nicht weniger wahr, dafs überall, wo die Versicherten anfangs mehr zahlen als zur Deckung des Risikos während eines Jahres nötig ist, die Gesellschaft eine Reserve bilden mufs.

Noch deutlicher wird die Sache, wenn man eine Versicherung ins Auge fafst, laut welcher jemand im Erlebensfall nach einigen Jahren eine gewisse Summe erhalten soll; hier mufs sogar mehr als die (Netto-) Prämie mit dem Zins reservirt werden, weil die Versicherten weniger zahlen, als sie zu thun brauchten, wenn sie gewifs wären, am Leben zu bleiben; nur durch die stattfindenden Todesfälle gewinnt die Gesellschaft das notwendige Geld, um die Auszahlungen an die Überlebenden leisten zu können.

Leitende Principien bei der Reserve-Berechnung.

235. Wenn bei einer Gesellschaft die Sterblichkeit genau so stattfände, wie die zu Grunde gelegte Sterblichkeitstafel voraussetzt, wenn das verzinste Geld gerade den vorausgesetzten Zins brächte, wenn kein willkürlicher Austritt bei Lebzeiten erfolgte, wenn nicht mehr, aber auch nicht weniger, auf Unkosten verwandt würde als in der Tarif-Prämie für diesen Zweck bestimmt ist — wenn alle diese Voraussetzungen erfüllt wären, würde die Berechnung der Reserve sich erübrigen; die Gesellschaft brauchte dann nur die Netto-Prämien jedes Mal zu verzinsen und die Auszahlungen zu leisten, der Rest würde die Reserve bilden. Auf diese Voraussetzungen sind die Netto-Prämien begründet, für Gewinn bleibt dann nichts übrig.

Jene Voraussetzungen werden aber nie erfüllt, und darum könnte die Verzinsung der eingezählten Netto-Prämien eine zu hohe oder auch eine zu geringe Reserve bilden. Es ist also, wenn auch nicht gerade alljährlich, nötig, durch eine Berechnung zu bestimmen, was als Prämien-Reserve zurückgelegt werden mufs, und zu ermitteln, ob die Gesellschaft Gewinn erzielt oder Verlust erlitten hat.

Um diese Rechnung auszuführen, bemerken wir Folgendes: wenn Sterblichkeit und Verzinsung ganz mit den Voraussetzungen übereinstimmen und kein willkürliches Austreten stattfindet, so ist deutlich, dafs in einem gewissen Augenblick die ganze Reserve = dem gegenwärtigen Wert (A) aller empfangenen Netto-Prämien, vermindert um

den gegenwärtigen Wert (B) aller stattgefundenen Auszahlungen, beide mit Zinseszins berechnet, sein mufs.

Aber augenscheinlich ist, wenn man von noch zu schliefsenden Versicherungen absieht, der gegenwärtige Wert der empfangenen Prämien (A) = dem gegenwärtigen Wert (C) aller Prämien, sowohl der früheren als zukünftigen, vermindert um den gegenwärtigen Wert (D) der zukünftigen Prämien, und der gegenwärtige Wert der geschehenen Auszahlungen (B) = dem gegenwärtigen Wert (F) aller Auszahlungen, sowohl der geschehenen wie auch zukünftigen, vermindert um den gegenwärtigen Wert (G) der zukünftigen Auszahlungen. Alle diese Versicherungen werden so zu sagen zurückgeführt bis auf den Augenblick des Einschreibens.

Wir haben also als ganze Reserve:

$$A - B = (C - D) - (F - G) = (C - F) + (G - D).$$

Nun ist aber augenscheinlich $C = F$; denn bei dem Abschliefsen der Versicherungen ist der Wert der (Netto-)Prämien = dem Wert der Auszahlungen, und dies bleibt gültig, wenn unter Berücksichtigung der Verzinsung, sowohl von allen Prämien wie auch von den Auszahlungen der Wert in einem andern Augenblick bestimmt wird. Wir haben demnach:

$$\text{Reserve} = G - D.$$

Man hat nun die Reserve für einen Zeitpunkt unter der Voraussetzung zu bestimmen, dafs die Sterblichkeit zukünftig nach den Sterblichkeitstafeln stattfinden, das Geld den in Rechnung gestellten Zins eintragen und kein willkürliches Austreten stattfinden wird. Wenn man nun annimmt, dafs alle Versicherungen, die in dem Augenblick, für welchen die Reserve bestimmt wird, bestehen, aus denen früher Beigetretener übrig geblieben sind, die denselben Sterbenswahrscheinlichkeiten, wie sie die Sterblichkeitstafel angiebt, unterworfen waren, sowie dafs das Geld den gesetzten Zins gebracht hat, so könnte man für die sämmtlichen laufenden Versicherungen die Reserve nehmen $= A - B$; es wäre dies die retrospective Methode, welche in die Vergangenheit zurückgreift. Gebräuchlicher aber ist es, die Formel $G - D$ anzuwenden, welche besagt, dafs die ganze Prämien-Reserve der Gesellschaft bestehen mufs aus dem gegenwärtigen Wert der zukünftigen Auszahlungen, vermindert um den gegenwärtigen Wert der zukünftigen (Netto-) Prämien. Diese Methode, welche auf die Zukunft basirt ist, heifst die prospective.

Der letzte Satz läfst sich auch auf andere Weise einsehn. Wenn die Gesellschaft für die bestehenden Versicherungen keine Prämien mehr zu empfangen hätte, müfste sie eine Summe besitzen, die, falls Sterblichkeit und Zins den Voraussetzungen entsprechen, genügt, um die Auszahlungen bestreiten zu können. Um diese Summe zu berechnen, sind alle jene Auszahlungen unter Berücksichtigung der Sterbenswahrscheinlichkeiten und des Zinses auf den gegenwärtigen Augenblick zu discontiren. Der Barwert der Auszahlungen braucht aber nicht vorhanden zu sein, wenn die Versicherten noch Prämien zahlen müssen, sondern offenbar nur die Differenz zwischen ihm und dem auf die Gegenwart discontirten Wert der künftigen Prämien.

Die zukünftigen Auszahlungen bilden, um es noch anders auszudrücken, eine Verpflichtung der Gesellschaft; ihr gegenwärtiger Wert im Augenblick, für welchen die Reserve berechnet werden soll, stellt die Schuld der Gesellschaft den sämmtlichen Versicherten gegenüber dar, wohingegen der gegenwärtige Wert der zukünftigen Prämien die Schuld der sämmtlichen Versicherten der Gesellschaft gegenüber bedeutet. Die Differenz beider Werte bildet das Saldo der Schuld, welche die Gesellschaft augenblicklich den sämmtlichen Versicherten gegenüber hat, d. h. die Reserve; nur sei nochmals auf die Voraussetzung aufmerksam gemacht, welche dieser Betrachtung zu Grunde liegt, nämlich die, dafs die Teilhaber für ihre Versicherungen Netto-Prämien zahlen, dafs also über alles, was sie für Unkosten u. s. w. mehr zahlen, unmittelbar nach dem Empfange von der Gesellschaft verfügt wird.

236. Wir legen den Nachdruck darauf, dafs die Reserve eine Schuld der Gesellschaft den sämmtlichen Versicherten gegenüber bildet; die Berechnung der Reserve für eine einzelne Versicherung hat in den meisten Fällen nur einen sehr relativen Wert. Bei einer gemischten Versicherung ist es freilich klar, dafs diese Versicherung im letzten Jahr notwendig einen Wert hat, der dem versicherten Kapital sehr nahe kommt; wenn sich aber jemand in jugendlichem Alter lebenslänglich auf eine Auszahlung im Todesfall versichert hat, so ist es im Allgemeinen nach 10 Jahren sehr ungewifs, welchen Wert seine individuelle Versicherung hat. Dazu müfste man einen sehr genauen Einblick in seine Verhältnisse haben, und selbst wenn man diesen hätte, würde es schwer halten, die verschiedenen Umstände ziffermäfsig zu würdigen; die individuelle Sterbenswahrscheinlichkeit kann aus allerlei Ursachen viel gröfser oder kleiner geworden sein, als dem betreffenden Alter durchschnittlich entspricht. Es ist hier ganz anders als bei

einer Lotterie, wo nach jeder Ziehung alle nicht gezogenen Nummern mathematisch genommen, denselben Wert haben.

Zwar spricht man auch von der Reserve einer einzelnen Versicherung und meint dann damit die Differenz zwischen dem gegenwärtigen Wert der zukünftigen Auszahlung und dem der zukünftigen Prämien, es hat dies aber nur einen Sinn in Hinsicht auf die totale Reserve. Wenn wir also auch bei Aufstellung der Reserve-Formeln von der Reserve einer einzelnen Versicherung ausgehn und man bei mehreren Versicherungsweisen, die nur spärlich vertreten sind, gezwungen ist, die Reserve für die einzelnen Versicherungen zu berechnen, so geschieht dies doch immer in der Voraussetzung, dafs man sozusagen mit durchschnittlichen Versicherten zu thun hat. Der so aufgefafste Wert einer einzelnen Versicherung ist keineswegs der Wert einer individuellen.

Die Prämien-Reserve giebt nur dann die genügende Sicherheit dafür, dafs die Gesellschaft ihre Verpflichtungen erfüllen wird, wenn die Anzahl der Versicherten grofs ist. In einem kleinen Kreise von z. B. nur dreifsig Personen bieten selbst die genauesten Berechnungen keine Bürgschaft gegen die gröfsten Enttäuschungen.

Die Reserve einmaliger Prämien.

237. Der gegenwärtige Wert einer zukünftigen Auszahlung ist nichts anderes als die einmalige (Netto-) Prämie, für welche man die Versicherung dieser Auszahlung kaufen kann.

Wenn nun jemand für die Versicherung einer bestimmten Summe oder einer bestimmten Rente eine einmalige Prämie gezahlt hat, so kann von zukünftigen Prämien nicht die Rede sein, und also ist nach einer bestimmten Anzahl von Jahren die Reserve für diese Versicherung die einmalige (Netto-) Prämie, gegen welche man nunmehr diese Versicherung kaufen könnte.

Einige Beispiele werden dies genügend veranschaulichen.

Hat ein x-jähriger eine Versicherung abgeschlossen, laut welcher er im Erlebensfall nach n Jahren die Summe 1 erhalten wird, so ist die einmalige (Netto-) Prämie:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} \text{ (No. 89)}$$

und die Reserve nach m Jahren:

$${}_mV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}}, \qquad (385)$$

weil dies die einmalige Prämie ist, gegen deren Zahlung einem $x+m$-jährigen im Erlebensfall nach $n-m$ Jahren die Einheit ausgezahlt wird.

Setzt man $m=n$, so wird ${}_mV=1$, wie es auch sein muſs, weil, wenn der Augenblick der Auszahlung gekommen ist, die Reserve aus dem versicherten Kapital selbst bestehen muſs. Es muſs ja dieses dann bei der Gesellschaft vorhanden sein, wenn seine Auszahlung kein Opfer für die Gesellschaft bedeuten soll.

238. Die einmalige Prämie eines x-jährigen für eine postnumerando zahlbare Leibrente — die Einheit per Jahr — ist:

$$a_x=\frac{N_x}{D_x}, \text{ (No. 91)}$$

und folglich nach m Jahren die Reserve dieser Versicherung:

$${}_mV=a_{x+m}=\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}. \qquad (386)$$

Diese Formel setzt voraus, daſs der Bestimmung der Reserve gerade eine Auszahlung vorausgegangen ist. Nun ist es gebräuchlicher, daſs die Auszahlung der Leibrente am ersten als am letzten Tag eines Jahres stattfindet. Ist ersteres der Fall, erfolgt also die nächste Auszahlung einen Tag nach der Bestimmung der Reserve, so ist diese um die Einheit gröſser und daher:

$${}_mV=\frac{N_{x+m-1}}{D_{x+m}}. \qquad (387)$$

Unter Benutzung der Entwicklungen in No. 110, 111 und 205 kann man dem Falle Rechnung tragen, daſs die Rentenzahlung ratenweise stattfinden und bis zum Tage des Ablebens dauern soll.

239. Die einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung eines x-jährigen auf den Todesfall, zum Betrage der Einheit, ist:

$$A_x=\frac{M_x}{D_x}=1-d\cdot \mathrm{a}_x,$$

also ist nach m Jahren die Reserve:

$${}_mV=\frac{M_{x+m}}{D_{x+m}}=1-d\cdot \mathrm{a}_{x+m}. \qquad (388)$$

240. Die einmalige Prämie eines x-jährigen für eine n-jährige gemischte Versicherung zum Betrage der Einheit ist:

$$1-d\cdot\frac{N_{x-1}-N_{x+n-1}}{D_x}=1-d\cdot {}_n\mathrm{a}_x.$$

Nach m Jahren ist der Versicherte $x+m$ Jahr alt, die Dauer der Versicherung beträgt also nur noch $n-m$ Jahre, folglich ist nach m Jahren die Reserve:

$$
\begin{aligned}
{}_mV &= 1 - d \cdot |_{n-m}\mathrm{a}_{x+m} = \\
&= 1 - d \cdot \frac{N_{x+m-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+m}}. \qquad (389)
\end{aligned}
$$

Setzt man hierin $m=n$, so wird, wie zu erwarten, ${}_mV=1$.

241. Hat ein x-jähriger Mann zu Gunsten seiner y-jährigen Frau gegen eine einmalige Prämie eine Witwenpension gekauft, so sind nach m Jahren drei Fälle möglich:

Wenn nach m Jahren noch Mann und Frau am Leben sind, so ist die Reserve:

$$
{}_mV = \mathrm{a}_{y+m} - \mathrm{a}_{x+m\,.\,y+m} = a_{y+m} - a_{x+m\,.\,y+m}, \qquad (390)
$$

weil für diese Summe ein Paar im Alter $x+m$ und $y+m$ eine Witwenpension kaufen kann; wenn aber während jener m Jahre der Versorger gestorben ist und die Versorgte die Rente bezieht, so ist die Reserve:

$$
{}_mV = \mathrm{a}_{y+m}. \qquad (391)
$$

Ist endlich die Frau oder sind Mann und Frau gestorben, so hat keine Auszahlung mehr zu erfolgen, die Reserve ist also dann $=0$.

242. Wenn gegen Zahlung einer einmaligen Prämie die Versicherung eines Kapitals auf den Erlebensfall abgeschlossen ist, mit Rückgewähr der Prämie auf den Todesfall, so ist es zur Bestimmung der Reserve am besten, die Versicherung in zwei Teile zu zerlegen.

Sei das Beitrittsalter $=x$, die versicherte Summe $=1$ und die gezahlte Einlage, welche bei früherem Ableben zurückerstattet wird, $=E$, dann ist nach m Jahren die Reserve für die Hauptversicherung:

$$
\frac{D_{x+n}}{D_{x+m}};
$$

die Versicherung der Rückgewähr der Einlage E kommt hinaus auf eine temporäre Versicherung auf den Todesfall, deren Wert m Jahr nach dem Abschluſs gemäſs Formel (189)

$$
E \cdot \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{D_{x+m}} \text{ ist,}
$$

folglich ist die ganze Reserve:

$$
{}_mV = \frac{1}{D_{x+m}}\left[D_{x+n} + E \cdot (M_{x+m} - M_{x+n})\right], \qquad (392)
$$

was sich für $m=n$ zu ${}_mV=1$ reducirt.

243. Betrachten wir schliefslich eine lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall, laut welcher beim Ableben im ersten Jahr die Auszahlung 1, im zweiten Jahre 1.05 und in jedem folgenden Jahr immer 0.05 mehr betragen soll, bis sie endlich 2 geworden ist. Wenn $m < 20$, so beträgt m Jahr nach dem Abschlufs der Versicherung die Auszahlung

im erstfolgenden Jahr $1 + m \cdot 0.05$
„ nächsten „ $1 + (m+1) \cdot 0.05$ u. s. w.
„ 21ten „ und später 2,

folglich ist die Reserve m Jahr nach dem Abschliefsen:

$$\frac{1}{D_{x+m}}[(1 + m \cdot 0.05)\, C_{x+m} + (1 + (m+1) \cdot 0.05)\, C_{x+m+1} +$$
$$+ (1 + (m+2) \cdot 0.05)\, C_{x+m+2} + \ldots + (1 + 19 \cdot 0.05)\, C_{x+19} +$$
$$+ 2\, C_{x+20} + 2\, C_{x+21} + \ldots].$$

Der eingeklammerte Ausdruck läfst sich schreiben:

$$C_{x+m} + C_{x+m+1} + C_{x+m+2} + \ldots +$$
$$+ 0.05 \cdot \{ m\, C_{x+m} + (m+1)\, C_{x+m+1} + (m+2)\, C_{x+m+2} + \ldots +$$
$$+ 19\, C_{x+19} + 20\, C_{x+20} + 20\, C_{x+21} + \ldots \}.$$

Bringt man die letzte eingeklammerte Gröfse auf die Form:

$$m\, M_{x+m} + R_{x+m+1} - R_{x+21},$$

so ergiebt sich als die gesuchte Reserve:

$${}_mV = \frac{1}{D_{x+m}} \left[M_{x+m} + 0.05 \left\{ m\, M_{x+m} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + R_{x+m+1} - R_{x+21} \right\} \right]. \qquad (393)$$

Für $m = 0$ giebt dies natürlich die einmalige Prämie nach Formel (196).

Liegt aber m der Zahl 20 nahe, so ist eine andere Form als (393) vorzuziehen, welche durch folgende Beispiele gekennzeichnet wird:

$${}_{19}V = \frac{1}{D_{x+19}} \left(1.95\, C_{x+19} + 2\, M_{x+20} \right);$$

$${}_{18}V = \frac{1}{D_{x+18}} \left(1.90\, C_{x+18} + 1.95\, C_{x+19} + 2\, M_{x+20} \right).$$

Ist $m = 20$ oder gröfser, so beträgt die Reserve nach m Jahren:

$${}_mV = 2\, \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}}. \qquad (394)$$

Reserve von Jahresprämien als Differenz von Verpflichtungen.

244. Nach dem Vorhergehenden besteht bei jährlicher Zahlung von Prämien die Reserve aus dem gegenwärtigen Wert der zukünftigen Auszahlung, vermindert um den gegenwärtigen Wert der zukünftigen Prämien.

Auch hierfür wollen wir einige Beispiele geben. Das Alter des Beitretenden setzen wir dabei immer $= x$ und die Netto-Jahresprämie (lebenslänglich oder temporär) für jede Art Versicherung $= P$.

Eine Versicherung auf den Erlebensfall nach n Jahren mufs m Jahr nach dem Anfang noch $n - m$ Jahre laufen, die gleich bleibende Jahresprämie also noch $n - m$ Mal gezahlt werden; der gegenwärtige Wert der Jahresprämie ist alsdann gleich dem einer praenumerando zahlbaren Leibrente vom Betrage P mit einer Dauer von $n - m$ Jahren für die Person eines $x + m$-jährigen, und folglich die Reserve:

$$
\begin{aligned}
{}_mV &= \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} - P \cdot |_{n-m}\mathrm{a}_{x+m} = \\
&= \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} - P \cdot \frac{N_{x+m-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+m}}. \qquad (395)
\end{aligned}
$$

245. In dem Fall der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall gegen fortwährende Jahresprämie P_x ist nach m Jahren die Reserve:

$$
{}_mV = A_{x+m} - P_x \cdot \mathrm{a}_{x+m}. \qquad (396)
$$

Ist die Versicherung gegen eine temporäre Jahresprämie ${}_nP_x$ von n-jähriger Dauer geschlossen, sodafs

$$
{}_nP_x = \frac{M_x}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \text{ ist,}
$$

so beträgt, falls $m < n$, nach m Jahren die Reserve:

$$
{}_mV = A_{x+m} - {}_nP_x \cdot |_{n-m}\mathrm{a}_{x+m}. \qquad (397)
$$

Ist aber $m \gtrless n$, so ist die Reserve nach m Jahren einfach A_{x+m}, denn dann hat die Gesellschaft keine Prämie mehr zu beanspruchen.

Wird während der ersten 5 Jahre die Prämie P gezahlt, während der zweiten $1\frac{1}{3}$ P, während der dritten $1\frac{2}{3}$ P, und weiterhin 2 P (vgl. No. 100), so ist die Reserve nach 3 Jahren:

$$
{}_3V = A_{x+3} - P \cdot \left[\mathrm{a}_{x+3} + \tfrac{1}{3}\,\frac{N_{x+4} + N_{x+9} + N_{x+14}}{D_{x+3}}\right], \qquad (398)
$$

nach 8 Jahren:

$$_8V = A_{x+8} - \tfrac{1}{3} P \cdot \left[4\, a_{x+8} + \frac{N_{x+9} + N_{x+14}}{D_{x+8}}\right], \quad (399)$$

nach 13 Jahren:

$$_{13}V = A_{x+13} - \tfrac{1}{3} P \cdot \left[5\, a_{x+13} + \frac{N_{x+14}}{D_{x+13}}\right]. \quad (400)$$

Nach m Jahren ist die Reserve, wenn $m \geqq 15$:

$$_mV = A_{x+m} - 2\, P \cdot a_{x+m}. \quad (401)$$

246. Bei der gemischten Versicherung mit n-jähriger Dauer ist, wenn P wieder die gleich bleibende Jahresprämie darstellt, nach m Jahren die Reserve:

$$_mV = A_{x+m\,.\,\overline{n-m}|} - P \cdot a_{x+m\,.\,\overline{n-m}|}. \quad (402)$$

Wenn während der ersten 5 Jahre eine geringere, später also eine höhere Prämie als die gleich bleibende gezahlt wird, z. B. in den ersten 5 Jahren P, in den späteren Jahren $\frac{3}{2}P$, so ist nach 3 Jahren die Reserve:

$$_3V = A_{x+3\,.\,\overline{n-3}|} - P \cdot \left(a_{x+3\,.\,\overline{n-3}|} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{N_{x+4} - N_{x+n-1}}{D_{x+3}}\right); \quad (403)$$

welche Formel sich auch wie folgt schreiben läfst:

$$_3V = A_{x+3\,.\,\overline{n-3}} - P \cdot \left[\tfrac{3}{2}\, a_{x+3\,.\,\overline{n-3}|} - \tfrac{1}{2}\, a_{x+3\,.\,\overline{2}|}\right], \quad (403^*)$$

für einen Wert von $m \geqq 5$ und $< n$ hat man:

$$_mV = A_{x+m\,.\,\overline{n-m}|} - \tfrac{3}{2} P \cdot a_{x+m\,.\,\overline{n-m}|}. \quad (404)$$

247. Heifst bei der Versicherung auf das erste Ableben zweier Personen im Alter von x und y Jahren die gleich bleibende Prämie wieder P, dann ist nach m Jahren die Reserve:

$$_mV = A_{x+m\,.\,y+m} - P \cdot a_{x+m\,.\,y+m}. \quad (405)$$

Umformung der Reserve-Formeln.

248. Setzt man in Formel (396):

$$A_{x+m} = 1 - d \cdot a_{x+m},$$

dann wird sie:

$$_mV = 1 - (P_x + d) \cdot a_{x+m}. \quad (406)$$

Setzt man in derselben Formel:

$$a_{x+m} = \frac{1+i}{i}(1 - A_{x+m}),$$

dann erhält sie die Gestalt:

$$ {}_mV = A_{x+m} \cdot \left(1 + \frac{1+i}{i} P_x\right) - \frac{1+i}{i} P_x. \qquad (406^*) $$

Setzt man $P_x = \frac{A_x}{a_x}$, $a_x = \frac{1 - A_x}{d}$, $a_{x+m} = \frac{1 - A_{x+m}}{d}$, so wird die Formel der Reserve:

$$ {}_mV = \frac{A_{x+m} - A_x}{1 - A_x}. \qquad (406^{**}) $$

Man beachte, dafs die drei Formeln auch angewendet werden können auf Versicherung mit Auszahlung beim ersten Ableben einer Person aus einem Paar und auf gemischte Versicherung für eine oder mehrere Personen, wenn man a_{x+m} und A_{x+m} die zweckentsprechende Bedeutung beilegt. Die erste besonders empfiehlt sich durch Einfachheit der Form und leichte Anwendbarkeit.

Bei Versicherung einer Witwenpension gegen eine Jahresprämie, zahlbar, so lange Versorger und Versorgte beide am Leben sind, ist die Reserve:

$$ {}_mV = a_{y+m} - a_{x+m\,.\,y+m} - P \cdot a_{x+m\,.\,y+m}, $$

worin P die Netto-Jahresprämie bedeutet.

Da $P = \frac{a_x}{a_{xy}} - 1$, so wird jetzt die Reserve-Formel einfach:

$$ {}_mV = a_{y+m} - \frac{a_y}{a_{xy}} \cdot a_{x+m\,.\,y+m}. $$

249. Die Formel (402) für gemischte Versicherung läfst sich folgenderweise umbilden:

$$ {}_mV = A_{x+m} - \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \cdot A_{x+m} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} - $$

$$ - P \cdot \left(a_{x+m} - \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \cdot a_{x+m}\right) = $$

$$ = A_{x+m} - P \cdot a_{x+m} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} (1 - A_{x+m} + P \cdot a_{x+m}) = $$

$$ = A_{x+m} - P \cdot a_{x+m} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \left(\frac{i}{1+i} \cdot a_{x+n} + P \cdot a_{x+n}\right) = $$

$$ = A_{x+m} - P \cdot a_{x+m} + \frac{N_{x+n-1}}{D_{x+m}} (P + d) = $$

$$ = A_{x+m} + d \cdot \frac{N_{x+n-1}}{D_{x+m}} - P \cdot \left(a_{x+m} - \frac{N_{x+n-1}}{D_{x+m}}\right). $$

Für die gemischte Versicherung ist die Jahresprämie:

$$P = \frac{1}{{}_n a_x} - d,$$

und es stellt sich also

$$P + d = \frac{1}{{}_n a_x}.$$

Die Formel transformirt sich also in nachstehender Weise:

$${}_m V = A_{x+m} - P \cdot a_{x+m} + \frac{N_{x+n-1}}{D_{x+m} \cdot {}_n a_x} =$$

$$= A_{x+m} - P \cdot a_{x+m} + \frac{N_{x+n-1} \cdot D_x}{D_{x+m} \cdot (N_{x-1} - N_{x+n-1})}.$$

Setzt man in Formel (395) für Versicherung auf den Erlebensfall $D_{x+n} = P \cdot (N_{x-1} - N_{x+n-1})$, so bekommt man die retrospective Formel:

$${}_m V = P \cdot \frac{1}{D_{x+m}} \cdot (N_{x-1} - N_{x+m-1}).$$

Die Reserve, abgeleitet aus dem Verhältnisse der Jahresprämie, die gezahlt wird, zu der Jahresprämie, die bei späterem Eingehn der Versicherung gezahlt werden müfste.

250. Substituirt man in Formel (396) $a_{x+m} = \frac{A_{x+m}}{P_{x+m}}$, dann wird sie

$${}_m V_x = A_{x+m} \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+m}}\right). \qquad (407)$$

was wir schreiben wollen:

$${}_m V = A_{(m)} \left(1 - \frac{P}{P_{(m)}}\right). \qquad (408)$$

Hier bedeutet P die Netto-Jahresprämie, die der Versicherte fortwährend zahlt, $P_{(m)}$ die Netto-Jahresprämie, die er zahlen müfste, wenn er in dem Zeitpunkt, für welchen die Reserve berechnet wird, beiträte, $A_{(m)}$ die entsprechende einmalige Prämie.

Diese Formel gilt nicht nur für die lebenslängliche Versicherung, sondern auch für die temporäre auf den Todesfall, für die Versicherung auf den Erlebensfall, für die gemischte Versicherung, wenn nur bei Bestimmung der Prämien P, $P_{(m)}$ und $A_{(m)}$ das Alter, bis zu welchem die Versicherung läuft, auch als dasjenige zu Grunde gelegt ist, welches die Prämienzahlung begrenzt. Die Formel gilt ferner für die Versicherung auf Auszahlung beim ersten Ableben zweier zu einem Paar

verbundener Personen, sowie für die gemischte Versicherung von zwei Personen.

Man könnte dies aus den andern Formeln beweisen, doch wird es auch durch folgende einfache Überlegung deutlich: Würde der Versicherte im Augenblick, für welchen die Reserve berechnet wird, beitreten, so müfste er jährlich $P_{(m)}$ für die Versicherung der Einheit zahlen; er zahlt aber auch hinfort nur P, hätte also, wenn man auf die schon gezahlten Prämien keine Rücksicht nähme, nur Anspruch auf die Auszahlung $\frac{P}{P_{(m)}}$. Er soll aber thatsächlich auf die Auszahlung von der Einheit Recht haben; die Differenz $1 - \frac{P}{P_{(m)}}$ soll daher durch ihren gegenwärtigen Wert d. h. durch die Reserve gedeckt sein, welche also $A_{(m)}\left(1 - \frac{P}{P_{(m)}}\right)$ beträgt.

Die Reserve, berechnet aus der Differenz der Jahresprämie, die bei späterem Eingehn der Versicherung gezahlt werden müfste, und derjenigen, die gezahlt wird.

251. Es giebt noch eine andere Gestaltung der Formel, welche für sehr viele Versicherungsweisen gilt und leicht angewendet werden kann.

Bei der Versicherung auf den Erlebensfall nach n Jahren haben wir die Prämie des x-jährigen mit P bezeichnet; m Jahre nach dem Abschlufs der Versicherung ist der Versicherte $x + m$ Jahre alt, und wir wollen die Jahresprämie, die er dann für dieselbe Versicherung bei ungeändertem Zeitpunkt der Auszahlung, also mit der Dauer von $n - m$ Jahren zu zahlen hätte, wieder $P_{(m)}$ nennen. Dann ist:

$$\frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} = P_{(m)} \cdot \mathrm{a}_{x+m\,.\,\overline{n-m}|},$$

und Formel (395) geht also über in:

$${}_mV = (P_{(m)} - P)\,\mathrm{a}_{x+m\,.\,\overline{n-m}|}.$$

Wenn bei der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall die Jahresprämie des $x + m$-jährigen $P_{(m)}$, also $A_{x+m} = P_{(m)} \cdot \mathrm{a}_{x+m}$ ist, dann geht Formel (396) über in

$${}_mV = (P_{(m)} - P)\,\mathrm{a}_{x+m}.$$

Dieselbe Umformung kann man bei der temporären Versicherung auf den Todesfall, bei der gemischten Versicherung, bei der Versicherung

auf das erste Ableben von zwei Personen, bei Überlebens-Rente oder -Kapital vornehmen, wenn der Betrag der Auszahlung von der Dauer der Versicherung unabhängig ist, und stets dieselbe Jahresprämie gezahlt wird.

Gleichgültig also, ob von einem oder mehr Leben die Rede ist, bezeichnen wir die Jahresprämie beim Beitritt mit P, die Jahresprämie, wie sie von denselben Versicherten bei m Jahr späterem Beitritt für dieselbe Versicherung gezahlt werden müfste, mit $P_{(m)}$, die (je nach der Art der Versicherung) lebenslänglich oder temporär praenumerando zahlbare Leibrente für eine oder mehrere Personen mit a, und die für um m Jahre ältere Personen mit $a_{(m)}$, dann ist:

$$_mV = (P_{(m)} - P)\, a_{(m)}. \qquad (409)$$

Es ist wichtig, anzudeuten, wie man dieselbe Formel beweisen kann, ohne die vorhergehenden zu benutzen, weil dadurch noch deutlicher wird, wie notwendig die Bildung der Prämien-Reserve ist.

Eine Person (oder ein Paar) habe eine gewisse Versicherung, sei es lebenslänglich oder auf einen gewissen Zeitpunkt abgeschlossen, und zahle dafür eine gleich bleibende Jahresprämie P; jetzt, m Jahre nach dem Abschliefsen, lebe die Person (oder bestehe das Paar) noch. Wenn sie (oder das Paar) dieselbe lebenslängliche oder bis zu demselben Augenblick laufende Versicherung gegenwärtig erst eingehn wollte, müfste jährlich die Prämie $P_{(m)}$ gezahlt werden; da indessen jährlich nur P gezahlt wird, so ist dies $P_{(m)} - P$ zu wenig. Der gegenwärtige Wert dieser in Zukunft zu wenig eingehenden Prämien mufs in der Vergangenheit von der Gesellschaft aufgespart, d. h. als Reserve vorhanden sein. Jener gegenwärtige Wert, d. h. die Reserve, ist nun

$$(P_{(m)} - P)\, a_{(m)},$$

wo $a_{(m)}$ der Wert der Leibrente (lebenslänglich oder bis zum Ablauf der Versicherung) zum Betrage der Einheit ist.

Man sieht, dafs Formel (409) sogar bei Versicherung für veränderliche Auszahlung auf den Todesfall gilt, wenn man nur unter $P_{(m)}$ die Prämie versteht, welche der im Alter von $x+m$ Jahren Beitretende zahlen müfste, damit bei seinem Ableben im Alter y dieselbe Auszahlung erfolgt, wie sie stattfinden mufs, wenn der mit x Jahren Beigetretene im Alter y stirbt. Ist z. B. P die Jahresprämie für den x-jährigen, damit beim Ableben innerhalb des ersten Jahres 1, innerhalb des zweiten $1+\alpha$, innerhalb des dritten $1+2\alpha$, u. s. w. ausgezahlt wird, so gilt die Formel, wenn $P_{(m)}$ die Jahresprämie für den

$x + m$-jährigen bedeutet, damit beim Ableben innerhalb des ersten Jahres $1 + m\alpha$, innerhalb des zweiten $1 + (m+1)\alpha$, u. s. w. ausgezahlt werde.

Diese Formel kann aber nicht angewendet werden bei einer Versicherung mit veränderlicher Prämie, so lange die Prämie noch im Verändern begriffen ist. Wenn aber nach m Jahren die veränderliche Prämie P geworden ist und sich dann bis zum Ablauf der Versicherung nicht weiter verändert, und wenn $P_{(m)}$ die fortwährende gleich bleibende Jahresprämie für den $x + m$-jährigen bedeutet, damit dieselbe Auszahlung stattfindet, so bleibt die Formel gültig. Sogar für die Versicherung eines Kapitals oder einer Rente auf den Erlebensfall mit gänzlicher oder teilweiser Rückgewähr der Prämie bei früherem Ableben ist die Formel anwendbar unter der Bedingung, dafs $P_{(m)}$ geeignet berechnet ist, dafs also der Auszahlung, die in Folge des Ablebens nach den m Jahren stattfinden kann, gehörig Rechnung getragen ist.

Keineswegs aber kann die Formel benutzt werden für eine Prämienzahlung, die sich nach den m Jahren noch ändert oder vor dem Ablauf der Versicherung aufhört.

Obgleich man also die Formel noch häufiger anwenden kann, als wir anfangs angaben, so ist dies doch nur praktisch für die einfachen Fälle. In verwickelteren wäre sie weniger handlich als die Formeln, welche die Reserve als Differenz zwischen dem Wert der Auszahlungen und der Prämien auffassen.

Die Reserve, ausgedrückt durch das Verhältnis von Renten.

252. Bei der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall und auf den ersten Todesfall zweier verbundenen Leben, bei der gemischten Versicherung, sowohl für ein Leben als auch für zwei verbundene Leben, hat die gleich bleibende Jahresprämie von derselben Dauer wie die Versicherung stets die Form:

$$P = \frac{1}{\mathfrak{a}} - d,$$

wenn $\mathfrak{a}$ die entsprechende lebenslängliche oder temporäre Leib- oder Verbindungsrente bedeutet. Ebenso ist:

$$P_{(m)} = \frac{1}{\mathfrak{a}_{(m)}} - d,$$

wenn $P_{(m)}$ und $\mathfrak{a}_{(m)}$ sich auf die um m Jahre höheren Alter beziehen

und die Altersstufen, wo die Versicherung abläuft, dieselben sind wie vorher.

Wenn man diese Ausdrücke in Formel (409) substituirt, findet man für die Reserve die Formel:

$$_mV = 1 - \frac{a_{(m)}}{a}. \qquad (410)$$

Daher ist bei der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall mit gleich bleibender Jahresprämie, wenn x das Beitrittsalter ist, die Reserve nach m Jahren:

$$_mV = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x},$$

bei der Versicherung auf den ersten Todesfall zweier verbundenen Leben, wenn x und y die Altersjahre des Beitritts sind:

$$_mV = 1 - \frac{a_{x+m\,.\,y+m}}{a_{xy}},$$

bei der gemischten Versicherung mit n-jähriger Dauer für eine Person

$$_mV = 1 - \frac{a_{x+m\,.\,\overline{n-m}|}}{a_{x\,.\,\overline{n}|}},$$

bei der gemischten Versicherung mit n-jähriger Dauer für zwei Personen

$$_mV = 1 - \frac{a_{x+m\,.\,y+m\,.\,\overline{n-m}|}}{a_{xy\overline{n}|}}.$$

Diese Formeln empfehlen sich besonders dann, wenn man Reservetafeln für die verschiedene Dauer der Versicherung aufstellen will.

Die Formel (410) läfst sich auch ohne Anwendung anderer Formeln auf nachstehendem Wege beweisen: Es kauft Jemand eine Lebensversicherung 1 gegen Jahresprämien; aber er kauft gleichzeitig für die Summe 1 eine lebenslängliche Leibrente zum Betrage von $\frac{1}{a}$ (praenumerando). Es kommt dies hierauf hinaus, dafs er die Einheit einzahlt und die Gesellschaft ihm jährlich den Zins i am Ende, oder $\frac{i}{1+i} = d$ am Anfang des Jahres vergütet; denn für die eingezahlte Einheit erhält er jährlich $\frac{1}{a}$, als Jahresprämie zahlt er $\frac{1}{a} - d$ und es bleibt ihm also jährlich d übrig; die Gesellschaft administrirt also sein Kapital, und restituirt dasselbe am Ende des Sterbejahres.

Die Gesellschaft könnte aber auch zu jeder Zeit die Einheit restituiren und gleichzeitig die Zahlung des Zinses einstellen. Der Gesammtbesitz des Versicherten ist stets die Einheit und darum sind zu jeder Zeit der Wert der Lebensversicherung und der Wert der Leibrente zusammen der Einheit gleich.

Nach m Jahren ist der Wert der Leibrente, zum Betrage von $\frac{1}{a}$, $= \frac{a_{(m)}}{a}$, also ist dann der Wert der Lebensversicherung (das heifst die Reserve) =

$$1 - \frac{a_{(m)}}{a}.$$

Allgemeine Formel für die Reserve bei der Versicherung auf den Erlebensfall, mit oder ohne gänzliche oder teilweise Rückgewähr der Prämien bei früherem Ableben.

253. Bei der Versicherung auf den Erlebensfall mit n-jähriger Dauer ist, wenn x das Alter des Beitritts bedeutet, die Jahresprämie:

$$P_x \,{}_{n|}^{1} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}, \text{ (siehe No. 116)}$$

also geht die Reserve-Formel (395) über in:

$${}_mV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} - \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \cdot \frac{N_{x+m-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+m}},$$

was sich leicht zurückführen läfst auf:

$${}_mV = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+m-1}}{D_{x+m}}.$$

Nun ist die Jahresprämie für den x-jährigen, um die Auszahlung nach m Jahren zu erhalten:

$$P_x \,{}_{m|}^{1} = \frac{D_{x+m}}{N_{x-1} - N_{x+m-1}};$$

und also reducirt sich die Reserve-Formel, wie sie zuletzt geschrieben ist, zu:

$${}_mV = \frac{P_x \,{}_{n|}^{1}}{P_x \,{}_{m|}^{1}}. \qquad (411)$$

Diese sehr einfache Formel bleibt auch gültig, wenn bei früherem Ableben die gezahlten Prämien gänzlich oder teilweise zurückerstattet

werden, und zwar eben so gut für den Fall, dafs die Prämie eine einmalige, wie dafs sie eine jährliche ist.

Die Formel ist von Dr. **M. C. Paraira** für einen ziemlich allgemeinen Fall mathematisch entwickelt worden, und zwar leitet er zuerst die Reserve-Formel ab aus der Begriffsbestimmung der totalen Reserve als Differenz der aufgezinsten, bereits gezahlten Prämien und des gegenwärtigen Werts der Auszahlungen, sodafs am Ende der Versicherungsdauer die Reserve gleich der versicherten Summe sein mufs. Es ist eine gute Übung, die Formel mit andern zu vergleichen; um sie aber zu beweisen, brauchen wir keine andere Reserveformel vorauszusetzen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Wir wollen dabei unseren Standpunkt so allgemein wie möglich nehmen. In Frage stehe die Auszahlung der Summe 1 auf den Erlebensfall nach n Jahren; stirbt aber der Versicherte im ersten Jahr, dann soll der Bruchteil α_1 der Jahresprämie zurückerstattet werden; stirbt er im zweiten Jahr, so der Bruchteil α_2 u. s. w.; allgemein soll beim Ableben innerhalb der n Jahre der Bruchteil k der Jahresprämie zurückerstattet werden, wo k eine veränderliche Zahl bedeutet, die von der Zahl der Jahre, welche die Versicherung beim Ableben bereits gedauert hat, abhängig ist. Die Jahresprämie für diese Versicherung werde bezeichnet mit $P'_{x\,\overline{n}|}$, wenn der Beitritt im Alter x erfolgt; $P'_{x\,\overline{m}|}$ bezeichne die Prämie bei m-jähriger Dauer der Versicherung für denselben veränderlichen Wert von k. Nun gilt folgendes Princip: wenn nicht allerlei praktische und selbst theoretische Hindernisse entgegenständen, könnte die Gesellschaft dem Versicherten, falls er m Jahr ($m < n$) nach dem Abschliefsen der Versicherung noch am Leben ist, die Reserve ${}_mV$ für seine Versicherung auszahlen. Und auch umgekehrt bildet die Summe, welche ihm von der Gesellschaft nach m Jahren ausgezahlt werden könnte, die Reserve nach m Jahren.

Wir rechnen jetzt folgendermafsen: Ein Versicherter zahlt m Jahre hindurch $P'_{x\,\overline{m}|}$ per Jahr, wofür, wenn er nach m Jahren noch am Leben ist, 1, oder bei früherem Ableben die Summe $k \cdot P'_{x\,\overline{m}|}$ ausgezahlt wird. Wenn man mit $\frac{P'_{x\,\overline{n}|}}{P'_{x\,\overline{m}|}}$ multiplicirt, so kann man deshalb sagen: der Versicherte zahlt $P'_{x\,\overline{n}|}$ per Jahr, wofür, wenn er nach m Jahren noch am Leben ist, die Summe $\frac{P'_{x\,\overline{n}|}}{P'_{x\,\overline{m}|}}$ oder bei früherem Ableben $k \cdot P'_{x\,\overline{n}|}$ ausgezahlt wird.

Zahlt also der x-jährige die Jahresprämie $P'_x \,{}_{n|}^{1}$, damit, wenn er nach n Jahren noch am Leben ist, die Summe 1, bei früherem Ableben die Summe $k \cdot P'_x \,{}_{n|}^{1}$ ausgezahlt wird, so könnte ihm, wenn er nach m Jahren noch lebt, die Summe $\dfrac{P'_x \,{}_{n|}^{1}}{P'_x \,{}_{m|}^{1}}$ ausgezahlt werden; d. h. die Reserve der Jahresprämie $P'_x \,{}_{n|}^{1}$ ist nach m Jahren:

$$ {}_mV = \frac{P'_x \,{}_{n|}^{1}}{P'_x \,{}_{m|}^{1}}. $$

Wenn die Gröfse k beim Ableben innerhalb des ersten Jahres 1, des zweiten 2, des dritten 3 u. s. w. ist, so wird beim Ableben die ganze Jahresprämie zurückgezahlt. Bisweilen schliefst man eine Rückgewähr im ersten Jahre aus, sodafs beim Ableben innerhalb des ersten Jahres nichts, innerhalb des zweiten Jahres die einfache, innerhalb des dritten Jahres die zweifache Jahresprämie zurückgezahlt wird u. s. w., und es ist nicht schwer, die Prämien $P_{m|}^{1}$ und $P_{n|}^{1}$ diesem Falle anzupassen.

Die ganze Berechnung zeigt, dafs die Formel auch bei Zahlung einer einmaligen Prämie mit oder ohne Rückgewähr bei früherem Ableben gilt; die P der Formel bedeuten dann die einmaligen Prämien. Die Formel gilt sogar für Jahresprämien, die innerhalb einer kürzeren Anzahl von Jahren zu Ende kommen, als die Versicherung dauert, aber nur, wenn man die Reserve für einen Zeitpunkt berechnet, wo die Prämienzahlung bereits beendet ist.

Eine Verfikation dieses letzten Falles bei der einfachen Versicherung ohne Rückgewähr erscheint nicht überflüssig. Die Dauer der Versicherung sei n Jahre; die Jahresprämie während 5 Jahren ist:

$$ P_{n|}^{1} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+4}}. $$

Nach m Jahren, wo $m \geqq 5$, ist:

$$ {}_mV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}}. $$

denn es gehen keine weiteren Prämien mehr ein. Nun kann man schreiben:

$$ {}_mV = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+4}} \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+4}}{D_{x+m}}. $$

Bezeichnet jetzt $P_{m|}^{1}$ die Prämie gleichfalls während 5 Jahren für eine Versicherungsdauer von m Jahren, so ist:

$$ P_{m|}^{1} = \frac{D_{x+m}}{N_{x-1} - N_{x+4}}, $$

und somit:

$$_mV = \frac{P_{\overline{n}|}^{1}}{P_{\overline{m}|}^{1}}.$$

Nun kann man sich denken, dafs eine Gesellschaft für die Versicherungen verschiedener Dauer auf den Erlebensfall mit und ohne Rückgewähr der Prämien bei früherem Ableben vollständige Tarife der einmaligen und der fortlaufenden Jahresprämien hat. Bei solcher Vollständigkeit ist die Anwendung der Formel (411) sehr zweckmäfsig. Diese Vollständigkeit kann man aber nicht erwarten, wenn es sich um eine abgekürzte Prämienzahlung handelt, und aufserdem ist dann die Methode während der Prämienzahlung nicht anwendbar; sie ist also für eine solche Prämienzahlung weniger angebracht.

Zwar ist die Formel eingerichtet zur Anwendung auf die Netto-Prämien, es ist aber wichtig zu bemerken, dafs, wenn die Brutto-Prämien aus einer constanten procentweisen Erhöhung des Netto-Tarifes entstehn, die Zahl k dermafsen gewählt werden kann, dafs die Brutto-Prämien im Fall des Ablebens gänzlich oder teilweise zurückerstattet werden.

Wir werden die Formel jetzt noch controliren für eine Versicherung im Erlebensfalle nach n Jahren, wobei die eingezahlte Brutto-Prämie unter Abzug einer Jahres-Prämie restituirt wird, wenn der Versicherte innerhalb dieser n Jahre stirbt. Wir setzen hierbei voraus, dafs der Zuschlag in Procenten ausgedrückt derselbe ist für jedes Alter des Zutretens.

Es sei also die Netto-Jahresprämie $= P'_{x\,\overline{n}|}$, die Brutto-Jahresprämie $= (1+\alpha)\,P'_{x\,\overline{n}|}$. Man findet die Netto-Prämie, indem man ihren Barwert gleich demjenigen der in der Zukunft eventuell statt zu findenden Auszahlung setzt. Man hat somit folgende Gleichung:

$$P'_{x\,\overline{n}|}\cdot(N_{x-1}-N_{x+n-1}) = D_{x+n}+(1+\alpha)\cdot P'_{x\,\overline{n}|}[C_{x+1}+2\,C_{x+2}+ \\ +3\,C_{x+3}+\ldots+(n-1)\,C_{x+n-1}];$$

hieraus folgt:

$$P'_{x\,\overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1}-N_{x+n-1}-(1+\alpha)[C_{x+1}+2C_{x+2}+3C_{x+3}+\ldots+(n-1)C_{x+n-1}]}.$$

Nach m Jahren ist die Reserve:

$$_mV = \frac{1}{D_{x+m}}\cdot\Big\{D_{x+n}+(1+\alpha)\cdot P_{x\,\overline{n}|}^{1}[m\,C_{x+m}+(m+1)\,C_{x+m+1}+\ldots+ \\ +(n-1)\,C_{x+n-1}]\Big\}-P_{x\,\overline{n}|}^{1}\cdot\frac{N_{x+m-1}-N_{x+n-1}}{D_{x+m}}.$$

Substituirt man hierin:

$$D_{x+n} = P_{x\,\overline{n}|}^{1} \{(N_{x-1} - N_{x+n-1}) - (1+\alpha)\cdot[C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \ldots + (n-1)\,C_{x+n-1}]\},$$

so kommt:

$${}_mV = \frac{1}{D_{x+m}} P'_{x\,\overline{n}|}^{1} \cdot \{(N_{x-1} - N_{x+n-1}) - (1+\alpha)\cdot[C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \ldots + (n-1)C_{x+n-1}] + (1+\alpha)\cdot[m\,C_{x+m} + (m+1)C_{x+m+1} + \ldots + (n-1)C_{x+n-1}] - (N_{x+m-1} - N_{x+n-1})\} =$$

$$= \frac{1}{D_{x+m}} \cdot P'_{x\,\overline{n}|}^{1} \{N_{x-1} - N_{x+m-1} - (1+\alpha)[C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \ldots + (m-1)C_{x+m-1}]\} =$$

$$= P'_{x\,\overline{n}|}^{1} : \frac{D_{x+m}}{N_{x-1} - N_{x+m-1} - (1+\alpha)[C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \ldots + (m-1)C_{x+m-1}]},$$

d. h.

$${}_mV = P'_{x\,\overline{n}|}^{1} : P'_{x\,\overline{m}|}^{1}.$$

254. Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, dafs viele Gesellschaften es sich bei der Berechnung der Reserve für die Auszahlung auf den Erlebensfall mit Rückgewähr der Prämie bei früherem Ableben bequem machen. Sie lassen dieselbe einfach aus den gezahlten Prämien abzüglich der Administrationskosten bestehn, und zwar unter Berücksichtigung der Verzinsung.

Bei der Versicherung auf den Erlebensfall ohne Rückgewähr wäre eine solche Reserve zu gering; bei der Versicherung aber mit Rückgewähr ist die Netto-Prämie natürlich höher als ohne Rückerstattung, und die eben besprochene Reserve wird in der Regel höher sein als die Reserve für die Versicherung ohne die Rückerstattung. Hierbei achte man darauf, dafs wegen der sehr grofsen Sterblichkeit unter den Kindern in den ersten Lebensjahren die mathematische Reserve für die Versicherung mit Rückerstattung oft kleiner ist als die Reserve für die ohne Rückerstattung.

Wieder andere Gesellschaften lassen bei der Berechnung der Reserve die Rückerstattung der Prämien ganz aufser Betracht und berechnen die Reserve einfach, als wenn es sich um eine Versicherung ohne Rückerstattung handelte. Wenn man berücksichtigt, dafs erfahrungsgemäfs die Reserve, nachdem die Versicherung einige Jahre

gedauert hat, für die Versicherung ohne Rückgewähr höher zu sein pflegt als die gezahlten Brutto-Prämien für die Versicherung mit Rückerstattung, so ist die Gefahr bei jenem Verfahren nicht grofs. Findet nämlich ein Todesfall statt, so ist dann für die dadurch bedingte Auszahlung in der Regel die ganze Prämie vorhanden. Es ist ratsam, sich durch Versuche darüber Gewifsheit zu verschaffen.

Ist aber die Versicherung gegen einmalige Prämie unter der Bedingung der Rückerstattung der Prämie bei früherem Ableben abgeschlossen, so ist es notwendig und allerdings auch bequem, der Rückerstattung Rechnung zu tragen.

Es giebt Gesellschaften, welche zur Bestimmung der Reserve bei Versicherung im Erlebensfall die Prämie betrachten als eine Annuität und diese also derweise verzinsen, dafs dieselbe am gestellten Termin bis zum versicherten Kapital angewachsen ist.

Es ist vielleicht nicht ganz überflüssig zu bemerken, dafs die Formel (411) nicht für die Reserve bei gemischter Versicherung gilt, weil dann beim Ableben eine feste Summe ausgezahlt wird, während in dem oben besprochenen Falle die Auszahlung auf den Todesfall der Prämie proportional ist.

Es findet sich hier eine passende Gelegenheit, einen Satz anzuführen, welcher in No. 249 bereits mittels einer Formel bewiesen ist und wegen seiner practischen Bedeutung vermeldenswert erscheint.

Die Reserve einer Versicherung auf den Erlebensfall ohne Rückgewähr für eine Person eines bestimmten Alters hängt in jedem beliebigen Augenblick ab von den eingezahlten Prämien, unabhängig von der Dauer, auf welche die Versicherung abgeschlossen wurde und es ist dabei gleichgültig, ob es eine Kapitals- oder Renten-Versicherung gilt. Zur Bestimmung der Reserve hat man namentlich die Prämie mit Beachtung der vergangenen Sterbenswahrscheinlichkeit seit dem Beginn der Versicherung zu kapitalisiren.

Die Reserve, abgeleitet aus derjenigen des Vorjahres.

255. Die Reserve per Person sei $m-1$ Jahr nach dem Anfang der Versicherung (mag letztere sein, von welcher Art sie wolle) ${}_{m-1}V$, ${}_{m}V$ also die Reserve ein Jahr später, P sei die Prämie, die per Person am Anfang des m^{ten} Jahres gezahlt wird, l_{x+m-1} und l_{x+m} seien die Anzahlen der im Alter $x+m-1$ bezw. $x+m$ nach der Sterblichkeitstafel von l_x Personen, die im Alter von x Jahren dieselbe Ver-

sicherung auf denselben Betrag abgeschlossen haben mögen, übrig gebliebenen. Endlich sei U der Betrag der Auszahlung, welche auf Grund der Sterblichkeitstafel am Ende des m^{ten} Jahres bevorsteht.

Nach dem Begriffe der Reserve, wie er in No. 235 und 236 erläutert ist, beträgt am Ende des m^{ten} Jahres die totale Reserve für die l_{x+m} übrig bleibenden Personen:

$$l_{x+m-1}\,({}_{m-1}V + P)\,(1+i) - U.$$

Am Anfang des Jahres war nämlich für jeden der l_{x+m-1} Versicherten die Summe ${}_{m-1}V$ vorhanden, jeder hat P als Prämie gezahlt; dies giebt zusammen $l_{x+m-1}\,({}_{m-1}V + P)$. Diese Summe hat sich das Jahr über verzinst; subtrahirt man von ihrem Endbetrag die Auszahlungssumme U, so bleibt die totale Reserve übrig.

Durch Division der letzteren mit der Anzahl der Personen l_{x+m}, ergiebt sich die Reserve per Person am Ende des m^{ten} Jahres:

$${}_mV = \frac{1}{l_{x+m}}\,[l_{x+m-1}\,({}_{m-1}V + P)\,(1+i) - U]. \qquad (412)$$

Handelt es sich um eine Versicherung auf den Todesfall, so ist U die Auszahlungssumme in Folge des Ablebens nach der Sterblichkeitstafel. Bei einer Versicherung auf den Erlebensfall ist, so lange der Augenblick der Auszahlung noch bevorsteht, $U = 0$, oder eventuell = den zurück zu erstattenden Prämien beim früheren Ableben. Hat die Prämienzahlung schon aufgehört, wie beispielsweise bei Zahlung einer einmaligen Prämie, so ist $P = 0$. Bei der Leibrente ist gleichfalls $P = 0$ und unter U hat man den jährlichen Betrag der Rente zu verstehen, vorausgesetzt, dafs dieselbe am Ende des Jahres ausgezahlt wird.

Die Formel gilt auch für zwei Leben, wenn unter den l Paare verstanden werden, und ebenso für Witwenpensionen, so lange Mann und Frau beide am Leben sind und U den Wert der Pensionen bedeutet, deren Auszahlung bevorsteht.

256. Wir wollen indessen für den Fall, dafs die Auszahlung beim Ableben stattfindet, für die einzelne Versicherung noch auf eine andere Weise ${}_mV$ aus ${}_{m-1}V$ ableiten.

Die Auszahlung beim Ableben betrage die Einheit per Person; für jeden Todesfall, der im m^{ten} Jahr stattfindet, zahlt die Gesellschaft zwar die Einheit aus, aber am Ende des Jahres ist für jeden Versicherten die Summe ${}_mV$ vorhanden, welche aus der totalen Reserve für jede Auszahlung zu Gebote steht, sodafs für die Gesellschaft jede

Auszahlung der Ausgabe $1 - {}_mV$ entspricht; die Wahrscheinlichkeit, dafs der $x+m-1$-jährige im nächsten Jahr stirbt, ist:

$$\frac{l_{x+m-1} - l_{x+m}}{l_{x+m-1}};$$

darum hat man die Gleichung:

$${}_mV = ({}_{m-1}V + P)(1+i) - \frac{l_{x+m-1} - l_{x+m}}{l_{x+m-1}}(1 - {}_mV), \quad (413)$$

aus welcher sich ergiebt:

$${}_mV = \frac{l_{x+m-1}}{l_{x+m}}\left\{({}_{m-1}V + P)(1+i) - \frac{l_{x+m-1} - l_{x+m}}{l_{x+m-1}}\right\}. \quad (414)$$

Diese Formel entspricht ganz der Formel (412), denn in unserem Falle ist die gesammte Auszahlung: $U = l_{x+m-1} - l_{x+m}$. Wir wollen Formel (414) verificiren für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall; in diesem Falle ist:

$$P = \frac{1}{\mathfrak{a}} - d,$$

$${}_{m-1}V = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+m-1}}{\mathfrak{a}_x} \text{ (No. 252).}$$

Substituiren wir dies in Formel (414), so wird sie nach leichter Umrechnung:

$${}_mV = 1 - (1+i) \cdot \frac{l_{x+m-1}}{l_{x+m}} \cdot \frac{\mathfrak{a}_{x+m-1} - 1}{\mathfrak{a}_x}.$$

Nun ist nach Formel (171):

$$\mathfrak{a}_{x+m-1} = 1 + v \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m-1}} \cdot \mathfrak{a}_{x+m},$$

also:

$$(1+i) \cdot \frac{l_{x+m-1}}{l_{x+m}} \cdot (\mathfrak{a}_{x+m-1} - 1) = \mathfrak{a}_{x+m}.$$

Die letzte Formel für ${}_mV$ geht also über in:

$${}_mV = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x},$$

d. h. in Formel (410).

Die Reserve, entwickelt aus dem Überschufs der Prämienzahlung über das Risico, welches die Gesellschaft hatte.

257. Um während m Jahren auf eine Auszahlung im Falle des Ablebens versichert zu sein, mufs der x-jährige jährlich zahlen:

$$\frac{A_x - \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot A_{x+m}}{\mathfrak{a}_x - \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \mathfrak{a}_{x+m}}, \text{ (No. 97 und 104)}$$

um lebenslänglich versichert zu sein, dagegen jährlich:

$$P_x = \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x}.$$

Die Differenz der beiden Prämien beträgt:

$$h_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \frac{\mathfrak{a}_x A_{x+m} - A_x \cdot \mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x \left(\mathfrak{a}_x - \frac{D_{x+m}}{D_x} \mathfrak{a}_{x+m}\right)} =$$

$$= \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \frac{A_{x+m} - P_x \cdot \mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x - \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \mathfrak{a}_{x+m}}.$$

Zur Versicherung der Summe 1 auf den Erlebensfall nach m Jahren ist die jährliche Prämie des x-jährigen:

$$\frac{\frac{D_{x+m}}{D_x}}{\mathfrak{a}_x - \frac{D_{x+m}}{D_x} \mathfrak{a}_{x+m}},$$

sodafs eine jährliche Prämie h_x (d. h. das $(A_{x+m} - P_x \mathfrak{a}_{x+m})$-fache der vorigen) auf den Erlebensfall nach m Jahren die Auszahlung von $A_{x+m} - P_x \cdot \mathfrak{a}_{x+m}$ ermöglichen wird. Dies ist aber gerade die Reserve nach m Jahren für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall.

Aus diesem Gesichtspunkte kann man sagen: der x-jährige, welcher lebenslänglich auf den Todesfall versichert ist, zahlt dafür lebenslänglich jährlich P_x; dafür ist während m Jahren jährlich der Teil

$$\frac{A_x - \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot A_{x+m}}{\mathfrak{a}_x - \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \mathfrak{a}_{x+m}}$$

bestimmt, um das Risico dieser m Jahre zu decken, während der Rest h_x als eine zweite Prämie betrachtet werden mufs, die dazu bestimmt ist, im Falle des Überlebens der m Jahre am Ende dieser Zeit die Reserve zu bilden.

258. Und hier zeigt sich der Irrtum, den gelegentlich Versicherte begehn, die nach einigen Jahren selbst den Wert ihrer Versicherung berechnen wollen, wenn sie einfach aus den Tarifen ausfindig machen, wieviel sie jährlich mehr gezahlt haben, als nötig gewesen wäre, um für jene Jahre versichert zu sein, und dann diese Differenzen bis zur Gegenwart aufzinsen, ohne die vergangene Sterbenswahrscheinlichkeit zu beachten.

Diese Rechner vergessen, dafs sie in den vorhergehenden Jahren hätten sterben können und dann am Ende der m Jahre keine Reserve vorhanden zu sein brauchte, die wirkliche Reserve also höher sein wird, als sie dieselbe auf die beschriebene Weise finden.

Als sehr deutlich sprechendes Beispiel nehme man den Fall, dafs ein 20-jähriger so thöricht ist, die Versicherung eines Kapitals abzuschliefsen und dabei die Bedingung zu stellen, dafs, falls er das Alter 100 Jahr erreichen sollte, die Auszahlung nicht stattzufinden braucht; er erspart dann durch dieses Ausschliefsen der letzten möglichen Lebensjahre so gut wie nichts, und wenn er 100 Jahre alt wird, so sind die früheren Ersparnisse an den Jahresprämien, bis zur Gegenwart aufgezinst, ein äufserst geringer Betrag gegenüber der Auszahlung, die er bei lebenslänglicher Versicherung zu beanspruchen hätte.

Wir wollen die Berechnung für den Fall der einmaligen Prämienzahlung wirklich durchführen. Für den x-jährigen beträgt zur lebenslänglichen Versicherung die einmalige Prämie A_x. Ist 100 das höchste Alter der Sterblichkeitstafel, dann ist die einmalige Prämie zur Versicherung bis zum 100sten Jahr $A_x - v \cdot \frac{D_{100}}{D_x}$, sodafs man bei der Einlage spart:

$$h = v \cdot \frac{D_{100}}{D_x} = \frac{l_{100}}{l_x} \cdot v^{100-x} \cdot v.$$

Sollte der Versicherte das 100ste Jahr erreichen, so würde diese Ersparnis in den $100 - x$ Jahren durch den Zins zu

$$h \cdot (1+i)^{100-x} = \frac{l_{100}}{l_x} \cdot v$$

angewachsen sein, d. h. nur zu einem sehr kleinen Teil der Reserve bei lebenslänglicher Versicherung, denn diese beträgt v, wozu die geringe

Gröfse h unter Berücksichtigung der Sterbenswahrscheinlichkeit und des Zinses während der $100 - x$ Jahre für die Gesellschaft angewachsen ist und jener Teil ist geringer je nachdem x kleiner ist.

Risico-Prämie und Spar-Prämie.

259. Wenn eine Gesellschaft eine Auszahlung macht, so besteht, wie gesagt, ihre Ausgabe nicht aus dem versicherten Betrag, sondern aus dem Betrag, abzüglich der Reserve, die für die Versicherung vorhanden ist und durch die Auszahlung frei wird.

Handelt es sich wieder um eine Versicherung auf den Todesfall für eine oder mehr Personen, so ist das Risico, welches die Gesellschaft für eine Versicherung vom Betrage der Einheit während des m^{ten} Jahres läuft, $1 - {}_mV$.

Betrifft die Versicherung nur eine Person, so ist die Auszahlungswahrscheinlichkeit während des m^{ten} Jahres am Anfang dieses Jahres:

$$\frac{l_{x+m-1} - l_{x+m}}{l_{x+m-1}},$$

der Wert des Risicos der Gesellschaft also am Anfang dieses Jahres:

$$v \cdot \frac{l_{x+m-1} - l_{x+m}}{l_{x+m-1}} (1 - {}_mV). \qquad (415)$$

Es ist dies die sogenannte Risico-Prämie im m^{ten} Jahr.

Weil ${}_mV$ bei denselben Werten für x und m viel gröfser ist bei gemischter Versicherung als bei lebenslänglicher und wieder gröfser als bei temporärer Versicherung, so ist die Risico-Prämie am gröfsten bei temporärer, am geringsten bei gemischter Versicherung.

Nun kann man sagen, dafs die jährliche Prämie aus zwei Teilen besteht: 1. aus einer Risico-Prämie, 2. einer Spar-Prämie, die beide veränderlich sind. Wenn man die Differenz zwischen der Jahresprämie und der Risico-Prämie fortwährend kapitalisirt, so gelangt man wirklich zu der Reserve.

Sei P_x die fortwährend gleich bleibende Jahresprämie für eine lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall vom Betrage der Einheit, dann sind nach m Jahren die Prämien angewachsen zu:

$$P_x (r^m + r^{m-1} + r^{m-2} + \ldots + r) = P_x \cdot \frac{r^{m+1} - r}{r - 1}, \qquad (416)$$

wo wir zur Abkürzung $1 + i = r$ gesetzt haben.

Die verschiedenen Risico-Prämien sind:

$$v \cdot \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) \cdot (1 - {}_1V),$$

$$v \cdot \left(1 - \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\right) \cdot (1 - {}_2V), \text{ u. s. w.;}$$

kapitalisirt man dieselben und setzen wir

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x, \quad \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} = p_{x+1}, \text{ u. s. w.,}$$

so geben sie nach m Jahren:

$$(1 - p_x)(1 - {}_1V) \cdot r^{m-1} + (1 - p_{x+1})(1 - {}_2V) \cdot r^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + (1 - p_{x+m-1})(1 - {}_mV). \qquad (417)$$

Unter Berücksichtigung, dafs

$$P_x = \frac{1}{a_x} - d = \frac{1}{a_x} - \frac{r-1}{r},$$

dafs $${}_qV = 1 - \frac{a_{x+q}}{a_x}, \text{ also } 1 - {}_qV = \frac{a_{x+q}}{a_x}, \text{ und}$$

$$p_y\, a_{y+1} = r\,(a_y - 1),$$

reducirt sich (416) zu

$$\frac{1}{a_x} \cdot \frac{r^{m+1} - r}{r-1} - r^m + 1,$$

und (417) zu

$$\frac{a_{x+m}}{a_x} + \frac{1}{a_x} \cdot \frac{r^{m+1} - r}{r-1} - r^m,$$

und man findet wirklich:

$$(416) - (417) = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x} = {}_mV.$$

260. Unter diesem Gesichtspunkte ist es denkbar, dafs jemand, der x Jahr alt ist und jährlich die Summe P_x auswirft, um beim Ableben genau die Summe 1 zu hinterlassen, dies in der Weise einrichtet, dafs er sich jedes Jahr nur für dieses eine Jahr versichert und das, was von P_x übrig bleibt, selbst aufbewahrt und verzinst.

Für das erste Jahr mufs er dann die einjährige Versicherung zum Betrage von $1 - {}_1V$ abschliefsen; dafür hat er zu zahlen:

$$v \cdot (1 - p_x)(1 - {}_1V).$$

der Rest von P_x, nämlich:

$$P_x - v \cdot (1 - p_x)\,(1 - {}_1V),$$

wächst bis zum Ende des Jahres durch den Zins zu ${}_1V$ an.

Beim Ableben innerhalb des ersten Jahres wird $1 - {}_1V$ ausgezahlt; der Versicherte hat aber ${}_1V$ erspart und hinterläfst also wirklich 1.

Wenn er noch lebt, wirft er am Anfang des zweiten Jahres wieder P_x aus, versichert sich aber für $1 - {}_2V$, wofür er zahlt:

$$v \cdot (1 - p_{x+1})\,(1 - {}_2V);$$

der Rest, vermehrt um das schon ersparte ${}_1V$, und verzinst, ist am Ende des zweiten Jahres ${}_2V$, sodafs beim Ableben innerhalb des zweiten Jahres $1 - {}_2V$ ausgezahlt wird und ${}_2V$ erspart ist, also wieder 1 hinterlassen wird u. s. w. Die praktische Unausführbarkeit eines solchen Verfahrens springt zwar ins Auge, die Betrachtung ist aber recht geeignet, die Entstehungsweise der Reserve zu verdeutlichen.

261. Theoretisch genommen kann man die Reserve selber bilden bei jeder Weise der Prämienzahlung, wenigstens wenn die Prämie während einer gewissen Zeit nicht geringer ist, als das Risico während dieser Zeit es erfordert. Wir wollen dies noch für die einmalige Prämie zeigen. Ein x-jähriger will bei seinem Ableben die Summe 1 hinterlassen und bestimmt für diesen Zweck von vornherein eine Summe, von der bei seinem Ableben nichts übrig bleiben soll; die Reserve will er selbst verwalten und sich also jedes Jahr für nicht mehr versichern, als durchaus notwendig ist. Die auszuwerfende Summe beträgt A_x, die einmalige Prämie für den x-jährigen; er versichert sich im ersten Jahr auf die Summe $1 - A_{x+1}$, wofür $\frac{C_x}{D_x}(1 - A_{x+1})$ zu zahlen ist; von der zur Versicherung bestimmten Summe A_x behält er dann

$$A_x - \frac{C_x}{D_x}(1 - A_{x+1})$$

übrig; weil aber (vergl. No. 102)

$$A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} A_{x+1},$$

so reducirt sich der Rest zu

$$\frac{D_{x+1} + C_x}{D_x} \cdot A_{x+1} = v \cdot A_{x+1}.$$

Dieses wächst wirklich in einem Jahr durch den Zins an zu A_{x+1}, der Reserve nach einem Jahr; stirbt der Versicherte im Laufe des

Jahres, so wird am Ende des Jahres durch die Gesellschaft $1 - A_{x+1}$ ausgezahlt, was zusammen mit dem Ersparten die Summe 1 ausmacht.

Ist er beim Anfang des nächsten Jahres noch am Leben, dann versichert er sich wieder für ein Jahr, jetzt aber auf die Summe $1 - A_{x+2}$, wofür er zahlt:

$$\frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}(1 - A_{x+2}).$$

Von dem Ersparten bleibt übrig:

$$A_{x+1} - \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}(1 - A_{x+2}),$$

was in einem Jahr durch Verzinsung zu A_{x+2} anwächst u. s. w.

Dasselbe Verfahren ist möglich bei temporärer Versicherung auf den Todesfall und bei gemischter, nicht aber bei aufgeschobener Versicherung.

Wenn die Versicherung n Jahr aufgeschoben ist, so ist die einmalige Prämie für den x-jährigen:

$${}_n|A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}.$$

Die Reserve nach einem Jahr, d. h. die einmalige Prämie für den $x+1$-jährigen, damit die Auszahlung auf den Todesfall von demselben Alter an erfolge, ist:

$${}_{n-1}|A_{x+1} = \frac{M_{x+n}}{D_{x+1}} = \frac{D_x}{D_{x+1}} \cdot {}_n|A_x = (1+i) \cdot \frac{l_x}{l_{x+1}} \cdot {}_n|A_x.$$

Wenn man die Summe ${}_n|A_x$ selbst aufhebt und sich also noch nicht versichert, wächst sie durch Verzinsung an zu $(1+i) \cdot {}_n|A_x$, also zu weniger als ${}_{n-1}|A_{x+1}$. Dies erklärt sich dadurch, dafs, so oft ein Versicherter während der Dauer des Aufschubs stirbt, keine Auszahlung stattfindet und die Reserve der Gesellschaft zufällt. Aus demselben Grunde ist eine solche eigene Verwaltung der Reserve auch ausgeschlossen bei Versicherung auf den Erlebensfall, bei Leibrente, Witwenkapital oder Witwenpension.

(Man sehe einen Aufsatz des Verfassers: Risico-Prämie in der „Zeitschrift für Versicherungs-Recht und -Wissenschaft, IV. Jahrgang", und over Risico-premie im holländischen Archief V. Teil.)

Die Reserve, vom Anfange der Versicherung gerechnet.

262. Der Reserve-Formel für lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall wollen wir noch eine andere Form geben, weniger für den

Gebrauch als um den Begriff der Reserve als des zu viel Gezahlten noch etwas anders zu beleuchten wie in No. 257—259. Wir gehen aus von der Formel:

$$ {}_mV = A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}, $$

und schreiben:

$$ a_{x+m} = \frac{N_{x+m-1}}{D_{x+m}} = \frac{N_{x-1} - (N_{x-1} - N_{x+m-1})}{D_{x+m}}, $$

sodafs

$$ {}_mV = \frac{P_x (N_{x-1} - N_{x+m-1}) - (P_x N_{x-1} - D_{x+m} A_{x+m})}{D_{x+m}}. $$

Da aber $P_x = \frac{D_x A_x}{N_{x-1}}$, also $P_x N_{x-1} = D_x A_x = M_x$ und

$$ D_{x+m} A_{x+m} = M_{x+m}, $$

so wird diese Reserve-Formel:

$$ {}_mV_x = \frac{P_x (N_{x-1} - N_{x+m-1}) - (M_x - M_{x+m})}{D_{x+m}}. \qquad (418) $$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $(1+i)^{x+m}$, so stellt der Zähler den Wert der Jahresprämien P_x dar (m Jahr nach dem Beginn der Versicherungen) für die l_x Personen, die zu gleicher Zeit beigetreten sind und unter welchen die Sterblichkeit nach der Sterblichkeitstafel stattgefunden hat, vermindert um den Wert aller Auszahlungen die nach der Sterblichkeitstafel in den m Jahren stattgefunden haben. Der Zähler ist also einfach die totale Reserve für die nach m Jahren noch dauernden Versicherungen. Der Nenner, der l_{x+m} wird, verteilt diese Reserve gleichmäfsig über die l_{x+m} Personen, die nach m Jahren von den l_x Personen noch übrig sind, sodafs ${}_mV_x$ die Reserve pro Kopf darstellt.

Man sieht leicht, wie für andere Versicherungsweisen zu rechnen wäre; wir kommen dabei auf unsere ursprüngliche Betrachtung in No. 235 zurück. Die Formel (418) ist also eine Anwendung der retrospectiven Methode, von welcher in No. 235 die Rede war, und es ist nun sehr deutlich, dafs, wenn P_x die Netto-Prämie ist, retrospective und prospective Methode zu derselben Reserve führen.

Totale und individuelle Reserve bei lebenslänglicher Versicherung auf den Todesfall gegen lebenslängliche gleichbleibende Jahresprämie.

263. Die Formel (418) wollen wir noch umformen; zunächst kann man sie schreiben:

$$ {}_mV_x = \frac{1}{D_{x+m}} \cdot \Big[(P_x D_x - C_x) + (P_x D_{x+1} - C_{x+1}) + \ldots $$
$$ \ldots + (P_x D_{x+m-1} - C_{x+m-1}) \Big]. $$

Setzen wir die Prämie zur Versicherung während eines Jahres für den x-jährigen $= A^1_{x\,\overline{1|}}$, dann ist

$$ A^1_{x\,\overline{1|}} = v \cdot \frac{d_x}{l_x} = \frac{C_x}{D_x}, \text{ also } C_x = A^1_{x\,\overline{1|}} D_x . $$

Dadurch wird die Formel:

$$ {}_mV_x = \frac{1}{D_{x+m}} \cdot \Big[(P_x - A^1_{x\,\overline{1|}}) D_x + (P_x - A^{\,1}_{\overline{x+1}\,.\,\overline{1|}}) D_{x+1} + \ldots $$
$$ + (P_x - A^{\,1}_{\overline{x+m-1}\,.\,1|}) D_{x+m-1} \Big]. $$

Wenn man $D_x = \frac{l_x}{(1+i)^x}$ einführt, erhält man:

$$ {}_mV_x = \frac{1}{l_{x+m}} \cdot \Big[(P_x - A^{\,1}_{\overline{x}\,\overline{1|}}) l_x (1+i)^m + (P_x - A^{\,1}_{\overline{x+1}\,.\,\overline{1|}}) l_{x+1} (1+i)^{m-1} + $$
$$ + (P_x - A^{\,1}_{\overline{x+2}\,.\,\overline{1|}}) l_{x+2} (1+i)^{m-2} + \ldots $$
$$ \ldots + (P_x - A^{\,1}_{\overline{x+m-1}\,.\,\overline{1|}}) l_{x+m-1} (1+i) \Big]. \qquad (419) $$

Die Differenzen $P_x - A^{\,1}_{\overline{x}\,\overline{1|}}$, $P_x - A^{\,1}_{\overline{x+1}\,.\,\overline{1|}}$ u. s. w. nehmen fortwährend ab, und werden, wenn m zunimmt, endlich negativ.

Die eingeklammerte Gröfse in Formel (419) stellt für jeden Wert von m die totale Reserve für die Gruppe der l_x zu gleicher Zeit Beigetretenen dar und zeigt an, wie diese totale Reserve entsteht, indem man jährlich den Überschufs der Jahresprämien für die sämmtlichen am Leben Gebliebenen über die Prämien, welche sie zahlen müfsten, um für ein Jahr versichert zu sein, kapitalisirt.

Die totale Reserve nimmt in den ersten Jahren fortwährend zu,

von einem gewissen Augenblicke an aber fortwährend ab, um beim letzten Todesfall 0 zu werden.

Die Reserve per Person nimmt indessen verhältnismäfsig viel stärker zu als die totale Reserve, weil diese bei zunehmendem m auf immer weniger Personen verteilt werden mufs, und diese Zunahme per Person geht unbedingt weiter, auch wenn die totale Reserve anfängt abzunehmen, und unmittelbar vor dem letzten Todesfalle ist sie dem versicherten Betrage gleich.

Wollte der einzelne Versicherte seine Reserve berechnen, indem er jedes Jahr den Überschufs seiner gleichbleibenden Prämie über die Prämie, gegen welche er sich für dieses Jahr versichern kann, kapitalisirt, so ergäbe dies nach m Jahren die Summe:

$$(P_x - A^1_{x\,\overline{1|}})(1+i)^m + (P_x - A^{\ 1}_{x+1\,.\,\overline{1|}})(1+i)^{m-1} +$$
$$+ (P_x - A^{\ 1}_{x+2\,.\,\overline{1|}})(1+i)^{m-2} + \ldots + (P_x - A^{\ 1}_{x+m-1\,.\,\overline{1|}})(1+i).$$

Im Anfang nimmt diese Summe ziemlich schnell zu — weniger aber als die eigentliche Reserve per Person — dann nimmt sie ab und wird sogar negativ. Läfst man also die Sterbenswahrscheinlichkeit aufser Betracht, so kommt man zu ganz falschen Ergebnissen; dies tritt hier noch stärker hervor als in No. 258, wo die m Jahre in eine Gruppe zusammengefafst waren.

Prof. Dr. **P. van Geer** zeigt dies ziffermäfsig an einem Beispiel in dem holländischen Jahrbuch für Lebensversicherung für das Jahr 1891.

Die in dieser Hinsicht mathematisch genaue Weise des Sparens für den einzelnen Versicherten ist indessen in No. 260 gegeben.

Die Verwendung der Reserve.

264. Um die Notwendigkeit der Reserve scharf hervortreten zu lassen, ist es am besten, eine zahlreiche Gruppe (die Anzahl der Lebenden nach der Sterblichkeitstafel) von Personen gleichen Alters anzunehmen, die sich gleichzeitig für Auszahlung derselben Summe auf den Todesfall gegen Jahresprämie versichern, dann die totale Reserve zu verfolgen, wie sie sich für diese Gruppe nach 5, 10 Jahren u. s. w. gestalten wird, natürlich unter der Voraussetzung, dafs die Sterblichkeit nach der Sterblichkeitstafel stattfindet, und dann zu sehen, wie grofs jedesmal Prämien-Empfang und Auszahlung sein wird. Auf diese Weise wird man finden, dafs in den ersten Jahren der Prämien-Empfang viel gröfser ist als die Auszahlung, und dafs darum die Reserve schnell zu-

nimmt. Es kommt aber ein Augenblick, wo der jährliche Prämien-Empfang geringer ist als die jährliche Auszahlung, dafs ein Teil des Zinses der Reserve zugesetzt werden mufs, die Reserve nimmt dann aber noch immer zu. Endlich übersteigt die Auszahlung die Prämien-Einnahme so sehr, dafs der Zins der Reserve nicht mehr aushilft; dann mufs man mehr und mehr die Reserve selbst angreifen, sodafs diese immer mehr abnimmt, um endlich = 0 zu werden. (Man vergleiche hierzu No. 263.)

Wenn eine Gesellschaft fortwährend neue Versicherungen aufnimmt — man setze z. B. voraus, jedes Jahr gleich viel — dann dauert es zwar länger, ja viel länger, ehe die Auszahlung höher wird als der Prämien-Empfang, der Augenblick kommt aber, und das ist der kritische Moment, wo der Mangel an Reserve sich fühlbar machen würde, wenn die Gesellschaft keine solche gebildet hätte. In diesem Falle wehe der Gesellschaft, oder vielmehr wehe den Versicherten!

Das System der natürlichen Prämien.

265. Bei der Versicherung auf den Todesfall nennt man natürliche Prämie die Prämie, welche erforderlich ist, um nur für ein Jahr versichert zu sein.

In No. 234 ist schon erwähnt, dafs es unpraktisch ist, sich lebenslänglich gegen eine alljährlich zunehmende Prämie zu versichern.

Dieses System der natürlichen Prämien wird denn auch nirgendwo consequent angewendet; jedoch haben einige amerikanische Gesellschaften ein System eingeführt, bei welchem der Versicherte anfangs nur wenig mehr als die natürliche Prämie zahlt, sodafs ein Prämientarif entsteht, der um ungefähr 50% niedriger ist als die gewöhnlichen Tarife für lebenslängliche gleichbleibende Jahresprämie; hierbei läfst man die Möglichkeit, dafs die Prämie später etwas zunehmen wird, allerdings durchblicken, man formirt auch wohl einige Reverse, aber zugleich hofft man auf so grofsen Gewinn durch Anullirung, auf so günstiges Ableben, dafs die Versicherungsnehmer den Eindruck bekommen, ihre Prämien würden in Zukunft nur wenig oder gar nicht zunehmen. Man braucht kaum zu sagen, zu welchen Enttäuschungen ein solches System auf die Dauer führen mufs. Die Zukunft rächt sich an die Gegenwart.

Negative Netto-Reserve.

266. Schon früher ist der Leser darauf aufmerksam gemacht worden, dafs für jede Versicherungsweise eine Jahresprämie wenigstens

grofs genug sein mufs, um jedes Jahr das Risico zu decken, welches die Gesellschaft in diesem Jahre läuft. Wollte man z. B. die Jahresprämie bestimmen, die für ein neugeborenes Kind während seines ganzen Lebens für eine Versicherung auf den Todesfall gezahlt werden müfste, so würde diese dargestellt sein durch:

$$P_0 = \frac{M_0}{a_0} = \frac{1}{a_0} - d.$$

Auch sind wirklich Tarife aufgestellt worden, in welchen selbst für die allerjüngsten Kinder solche gleichbleibende Jahresprämien berechnet sind; das war aber falsch. Die Prämie P_0 ist doch viel niedriger als die, welche für das neugeborene Kind gezahlt werden müfste, um auf ein Jahr versichert zu sein, und zwar, weil die Sterblichkeit unter neugeborenen Kindern sehr grofs ist und zunächst bis zu 12 oder 15 Jahren abnimmt. Wenn man die Prämie P_0 wählt, läfst man Jahre lang für das grofse Risico nachzahlen, welches die Gesellschaft in den ersten Jahren gelaufen ist.

Die Wahl einer anderen Sterblichkeitstafel oder eines anderen Zinsfufses kann wohl eine Änderung herbeiführen, im Allgemeinen aber wird erst die gleichbleibende Jahresprämie des 40—50-jährigen derjenigen des 0-jährigen gleich sein.

Nun wäre nach m Jahren die Reserve für den 0-jährigen:

$${}_mV_0 = (P_{(m)} - P_0)\, a_{(m)},$$

es würde also bisweilen 40—50 Jahre dauern, ehe die Reserve positiv würde; alle früheren Jahre wäre $P_{(m)} < P_0$, die Reserve also negativ.

Hätte also eine Gesellschaft nur Kinder von dem allerjüngsten Alter gegen gleichbleibende Jahresprämie versichert, so würde sie im ersten Jahr schon Schwierigkeiten haben, die zu leistenden Auszahlungen würden viel, sehr viel mehr betragen als die Prämien-Einnahme.

Allerdings könnte sie den fehlenden Betrag zunächst vorschiefsen, es würde aber eine lange Reihe von Jahren dauern, ehe das Defizit getilgt wäre. Überdies fände diese Tilgung nur dann statt, wenn die Versicherten sich nicht willkürlich zurückziehn, denn auf ihre lebenslängliche Prämienzahlung hat man ja die Rechnung begründet. Ein solch willkürliches Zurücktreten läge hier aber sehr nahe, denn mit jedem folgenden Lebensjahre wird die gleichbleibende Jahresprämie, welche beim Beitritt in diesem Alter zu zahlen ist, geringer, um erst bei 6, 7 oder 8 Jahren ihr Minimum zu erreichen, sodafs es im pecuniären Interesse der Versicherten läge, sich streichen zu lassen und

sich sofort gegen eine viel geringere Prämie aufs Neue lebenslänglich zu versichern.

Damit willkürlich Austretende der Gesellschaft keinen Schaden bringen, müfsten sie — von andern Umständen ganz abgesehn — beim Ausscheiden den Betrag der Reserve, so lange diese negativ ist, der Gesellschaft erstatten. Bei positiver Reserve zahlen die Teilnehmer anfangs zu viel für ihre Versicherung — und daher eben die Reserve —, bei negativer Reserve zahlen sie anfangs zu wenig.

Wir haben hier vorausgesetzt, dafs die Gesellschaft ausschliefslich sehr junge Kinder versichert und darum stets Vorschufs leisten mufs. Schliefst sie Versicherungen für alle möglichen Altersstufen und bestimmt sie ihre Reserve als den gegenwärtigen Wert der zukünftigen Auszahlungen, vermindert um den Wert der zukünftigen Prämien, so wird im Allgemeinen die Reserve positiv sein. Dies ändert zwar nichts an der Thatsache, dafs bei den Kindern die künftigen Prämien einen höheren Wert haben als die künftigen Auszahlungen, und dafs die so bedingte negative Reserve der Kinder die Gesammt-Reserve kleiner macht; die Gesellschaft hat dann aber doch wenigstens keine Vorschüsse zu leisten und brauchte überhaupt keine Schwierigkeiten zu machen, wenn sie nur vor willkürlichem Austreten sicher wäre, eine Sicherheit, die aber in der Regel nicht vorhanden ist.

Will man sehr junge Kinder auf eine gewisse Summe, zahlbar beim Ableben, versichern, so mufs man, wenn die Auszahlung einen vom Todesalter unabhängigen Betrag haben soll, eine abnehmende Prämie zahlen lassen; wenn aber die Jahresprämie gleich bleiben soll, mufs man die Auszahlung mit dem Todesalter zunehmen lassen. Beim Ableben innerhalb des ersten Jahres würde diese Auszahlung sehr gering sein müssen, ungefähr das Vierfache der für dieses Jahr eingelegten Prämie; um dies zu vermeiden, wählt man die Auszahlungssumme beim Ableben innerhalb des ersten Lebensjahres etwas höher und dafür natürlich die Auszahlung in den späteren Jahren etwas niedriger, als der Prämie entspricht. Man braucht dabei nicht gänzlich aufs Geratewohl zu verfahren, wenn man voraussetzt, dafs die Anzahl der gleichzeitig beitretenden Kinder verschiedenen Alters der Anzahl proportional ist, welche die gewählte Sterblichkeitstafel angiebt, und dafür sorgt, dafs der Wert der Prämien all dieser Kinder dem Wert der Auszahlungen gleich sei, wie sie für jedes Alter infolge Ablebens zu erwarten sind.

267. Bei Überlebensrente und Überlebenskapital mit gleichbleibender Jahresprämie kann die Reserve gleichfalls negativ werden für die noch bestehenden Paare. Am häufigsten

kommt dies vor, wenn der Versorger viel jünger ist als der Versorgte, weil die Wahrscheinlichkeit der Auszahlung mit den Jahren dann durch die Zunahme der Sterbenswahrscheinlichkeit des Versorgten mehr abnimmt, als sie durch die Zunahme der Sterbenswahrscheinlichkeit des Versorgers zunimmt. Eine solche negative Reserve entsteht, wenn die Jahresprämie P_{xy} für ein x und y Jahr altes Paar gröfser ist als die Prämie $P_{x+m,\ y+m}$ für ein m Jahr älteres. Es kann sogar vorkommen, dafs die Reserve fortwährend negativ bleibt bis zum Ablauf des Kontrakts.

Gleichfalls ergiebt sich sehr oft, wenn nicht in der Regel, negative Reserve der gleichbleibenden Jahresprämie für die noch bestehenden Paare bei den Versicherungen von Waisenpension, besonders deshalb, weil in diesem Falle die Anzahl der Jahre, während deren Auszahlung möglich ist, jedes Jahr um eins abnimmt.

268. Bei der Renten-Versicherung zeigt die negative Reserve eine andere Erscheinung als bei der Kapital-Versicherung. Wenn bei einer zahlreichen Gruppe von Kapital-Versicherungen für jede Versicherung die Reserve negativ ist, hat die Gesellschaft für diese Gruppe, falls die Sterblichkeit der Mortalitätstafel entsprochen hat, weniger an Prämie empfangen als sie auf Sterbefälle auszuzahlen hatte, und hatte sie also vorzuschiefsen. Wenn bei einer zahlreichen Gruppe von Paaren Versicherter für Überlebensrente die Reserve für jedes überlebende Paar negativ ist, hat die Gesellschaft in der Regel genug an Prämien empfangen, um denjenigen Versorgten, deren Versorger gestorben sind, die Renten diesmal auszuzahlen, aber nicht genug, um beim Tode der Versorger den ganzen Barwert aller zukünftigen Auszahlungen an ihre Versorgten vorrätig zu haben, und hierin besteht doch die Reserve für die Versorgten, deren Versorger gestorben sind. Jenen Barwert vorrätig zu haben wäre auch nicht nötig, wenn die Gesellschaft die Gewifsheit hätte, dafs kein Paar willkürlich ausscheiden wird; sie könnte dann ruhig die negative Reserve der Paare, die noch am Leben sind, in Abzug bringen. Wenn nun auch die Gesellschaft genug an Prämie einnimmt, um nicht vorschiefsen zu müssen, so verhindert dies doch nicht, dafs jedes zurücktretende Paar, für welches die Reserve negativ ist, der Gesellschaft Schaden bringt und dazu beiträgt, dafs sie die Auszahlung nicht bis zum Ende ohne Verlust durchführen kann.

Es giebt Gesellschaften, die, solange die Reserve für solche und dergleichen Versicherungen negativ ist, diese negative Reserve nicht in Rechnung stellen, d. h. sie als 0 rechnen, die also in dem Augenblick, für welchen die Reserve bestimmt wird, ein Opfer bringen, für welches sie später entschädigt zu werden hoffen; letzteres geschieht aber bei

willkürlichem Austreten nicht. Nun wäre es übertrieben, zu sagen, dafs einer Gesellschaft Unheil droht, weil sie neben vielen anderen Kontrakten auch einige solche hat, bei denen negative Reserve vorkommt; dennoch ist es besser, letztere gänzlich zu vermeiden; und dies ist möglich, wenn man in den betreffenden Fällen keine gleichbleibende Jahresprämie während des Laufes der Versicherung zuläfst, sondern die Prämien in einer bestimmten Anzahl von Jahren so zahlen läfst, dafs jedesmal wenigstens das Risico gedeckt ist. Dabei ist zu beachten, dafs dieses Risico nicht nur in der Auszahlung der Pension für das betreffende Jahr, sondern in dem Wert aller künftigen Pensionszahlungen besteht.

269. Es ist also wichtig, zu bestimmen, wie grofs alsdann jährlich die veränderliche Prämie für das betreffende Jahr sein mufs. Nehmen wir den Fall einer Waisenpension, die zum letzten Male auszuzahlen ist, wenn das versorgte Kind 23 Jahre alt sein wird.

Ist der Vater beim Beitritt x, das Kind y Jahr alt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach einem Jahr der Vater gestorben, das Kind am Leben sein wird:

$$\frac{d_x}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y};$$

lebt das Kind am Ende des Jahres noch, dann ist der Wert seiner Pension:

$$a_{y+1} - \frac{D_{24}}{D_{y+1}} \cdot a_{24} = \frac{N_y - N_{23}}{D_{y+1}},$$

und demnach die Prämie für das erste Jahr:

$$\frac{d_x}{l_x} \cdot \frac{N_y - N_{23}}{D_y}.$$

Für das zweite Jahr ist dieselbe ähnlich:

$$\frac{d_{x+1}}{l_{x+1}} \cdot \frac{N_{y+1} - N_{23}}{D_{y+1}},$$

für das dritte Jahr:

$$\frac{d_{x+2}}{l_{x+2}} \cdot \frac{N_{y+2} - N_{23}}{D_{y+2}} \text{ u. s. w.}$$

Diese Prämien nehmen in der Regel ab. Weil nämlich die Anzahl der Jahre, wo die Auszahlung möglich ist, von Jahr zu Jahr um eins abnimmt, nimmt der zweite Faktor verhältnismäfsig mehr ab, als der erste Faktor, die Sterbenswahrscheinlichkeit des Vaters, zunimmt.

Einige Gesellschaften lassen thatsächlich, um eine negative Reserve zu vermeiden, bei Waisenpensionen jährlich diejenige Prämie zahlen, welche das Risico des Jahres deckt. Dasselbe könnte man bei der Versicherung lebenslänglicher Überlebensrenten thun, falls der Versorger viel jünger ist als der Versorgte.

270. Es ist gelegentlich vorgekommen, dafs eine Gesellschaft, um die negative Reserve bei Waisenpension zu vermeiden, folgende Methode anwenden wollte: Es betrage die Dauer der Versicherung n Jahre und es sei ${}_nP$ die gleichbleibende Jahresprämie während dieser n Jahre; dann wollte man die Prämie in $\frac{1}{2}\,n$ Jahren zahlen lassen und zwar im jährlichen Betrage von:

$$ {}_nP \cdot \left(1 + \frac{1}{(1+i)^{\frac{n}{2}}}\right). $$

Es versteht sich von selbst, dafs diese Prämie nicht ganz genau sein kann, denn in der Reductionsformel kommt weder die Sterbenswahrscheinlichkeit des Versorgers noch die des Versorgten vor. Prüfen wir, ob sie zu grofs oder zu klein ist. Aus No. 31 ersieht man sofort, dafs die Formel richtig wäre, wenn sowohl die Prämie ${}_nP$ während der n wie die gröfsere während der $\frac{n}{2}$ Jahre unbedingt gezahlt würde.

Um eine jährliche Einlage ${}_nP$, die n Jahre unbedingt zu zahlen ist, auf eine ebensolche ${}_mP$ zurückzuführen, die jedoch statt n nur m Jahre unbedingt zu zahlen ist, hat man die Gleichung:

$$ {}_mP\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{m-1}}\right) = $$

$$ = {}_nP\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right), $$

in welcher $1 + i = r$ gesetzt ist.

Nehmen wir $m < n$ an und setzen.

$$ 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{m-1}} = M $$

und

$$ \frac{1}{r^m} + \frac{1}{r^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} = T, $$

so ist:

$$ {}_mP \cdot M = {}_nP \cdot (M + T), \text{ folglich } {}_mP = {}_nP\left(1 + \frac{T}{M}\right). $$

Wollen wir jetzt die Prämienzahlung ${}_nP$ per Jahr während n Jahren auf eine Prämienzahlung ${}_mP$ per Jahr während m Jahren zurückführen, so müssen wir die Wahrscheinlichkeit in Rechnung ziehen, dafs die Prämie in einem bestimmten Jahr gezahlt werden wird. Die Wahrscheinlichkeit, dafs am Anfang des k^{ten} Jahres nach dem Abschliefsen der Versicherung die Prämienzahlung stattfinden wird, werde bezeichnet mit ${}_{k-1}p$, dann haben wir die Gleichung:

$$ {}_mP\left(1+\frac{{}_1p}{r}+\frac{{}_2p}{r^2}+\ldots+\frac{{}_{m-1}p}{r^{m-1}}\right)= $$

$$ ={}_nP\left(1+\frac{{}_1p}{r}+\frac{{}_2p}{r^2}+\ldots+\frac{{}_{n-1}p}{r^{n-1}}\right). $$

Setzt man:

$$ 1+\frac{{}_1p}{r}+\frac{{}_2p}{r^2}+\ldots+\frac{{}_{m-1}p}{r^{m-1}}=U, $$

$$ \frac{{}_mp}{r^m}+\frac{{}_{m+1}p}{r^{m-1}}+\ldots+\frac{{}_{n-1}p}{r^{n-1}}=V, $$

dann ist:

$$ {}_mP\cdot U={}_nP\cdot(U+V),\quad {}_mP={}_nP\cdot\left(1+\frac{V}{U}\right). $$

Nun bilden selbstverständlich ${}_1p$, ${}_2p$, ${}_3p$ u. s. w. eine abnehmende Reihe und jede der Zahlen ist < 1, darum ist $U > {}_mp\cdot M$ und $V < {}_mp\cdot T$, also ist $\frac{V}{U} < \frac{T}{M}$ und demnach:

$$ {}_nP\left(1+\frac{V}{U}\right) < {}_nP\left(1+\frac{T}{M}\right). $$

Substituirt man daher für eine Jahresprämie ${}_nP$ während n Jahren eine solche vom Betrage:

$$ {}_nP\left(1+\frac{1}{(1+i)^{\frac{n}{2}}}\right) $$

während $\frac{1}{2}n$ Jahren, so hat der Versicherte Schaden, und noch mehr ist dies der Fall, wenn, wie dies wohl auch vorgeschlagen worden ist, die Prämie ${}_nP$ während n Jahren ersetzt würde durch eine Prämie $2\,{}_nP$ während $\frac{1}{2}n$ Jahren.

271. Bei temporärer Versicherung auf den Todesfall kann die Benutzung einer Sterblichkeitstafel, bei welcher die Sterbenswahrschein-

lichkeit nicht fortwährend mit dem Alter zugleich steigt, bisweilen zu einer negativen Reserve führen. Versichert sich ein 30-jähriger auf 5 Jahre gegen Jahresprämie und ist diese Prämie höher als die für den 31-jährigen für eine Versicherung auf 4 Jahre, so ist nach einem Jahre die Reserve für den 30-jährigen negativ. Indessen ist dies hier von weniger Belang; man kann ja den Verlauf der Netto-Prämie beim Übergang zur Brutto-Prämie so corrigiren, dafs bei letzterer eine eben solche Abnahme vermieden wird, abgesehn davon, dafs die Kleinheit des Unterschiedes dem Versicherten kaum zu einem willkürlichen Zurücktreten Veranlassung geben würde. Übrigens ist bei kurzer Dauer der Versicherung auf den Todesfall die Reserve so gering, dafs man sich oft fragen mufs, ob ihre Berechnung der Mühe wert ist.

Negative Reserve tritt auch oft auf bei lebenslänglicher Versicherung auf den Todesfall gegen gleichbleibende Prämie, wenn die beim Ableben auszuzahlende Summe beim zunehmenden Alter stark abnimmt.

Eine solche Art Versicherung sollte denn auch nicht gegen eine gleichbleibende, sondern entweder gegen eine abnehmende Jahresprämie oder gegen eine temporäre Prämie abgeschlossen werden, die hoch genug ist, um in den ersten Jahren das Risico zu decken.

272. Indessen kommt es manchmal vor, dafs Hypothekenbanken Geld gegen Tilgung durch Annuitäten ausleihen, und dafs sie den Geldentleiher einen Extra-Beitrag zahlen lassen, gegen welchen dem Schuldner beim Ableben innerhalb der bestimmten Zeit die noch zu zahlenden Annuitäten erlassen werden. Wenn solche Banken das so entstehende Risico verringern oder gar nichts mit Versicherung zu schaffen haben wollen, versichern sie bei einer Gesellschaft die Auszahlung des noch nicht getilgten Teils der Hypothek auf den Todesfall des Schuldners. Es ist dies selbstverständlich eine abnehmende Auszahlung, bei welcher auch sehr oft negative Reserve auftritt; doch verursacht dies hier keine Schwierigkeiten, weil man ausbedingen kann, dafs der Geldleiher, wenn er innerhalb der bestimmten Zeit zurücktreten, d. h. die Hypothek tilgen will, nicht nur den Rest seiner Schuld zahlen, sondern auch den Nachteil ersetzen mufs, welcher der Versicherungs-Gesellschaft durch dieses Zurücktreten erwächst.

Ist der Betrag des Anlehens die Einheit, dann beträgt bei einer Dauer von n Jahren die Annuität (postnumerando) nach Formel (32):

$$\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Am Anfang des m^{ten} Jahres, also nach $m-1$ Zahlungen, beträgt nach Formel (35) die Schuld noch:

$$\frac{r^n - r^{m-1}}{r^n - 1},$$

wenn wir $1+i=r$ setzen. (Dies ist also die Schuld gleich nach der Annuitäten-Zahlung.)

Nun ist die jedes Jahr noch verbleibende Schuld, einschliefslich des Zinses bis zum Tage des Ablebens, die bei der Gesellschaft auf den Fall des Ablebens versicherte Auszahlung.

Diese Auszahlung finde statt am Ende des Sterbejahres, dann hat die Auszahlung, die für einen Versicherten in Folge der Sterblichkeit im m^{ten} Jahr möglich ist, am Anfang der Versicherung einen Wert:

$$\frac{r^n - r^{m-1}}{r^n - 1} \cdot \frac{1}{r^{m-1}} \cdot \frac{d_{x+m-1}}{l_x}, \qquad (420)$$

was sich leicht reduciren läfst zu:

$$\frac{1}{r^x(r^n-1)\,D_x} \cdot (r^{x+n+1}\,C_{x+m-1} - d_{x+m-1}).$$

Nimmt man hier nach einander $m = 1, 2, 3, \ldots n$, und addirt, so ergiebt sich die einmalige Prämie:

$$\frac{1}{r^x(r^n-1)\,D_x}\Big[r^{x+n+1}(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1}) - \\ - (d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots + d_{x+n-1})\Big]. \qquad (421)$$

Für die Aufstellung eines ganzen Tarifs kann es bequem sein, die Gröfse in der eckigen Klammer zu schreiben:

$$r^{x+n+1}(M_x - M_{x+n}) - (\Sigma d_x - \Sigma d_{x+n}).$$

Ersetzt man in der Formel für die einmalige Prämie, D_x durch $N_{x-1} - N_{x+n-1}$, so erhält man die gleichbleibende Jahresprämie.

Als Wert der zukünftigen Auszahlung am Ende des t^{ten} Jahres nach dem Anfang der Versicherung findet man:

$$\frac{1}{r^x(r^n-1)\,D_{x+t}}\Big[r^{x+n+1}(C_{x+t} + C_{x+t+1} + \ldots + C_{x+n-1}) \\ - (d_{x+t} + d_{x+t+1} + \ldots + d_{x+n-1})\Big], \qquad (422)$$

während dann der gegenwärtige Wert der gleichbleibenden Jahresprämie P ist:

$$P \cdot \frac{N_{x+t-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+t}} = P \cdot |_{n-t}a_{x+t}.$$

Die Differenz bildet die Reserve nach t Jahren.

Ist jetzt, wie dies oft der Fall sein wird, der Wert der Auszahlung kleiner als der Wert der Prämien, so bestehen hier keine Bedenken, den Betrag der negativen Reserve von der übrigen positiven Reserve zu subtrahiren, denn bei willkürlichem Austreten mufs der Versicherte diese negative Reserve erstatten. Dafs indessen eine Gesellschaft, die nur dergleichen Kontrakte abschlösse, wegen der Vorschüsse in Verlegenheit geraten könnte, zeigt sich wie in No. 266, wenn auch hier die Gefahr nicht so grofs ist als bei Versicherung von sehr jungen Kindern. Auch giebt es Gesellschaften, welche der negativen Reserve dadurch aus dem Wege gehn, dafs sie die Prämie in kürzerer Zeit abzahlen lassen.

Schliefslich sei noch darauf hingewiesen, dafs sich Formel (422) verificiren läfst. Einmal geht sie für $t = 0$ in (421) über, wie dies der Fall sein mufs; ferner reducirt sie sich für $t = n - 1$ zu:

$$\frac{1}{r^x (r^n - 1) D_{x+n-1}} (r^{x+n-1} C_{x+n-1} - d_{x+n-1})$$

oder nach einer leichten Rechnung zu:

$$\frac{(r-1) r^n}{r^n - 1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d_{x+n-1}}{l_{x+n-1}}.$$

Wirklich kann die Gesellschaft gegen letzteren Betrag am Anfang des letzten Jahres, d. h. nachdem eben eine Annuität gezahlt ist — wo also der Schuldner ein Jahr später noch einmal den Betrag der Annuität, der nach Formel (32):

$$\frac{(r-1) r^n}{r^n - 1}$$

ist, zu zahlen hat, um die ganze Schuld zu tilgen — die Auszahlung dieser Annuität im Fall des Ablebens auf ihre Rechnung nehmen.

272*. Die einmalige Prämie (421) läfst sich indessen in solcher Weise umbilden, dafs man eine gute Einsicht bekommt in die eigentliche Natur der Versicherung.

In Formel (420) substituiren wir:

$$d_{x+m-1} = l_{x+m-1} - l_{x+m} = r^{x+m-1} D_{x+m-1} - r^{x+m} D_{x+m},$$
$$l_x = r^x \cdot D_x,$$

und stellen den jährlichen Betrag der Annuität:

$$\frac{(r-1)\,r^n}{r^n-1} = k; \text{ hieraus: } r^n = \frac{k}{k+1-r},\ r^n - 1 = \frac{r-1}{k+1-r},$$

und wird dann die Formel:

$$\left(r^{m-1} - k \cdot \frac{r^{m-1}-1}{r-1}\right) \cdot \frac{D_{x+m-1} - r\,D_{x+m}}{D_x} =$$

$$\frac{1}{D_x} \cdot \left[r^{m-1}(D_{x+m-1} - r\,D_{x+m}) - \frac{k}{r-1} \cdot (r^{m-1}-1)(D_{x+m-1} - \right.$$
$$\left. - r\,D_{x+m})\right].$$

Substituirt man nach einander $m = 1, 2, 3, \ldots, n$ und addirt man zunächst, so findet man nach einfacher Reduction als einmalige Prämie:

$$\frac{1}{D_x}\left[D_x - k \cdot (D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n-1}) - \right.$$
$$\left. - \left(r^n - k \cdot \frac{r^n - r}{r-1}\right) D_{x+n}\right].$$

Es ist

$$r^n = \frac{k\,(r^n-1)}{r-1), \text{ also:}}$$

$$r^n - \frac{k}{r-1}(r^n - r) = \frac{k\,(r^n-1)}{r-1} - \frac{k}{r-1}(r^n - r) = k.$$

Die einmalige Prämie wird also:

$$1 - k \cdot \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n}}{D_x}, \qquad (422^*)$$

welche Formel sich auch sogleich erklären läfst.

Man kann auch bedingen, dafs die Schuld 1 getilgt wird durch eine praenumerando zahlbare Annuität im Betrage von $\frac{k}{1+i}$ während n Jahre; aber dies kommt auf dasselbe hinaus als das Tilgen der Schuld $1 - \frac{k}{1+i}$ durch eine postnumerando zahlbare Annuität im Betrage von $\frac{k}{1+i}$ während $n-1$ Jahre.

Nimmt eine Lebensversicherungs-Gesellschaft an, im Ablebensfall entweder die noch bestehende Schuld auf einmal zu tilgen oder die praenumerando zahlbare Annuität $\frac{k}{1+i}$ bis zum Ende zu zahlen, so ist offenbar, nach Obenstehendem, die einmalige Prämie für diese Versicherung:

$$1-\frac{k}{1+i}-\frac{k}{1+i}\cdot\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots+D_{x+n-1}}{D_x}=$$
$$=1-\frac{k}{1+i}\cdot\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots+D_{x+n-1}}{D_x}=$$
$$=1-\frac{k}{1+i}\cdot{}_n\mathrm{a}_x$$

und die Jahresprämie ist

$$\frac{1}{{}_n\mathrm{a}_x}-\frac{k}{1+i}.$$

Der Versicherte hat überdies jährlich noch eine Annuität zu zahlen $\frac{k}{1+i}$; im Ganzen zahlt er also $\frac{1}{{}_n\mathrm{a}_x}$ jährlich, d. h. $\frac{i}{1+i}$ mehr als für die gemischte Versicherung während n Jahre. Dies ist gänzlich in der Ordnung, denn für die Jahresprämie $\frac{1}{{}_n\mathrm{a}_x}-\frac{i}{1+i}$ wird der Versicherte nach n Jahren (oder beim früheren Ableben sein Erbe), Besitzer der Einheit als Kapital; er schuldet aber noch jährlich den Zins i der Einheit am Ende des Jahres oder $\frac{i}{1+i}$ am Anfang des Jahres, so lange die Einheit noch nicht sein Eigentum ist, also während n Jahren oder bis zu seinem früheren Tode.

273. Es ist nicht immer leicht, aus der Sache selbst vorherzusehn, ob eine bestimmte Versicherungsweise bei einer bestimmten Art der Prämien-Zahlung zu negativer Reserve führt. Die Zahlen müssen es ausweisen. Zur Erläuterung möge noch folgendes Beispiel dienen. Ein Mann schliefst eine Versicherung auf eine Pension, die mit seinem 60sten Lebensjahre anfangen soll, mit der Bedingung, dafs diese Pension bei seinem früheren oder späteren Ableben in eine gleich bei seinem Ableben anfangende Pension für seine Frau übergeht; dafür zahlt er eine gleichbleibende Jahresprämie bis zu seinem 60sten Lebensjahre, die aber bei seinem etwaigen früheren Ableben aufhört. Diese Weise der Prämien-Zahlung ist aber einer Gesellschaft nicht anzuraten, denn sehr oft wird dabei negative Reserve auftreten.

Stirbt die Frau bald, dann müfste der Mann noch Jahre lang für das Risiko zahlen, dafs seine Frau die Pension hätte beziehen können und es läge in seinem Interesse, zurückzutreten und sich aufs Neue auf eine Pension zu versichern.

Bei dieser Versicherungsweise mufs eine Prämien-Zahlung gewählt werden, die mit dem Ableben der Frau aufhört, falls die Prämie durchaus unveränderlich sein soll.

Negative Reserve tritt auch auf, wenn sich jemand gegen lebenslängliche Jahresprämie auf ein Kapital versichert, das jedenfalls zweimal ausgezahlt werden soll, 1. an einem im voraus bestimmten Zeitpunkt, 2. bei früherem oder späterem Ableben. Um der negativen Reserve zu entgehn, mufs die Prämien-Zahlung an dem bestimmten Zeitpunkte endigen oder gehörig abnehmen.

Dergleichen combinirte Versicherungen werden oft empfohlen von Agenten, die nicht immer leicht zu überzeugen sind, dafs man es im Grunde genommen mit zwei unabhängigen Versicherungen zu thun hat.

Dafs bei solchen Combinationen die Prämie ein wenig billiger sein darf als die Summe der Prämien der einzelnen Versicherungen, ist indessen wahr. Der Zuschlag kann etwas herabgesetzt werden (siehe No. 194).

Vor- und Nachteil der Netto-Reserve.

274. Die bis jetzt entwickelten Reserve-Formeln beruhen auf der Voraussetzung, dafs die Versicherten Netto-Prämie nach bestimmter Sterblichkeitstafel und bestimmtem Zinsfufs zahlen. Diese (Netto-)Methode ist die einzig mögliche für Gesellschaften, wie es deren noch einige giebt, welche die Netto-Prämie als Tarif-Prämie gelten lassen und bei welchen also die Administrationskosten aus dem durch die Weise des Ablebens (d. h. durch die Wahl der Sterblichkeitstafel) und durch höheren Zins, als vom Tarif vorausgesetzt ist, erzielten Gewinn gedeckt werden müssen.

Ein Vorteil der Netto-Methode ist es gewifs, dafs jede Umbildung der Formeln zum selben Resultate führt; auch halten noch viele diese Methode für die solideste, selbst da, wo die Versicherten eine Prämie zahlen, die auf die Unkosten Rücksicht nimmt; sie nehmen dann stillschweigend an, dafs der Versicherte jedes Jahr die Differenz zwischen der Netto- und der Brutto-Prämie für die Unkosten und zur Bildung des Gewinns einlegt. Diese Methode wird vielfach empfohlen, wenn es gilt, den zu verteilenden Gewinn zu bestimmen und wird auch von mehreren Regierungen gesetzlich vorgeschrieben. Es ist auch nicht zu leugnen, dafs eine Gesellschaft, welche ihre Netto-Reserve intact vor-

handen hat, Dividenden auszahlen und sich ausbreiten kann, sich im Allgemeinen in einem blühenden Zustande befindet, denn von ihren alten Versicherungen kann sie einen schönen Gewinn erhoffen. Für den Mathematiker einer solchen Gesellschaft hat die Methode der Netto-Reserve den aufserordentlich grofsen Vorteil, dafs sie ihm nicht viel zu denken giebt.

Viele aber haben ihre Bedenken gegen die Methode, weil die dabei gemachten Voraussetzungen allzu sehr von der Wirklichkeit abweichen; so ist es z. B. gewifs nicht wahr, dafs im ersten Jahr einer Versicherung die Unkosten nur ebenso hoch sind wie in den späteren Jahren; das erste Jahr ist für die Gesellschaft unbedingt das teuerste, sodafs es unmöglich ist, aus der Prämien-Einnahme des ersten Jahres die Unkosten dieses Jahres zu bestreiten, das Risiko zu decken und die Netto-Reserve bei Seite zu legen. Schliefst eine Gesellschaft in einem Jahre sehr viele Versicherungen ab, so vermindert dies bisweilen zu stark den Gewinn dieses Jahres. Bei einer ohne Kapital anfangenden Gesellschaft ist die Netto-Methode völlig unmöglich. Ferner kann man sich sehr wohl denken, dafs eine Gesellschaft ihre Sterblichkeitstafel und ihren Zinsfufs wechseln mufs, ohne die Prämien der bestehenden Versicherungen ändern zu können. Bei der Zahlung einer einmaligen oder temporären Prämie setzt die Netto-Methode voraus, dafs nach Aufhören der Prämien-Zahlung die Gesellschaft ganz umsonst verwaltet. Die unbedingten Verfechter der Netto-Methode verkennen diese Abweichung von der Wirklichkeit nicht; wenn sie trotzdem von keiner anderen Methode etwas wissen wollen, so beruht dies gröfstenteils darauf, dafs sie einen möglichen Mifsbrauch fürchten. Diese Möglichkeit besteht allerdings, doch giebt es auch andere Methoden, die sich sehr wohl verteidigen lassen und die sogar allmählich zu einer höheren Reserve führen können als die Netto-Methode.

Vor böswilliger Handlungsweise mufs man bei jeder Methode auf der Hut sein, denn auch ganz unabhängig von der Art der Reserve-Rechnung ist eine Verschönerung der Bilanz möglich; jemandem aber, der hier aus Unwissenheit Fehler machen könnte, darf die Berechnung der Reserve nach keiner Methode anvertraut werden.

Es kommt bisweilen vor, dafs der Mathematiker die Reserve zu berechnen hat für eine Rückversicherung, ohne dafs er die Netto-Prämie genau weifs; dies ist z. B. der Fall, wenn eine veränderliche Prämie gezahlt wird und dabei die Art der Veränderung nicht deutlich hervorspringt. Alsdann ist es ihm schwer, eine Netto-Reserve zu berechnen, und mufs er die wirkliche Prämie in Betracht ziehn; dabei kann eine

Reserve entstehn, welche gröfser oder kleiner als die Netto-Reserve ist. Wenn ein Sachverständiger den Auftrag erhält, die Solvabilität einer Gesellschaft zu untersuchen, ist er wohl genötigt, von der Netto-Methode abzuweichen und mit der wirklichen Prämie zu rechnen. Eine Netto-Methode im wahrsten Sinne des Wortes giebt es eigentlich überhaupt nicht, weil sowohl die einmalige als die Jahresprämie und Leibrente mehr oder weniger ungenau sind, da man das Alter und die Dauer der Versicherung nicht bis auf den Tag genau in Rechnung ziehn kann; auch ist es nicht gebräuchlich und würde es viel zu umständlich sein, die verschiedenen Weisen der Prämien-Zahlung: ob jährlich, vierteljährlich, monatlich, gesondert in Betracht zu ziehn, vielmehr nimmt man bei der Reserve-Rechnung gewöhnlich Jahresprämien an, auch wenn terminweise gezahlt wird. Bei mehreren Versicherungsweisen wird überdies mit interpolirten Prämien gerechnet, und man kann sich dann wohl einbilden, Netto-Reserve vor sich zu haben, während man thatsächlich mehr oder weniger weit davon entfernt ist.

Wenn es nun auch fern liegt, die Bedenken gegen die Netto-Methode übertreiben zu wollen oder jemandem aus ihrer Anwendung einen Vorwurf zu machen, so braucht man sich doch auch diese Methode nicht aufzwingen zu lassen. Wenn mehrere das Rechnen mit Netto-Prämien bei der Reserve-Rechnung für ein besonderes Verdienst halten, so hilft das doch nicht über die Mängel der Methode hinweg. Jedenfalls sind wir verpflichtet, hier auch andere Methoden ins Auge zu fassen.

Methoden nach Brutto-Prämie.

275. Einige verstehn unter Reserve wohl auch die Differenz zwischen dem gegenwärtigen Wert der zukünftigen Auszahlungen und dem der zukünftigen Prämien, nur nehmen sie statt der Netto- die Brutto-Prämien, weil doch diese wirklich gezahlt werden, ihr gegenwärtiger Wert also die Schuld der Versicherten gegenüber der Gesellschaft darstelle.

Sei P die Netto-Jahresprämie, $(1+\alpha)P$ die Brutto-Jahresprämie, welche der Versicherte wirklich zahlt, $A_{(m)}$ für jede Art der Versicherung der Wert der zukünftigen Auszahlungen im Augenblick, für welchen die Reserve bestimmt wird und bis zu welchem m Jahre seit dem Beginn der Versicherung verflossen sein mögen, $a_{(m)}$ sei der Wert der Leibrente für denselben Augenblick und zwar je nach Lage des Falles einer lebenslänglichen oder temporären, einer gleichbleibenden oder veränderlichen, für eine oder mehr Personen. Die Netto-Reserve

ist dann $A_{(m)} - P \cdot a_{(m)}$, während die Reserve, bei welcher der gegenwärtige Wert der Brutto-Prämie in Rechnung gebracht wird, $A_{(m)} - (1 + \alpha) \cdot P \cdot a_{(m)}$ beträgt. Die Reserve nach der Brutto-Prämie ist demnach um $\alpha \cdot P a_{(m)}$ kleiner als die Netto-Reserve, eine Differenz, die mit wachsendem m abnimmt, weil dabei der Wert von $a_{(m)}$ kleiner wird.

Wenn die gewählte Sterblichkeitstafel und der Zinsfuſs ziemlich genau mit der Wirklichkeit übereinstimmen, sodaſs der gröſsere Teil der Administrationskosten durch den Zuschlag gedeckt werden muſs, α also ein ziemlich groſser Bruch ist, z. B. 0.10 bis 0.20, so unterliegt diese Methode groſsen Bedenken. Sie berücksichtigt nämlich nicht, daſs die Gesellschaft für die vorher abgeschlossenen Versicherungen noch andere Ausgaben zu leisten hat als die Auszahlungen der versicherten Kapitalien oder Renten; eine Gesellschaft, die so rechnet, hat künftig von dem Zuschlag zu der Netto-Prämie nichts mehr für Bestreitung der Unkosten zu erwarten, weil alle zukünftigen Brutto-Prämien nur für die Auszahlung bestimmt sind.

Bei einigermaſsen groſsen Werten für α wird die Reserve in den ersten Jahren, und zwar zuweilen bis zu 6 oder mehr Jahren, negativ sein.

Handelt es sich z. B. um eine lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall gegen lebenslängliche gleichbleibende Jahresprämie, so ist die Reserve nach m Jahren auf Grund der Brutto-Prämie:

$$A_{x+m} - (1 + \alpha) P_x \cdot a_{x+m},$$

wenn x das Beitrittsalter und P_x die Netto-Jahresprämie bedeutet.

Substituirt man:

$$A_{x+m} = P_{x+m} \cdot a_{x+m},$$

so geht die Reserve-Formel über in:

$$(P_{x+m} - (1 + \alpha) P_x) \cdot a_{x+m};$$

P_{x+m} wächst mit zunehmendem m; die Reserve wird aber erst dann positiv, wenn die Netto-Jahresprämie P_{x+m} für das vom Versicherten zu der Zeit, für welche die Reserve bestimmt wird, erreichte Alter gröſser geworden ist als die Brutto-Jahresprämie $(1 + \alpha) P_x$, die er zahlt.

Bringt die Gesellschaft den Betrag der negativen Reserve in Abzug, so bedeutet dies nichts anderes, als daſs sie im ersten Jahr für Risico und Unkosten über mehr verfügt, als sie an Prämie ein-

genommen hat; in den folgenden Jahren verfügt sie über alle Prämien ausschliefslich für das Risico. Etwas weniger unvorsichtig ist es, wenn die Reserve, solange die Rechnung sie als negativ ausweist, $= 0$ gerechnet wird; zwar wird dann der ganze Zuschlag so bald wie möglich verbraucht, man sorgt aber jedenfalls dafür, dafs nie über mehr verfügt wird, als man erhalten hat. Eine Gesellschaft, die auf diese Weise mit Brutto-Prämie rechnet, wird, je gröfser die Differenz zwischen Netto- und Brutto-Prämie ist, um so gröfsere Gewinne erzielen, so lange fortwährend viele neue Versicherungen zutreten; dieser Gewinn wird aber im Verhältnis zu der Prämien-Einnahme immer geringer werden, denn die bestehenden Versicherungen bringen — wenigstens aus dem Zuschlag — keinen Gewinn mehr ein. Wenn der Zugang an neuen Versicherungen stationär bleibt oder sogar abnimmt, so kommt ein Augenblick, wo die Gesellschaft von ihren neuen Versicherungen nicht länger Gewinn genug erzielt, um die Administrationskosten ihrer ausgedehnten Geschäfte zu decken, sodafs ihre Lage sehr bedenklich werden kann. Kurz, eine solche Gesellschaft hängt ganz oder fast ganz von dem Abschliefsen neuer Versicherungen ab.

Ist aber der Zuschlag auf die Netto-Prämie gering, weil die Grundlagen, d. h. Sterblichkeitstafel und Zinsfufs, derartig gewählt sind, dafs man aus der Weise des Ablebens und der Verzinsung grofsen Gewinn erwarten kann, so wird die soeben beschriebene Methode wenig oder gar nicht zu Mifsständen führen.

Es hat Gesellschaften gegeben und giebt deren noch heute, die, wenn sie mit Brutto-Prämien rechnen, neben der Prämien-Reserve im obigen Sinne eine Unkosten-Reserve bilden, die aus dem gegenwärtigen Wert eines gewissen Teils des Zuschlags besteht. Wenn dieser Teil des Zuschlags, den man so für die zukünftigen Unkosten reservirt, hoch genug gewählt ist, so entspricht die Methode, was den Erfolg betrifft, einer anderen, die wir später besprechen wollen.

Indessen soll man bei dieser Methode sehr vorsichtig sein und sich die Unkosten der Zukunft nicht allzu niedrig vorstellen.

276. Es giebt indessen Methoden nach Brutto-Prämie, die zu einer Reserve führen, welche je nach den Umständen gröfser, gleich oder kleiner als die Netto-Reserve sein kann.

Wendet man nämlich die Formel (409):

$$ {}_mV = (P_{(m)} - P)\, a_{(m)} $$

nicht auf die Netto-, sondern auf die Brutto-Jahresprämie an, sodafs P die Brutto-Jahresprämie ist, welche gezahlt wird, $P_{(m)}$ die Prämie,

welche gezahlt werden müfste beim Beitritt in dem Augenblick, für welchen die Reserve bestimmt wird, $a_{(m)}$ der Wert der Leibrente 1 per Jahr in demselben Augenblick, so können verschiedene Fälle vorkommen. Ist der Zuschlag, welcher in der Brutto-Prämie einbegriffen ist, für jedes Alter derselbe, und also nur von der Höhe der Versicherungssumme abhängig, so giebt die Anwendung der Formel auf Brutto-Prämien genau dieselbe Reserve wie die Anwendung auf Netto-Prämien. Besteht aber der Zuschlag in Procenten der Netto-Prämie, denselben jedoch für jedes Alter, so giebt die obige Formel, auf Brutto-Prämien angewendet, die Reserve um eben soviel Procente höher als die Netto-Reserve. Nur dann, wenn der Zuschlag, in Procenten der Versicherungssumme, mit zunehmendem Beitrittsalter abnimmt (welcher Fall wohl selten vorkommen dürfte), wird die Formel bei Anwendung auf Brutto-Prämien eine niedrigere als die Netto-Reserve ergeben. Wenn wir hier von Netto-Reserve sprechen, so meinen wir diejenige Netto-Reserve, welche aus der Sterblichkeitstafel und dem Zinsfufs folgen würde, nach welchen a berechnet ist.

In England ist vorstehend beschriebene Methode $(P_{(m)} - P) \cdot a_{(m)}$ mit Erfolg von **Higham** und anderen angewendet worden. Wie gesagt, bedeuten darin $P_{(m)}$ und P Prämien des Tarifs, während $a_{(m)}$ nach der bei der Gesellschaft beobachteten Sterblichkeit zu berechnen ist.

277. Wendet man die Formel $A_{(m)} - P\,a_{(m)}$ auf einmalige Prämien $A_{(m)}$ und Jahresprämien P an, wie sie der Tarif angiebt, während $a_{(m)}$ aus der Sterblichkeit abgeleitet ist, wie dieselbe bei der Gesellschaft stattgefunden hat, dann ist die Reserve zumeist wieder geringer wie die nach No. 276, weil gewöhnlich $A_{(m)} < P_{(m)}\,a_{(m)}$, wenn $P_{(m)}$ die Tarif-Prämie bedeutet.

278. Wird Formel (408) $A_{(m)}\left(1 - \frac{P}{P_{(m)}}\right)$ auf Brutto-Jahres- und einmalige Prämien P, $P_{(m)}$ und $A_{(m)}$ angewendet, so giebt sie in der Regel eine niedrigere Reserve als Formel $(P_{(m)} - P)\,a_{(m)}$ unter denselben Verhältnissen, weil gewöhnlich $A_{(m)} < P_{(m)}\,a_{(m)}$ ist. Es wäre also möglich, dafs diese Methode zu einer Reserve führt, die kleiner ist als die Netto-Reserve; in der Regel aber wird sie gröfser sein.

279. Wendet man endlich die retrospective Methode (No. 262) der Reserveberechnung auf Brutto-Prämien an, bedeutet also in Formel (418) P_x die Brutto-Prämie, so entsteht, da letztere höher ist als die Netto-Prämie, eine Reserve, die nicht nur immer höher ist wie die Netto-Reserve, sondern allmählich mehr und mehr davon abweicht. Es

braucht dieses Verfahren nicht unter allen Umständen verschmäht zu werden und man könnte dasselbe sogar für einen Kreis empfehlen, bei welchem die Administration unentgeltlich stattfindet und der Zuschlag zur Netto-Prämie ein geringer ist, weil sich nur geringe nachteilige Abweichungen der Sterblichkeit und des Zinses befürchten lassen. Auf diese Weise entstände auf ungesuchtem Wege eine Extra-Reserve, die ein Sicherheitskapital vertritt.

Die Reserve, blos aus dem Tarife berechnet.

280. Bei den Methoden der No. 275—277 braucht man aufser den Brutto-Prämien noch eine Leibrenten-Tafel. Die Methode, zu welcher wir jetzt übergehn, rechnet dagegen nur mit den Prämien des Tarifs.

Nehmen wir den Fall einer lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall gegen gleichbleibende Jahresprämie. Die Netto-Jahresprämie des x-jährigen ist alsdann:

$$P_x = \frac{1}{a_x} - \frac{i}{1+i},$$

oder, wenn wir zur Abkürzung schreiben, wie wir es schon mehresmals gethan:

$$\frac{i}{1+i} = d, \quad P_x = \frac{1}{a_x} - d;$$

und ebenso ist:

$$P_{x+m} = \frac{1}{a_{x+m}} - d.$$

Nun ist die Netto-Reserve nach m Jahren:

$${}_mV_x = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x},$$

folglich in der Netto-Prämie ausgedrückt:

$${}_mV_x = 1 - \frac{P_x + d}{P_{x+m} + d} = \frac{P_{x+m} - P_x}{P_{x+m} + d}. \qquad (423)$$

Es verdient noch bemerkt zu werden, dafs die Formel auch für die gemischte Versicherung gilt, sowohl für eine als für mehr Personen, ferner für die Versicherung mit Auszahlung beim ersten Ableben von mehreren Personen, vorausgesetzt, dafs die P entsprechend gewählt sind.

Diese Formel hat man auch benutzt, um aus den Tarif-Prämien die Reserve zu bestimmen. Versuchen wir die auf diese Weise be-

rechnete Reserve mit der Netto-Reserve zu vergleichen, wie sie sich auf Grund der eigentlichen Sterblichkeit ergiebt.

Setzen wir voraus, dafs die Tarif-Prämie für alle Altersstufen um gleich viele Procente höher ist als die Netto-Prämie; der Faktor der Erhöhung sei $1+\alpha$.

Die Formel (423), auf Brutto-Prämien angewendet, wird dann in Netto-Prämien dargestellt durch:

$$\frac{(1+\alpha)P_{x+m}-(1+\alpha)P_x}{(1+\alpha)P_{x+m}+d}.$$

Nun ist augenscheinlich:

$$\frac{(1+\alpha)P_{x+m}-(1+\alpha)P_x}{(1+\alpha)P_{x+m}+d} > \frac{(1+\alpha)P_{x+m}-(1+\alpha)P_x}{(1+\alpha)P_{x+m}+(1+\alpha)d},$$

also:

$$\frac{(1+\alpha)P_{x+m}-(1+\alpha)P_x}{(1+\alpha)P_{x+m}+d} > \frac{P_{x+m}-P_x}{P_{x+m}+d}.$$

Bei obiger Voraussetzung über den Zuschlag giebt also Formel (423), auf Brutto-Prämie angewendet, eine höhere als die Netto-Reserve.

Der Faktor, mit dem die Netto-Reserve durch diese Methode erhöht wird, ist aber immer geringer als $1+\alpha$; er ist nämlich:

$$\frac{P_{x+m}+d}{P_{x+m}+\frac{d}{1+\alpha}}$$

und nimmt also ab mit der Zunahme von P_{x+m}, d. h. mit der Dauer der Versicherung. In noch höherem Mafse ist dies der Fall, wenn der procentweise Zuschlag mit wachsendem Alter abnimmt.

Man kann sogar an die Möglichkeit denken, dafs gleiche Reserve entsteht, mag man die Formel auf Brutto- oder Netto-Prämien anwenden.

Sei die Brutto-Prämie für den x-jährigen $(1+\alpha)P_x$, für den $x+m$-jährigen $(1+\alpha')P_{x+m}$, dann entsteht nach m Jahren gleiche Reserve, wenn

$$\frac{(1+\alpha')P_{x+m}-(1+\alpha)P_x}{(1+\alpha')P_{x+m}+d} = \frac{P_{x+m}-P_x}{P_{x+m}+d},$$

d. h. wenn

$$\alpha\left(1+\frac{d}{P_{x+m}}\right) = \alpha'\left(1+\frac{d}{P_x}\right).$$

281. Um noch einen allgemeineren Fall zu betrachten, nehmen wir den, dafs die Tarif-Prämie aus der Netto-Prämie entsteht, indem man

die letztere mit einem für jedes Alter constanten Faktor und alsdann um eine constante Zahl erhöht, sodafs diese Tarif-Prämie ist:

$$P'_x = (1+\alpha)\,P_x + \beta,$$

und ähnlich:

$$P'_{x+m} = (1+\alpha)\,P_{x+m} + \beta.$$

Bezeichnet V die Reserve mit Netto-, V' die mit Tarif-Prämie, dann ist:

$$V' = \frac{(1+\alpha)\,(P_{x+m} - P_x)}{(1+\alpha)\,P_{x+m} + \beta + d}.$$

Substituirt man hierin:

$$P_{x+m} - P_x = (P_{x+m} + d)\cdot V,$$

so ergiebt sich:

$$V' = \frac{(1+\alpha)\,(P_{x+m}+d)\,V}{(1+\alpha)\,P_{x+m} + \beta + d},$$

oder nach leichter Umrechnung:

$$V' = \frac{V}{1 + \dfrac{\beta - \alpha\cdot d}{(1+\alpha)\,(P_{x+m}+d)}}.$$

Hieraus ersieht man, dafs V' gröfser, gleich oder kleiner als V ist, je nachdem β kleiner, gleich oder gröfser als $\alpha\cdot d$ ist.

282. Wenn die Reserve, wie dies z. B. für Versicherungen in fernen Erdteilen stattfinden kann, zu berechnen ist, indem zwar der Tarif vorliegt, aber die zu seiner Berechnung benutzte Sterblichkeitstafel unbekannt ist, so leitet man wohl auch einmal die Netto-Prämien ab, indem man die gegebenen Prämien um den geschätzten Zuschlag für Unkosten vermindert. Diese natürlich nur näherungsweise richtigen Netto-Prämien können dann dazu verwendet werden, die Netto-Reserve näherungsweise zu ermitteln.

Aus den Netto-Prämien kann bei bestimmtem Zinsfufs die Sterblichkeitstafel abgeleitet werden; denn mittels der Formel:

$$P_x = \frac{1}{\mathfrak{a}_x} - \frac{i}{1+i}$$

berechnet man die a aus den P. Nun ist:

$$\mathfrak{a}_x = 1 + \frac{1}{1+i}\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot\mathfrak{a}_{x+1},$$

also:

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = (1+i)\,\frac{\mathfrak{a}_x - 1}{\mathfrak{a}_{x+1}},$$

sodafs sich nunmehr die Lebens- und aus diesen die Sterbenswahrscheinlichkeiten berechnen lassen.

Eine Schwierigkeit, die sich hierbei zeigt, besteht darin, dafs ein Tarif gewöhnlich keine Prämien für die höchsten Altersstufen angiebt; um also die Sterblichkeitstafel auch auf diese fortzusetzen, müssen die Sterbenswahrscheinlichkeiten der höchsten Altersstufen hypothetisch aus denen der jüngeren abgeleitet werden. Dies ist jedenfalls besser, als die Jahresprämien selbst fortzusetzen. Gemeinsame diesbezügliche Versuche von Prof. Dr. **G. J. Legebeke** und mir zeigten uns nämlich, dafs die fortgesetzten hypothetischen Jahresprämien bisweilen einen anscheinend sehr guten Verlauf haben und doch die daraus abgeleiteten Sterbenswahrscheinlichkeiten unmöglich sind.

Statt die Sterbenswahrscheinlichkeiten unmittelbar aus den Prämien abzuleiten, kann man auch zuerst die discontirten Lebenden berechnen. Nimmt man D_x willkürlich an, so ergiebt sich N_{x-1} aus:

$$P_x = \frac{D_x}{N_{x-1}} - \frac{i}{1+i},$$

da $N_{x-1} = N_x + D_x$, so erhält man also N_x. Ähnlich ist:

$$P_{x+1} = \frac{D_{x+1}}{N_x} - \frac{i}{1+i}$$

und daraus findet man D_{x+1} u. s. w.

Diese Möglichkeit, eine Sterblichkeitstafel aus einem gegebenen Tarif zu bestimmen, hat oftmals die Brücke gebildet, um aus ihm den Tarif für eine andere Versicherungsweise abzuleiten.

Reserve auf Grund von zwei Tafeln.

283. Bei Gesellschaften, die schon ziemlich lange bestehn, ist es öfters vorgekommen, dafs sie es nötig fanden, die Reserve nach anderen Grundlagen zu berechnen, als worauf die Prämien begründet waren, ohne dafs es darum nötig war, auch die Prämien selbst zu ändern.

Solche Gesellschaften finden es dann nicht immer ratsam, neue Netto-Prämien nach den neuen Grundlagen zusammenzustellen, halten es vielmehr für besser, bei ihren alten Netto-Prämien zu bleiben.

Ist P die alte Netto-Prämie, während $A'_{(m)}$ und $a'_{(m)}$ auf den neuen Grundlagen beruhn, dann ist die Reserve nach m Jahren:

$$A'_{(m)} - P \cdot a'_{(m)}.$$

Bei dieser Rechnungsweise bleibt der in den Brutto-Jahresprämien einbegriffene Zuschlag ungeändert; würden die Netto-Jahresprämien nach den neuen Grundlagen angenommen, so könnte der Zuschlag für die verschiedenen Alter sehr unregelmäfsig verlaufen.

283*. Nicht selten wird ein Sachverständiger beauftragt, die Reserve für eine Gesellschaft zu berechnen, wenn die Prämien, welche sie von ihren Versicherten erhält, auf Grundlagen beruhn, die jetzt nicht mehr zutreffen, oder auch, wenn die Prämien nicht mathematisch berechnet, aber doch hoch genug sind, um den Verpflichtungen gerecht werden zu können, wie dies bei Arbeiterversicherung bisweilen stattfindet.

In einem solchen Falle thut der Sachverständige am besten, die nötigen Procente für Unkosten der Zukunft von den wirklichen Prämien zu subtrahiren und die so gekürzten Prämien als die Netto-Prämien zu betrachten, welche künftig in Rechnung zu bringen sind.

Er benützt dann den Ausdruck:

$$A'_{(m)} - P \cdot a'_{(m)},$$

wo A' und a' auf die gewählte Tafel gegründet sind, während P die vorausgesetzte Netto-Prämie bedeutet.

Sollte für einige Versicherungen (wie dies möglich ist, wenn sie noch nicht lange bestanden haben) $P \cdot a'_{(m)}$ gröfser als $A'_{(m)}$ sein, die Reserve sich also negativ erweisen, so ist sie für diese Versicherungen gleich null zu setzen.

Diese Methode ist auch von Dr. **Sprague** und Mr. **Bailey** empfohlen und angewendet worden, wenn es sich handelte um die Berechnung der Reserve zur Prüfung der Solvabilität einer Gesellschaft. (Man sehe im Journal of the Institute of Actuaries, April 1895, den Artikel: „On the standard of Solvency in Life Assurance Companies as affected by guaranteed benefits" von **Gerald H. Ryan**). Die hier benutzten Mortalitätstafeln müssen ebenso wie der Zinsfufs der Wirklichkeit nahezu entsprechen.

Es kann sich auch der Fall ereignen, dafs man die Sterblichkeitstafel beibehält, aber einen andern (in der Regel niedrigeren) Zinsfufs anzuwenden verpflichtet ist.

In der Formel $A'_{(m)} - P \cdot a_{(m)}$ beziehen sich dann A' und a' auf den neuen, P dagegen auf den alten Zinsfufs.

284. Viele nehmen an, dafs die Wirkung der ärztlichen Untersuchung durchschnittlich nach 5 Jahren verloren geht, in dem Sinne,

dafs nach dieser Zeit die betreffenden Versicherten nicht mehr zu den sogenannten ausgelesenen Leben gehören. Darum hat man in England besondere Sterblichkeitstafeln zusammengesetzt für diejenigen, die mindestens fünf Jahre versichert waren.

Die Gesellschaften, die demgemäfs rechnen, nehmen ihre Versicherten an nach der Tafel der allgemeinen Sterblichkeit unter Versicherten auf den Todesfall und bestimmen die Prämie nach dieser Tafel (der Tafel H^M des „Institute of Actuaries") als gleichbleibende Netto-Prämie; für die ersten fünf Jahre berechnen sie auch die Reserve nach dieser Tafel, später aber behalten sie zwar die Netto-Prämie nach der Tafel H^M bei, wählen aber die einmalige Prämie und die Leibrente nach Tafel $H^{M(5)}$, welche sich bezieht auf Versicherte, die wenigstens fünf Jahre versichert waren.

Dies giebt selbstverständlich eine höhere Reserve, als wenn man nach fünf Jahren auch die Netto-Prämie nach Tafel $H^{M(5)}$ bestimmte. Man hielt es deswegen nicht für sicher, die Netto-Prämie nach Tafel $H^{M(5)}$ zu wählen, weil die Netto-Reserve nach Tafel $H^{M(5)}$ mit ihren höheren Prämien öfters eine geringere ist als die nach Tafel H^M. Indessen kann man nicht leugnen, dafs bei diesem Verfahren, wenn die Versicherungen 5 Jahre alt sind, plötzlich eine Unterbrechung der Continuität eintritt, welche man denn auch auf verschiedenen Wegen zu mildern sucht. Besonders Dr. **Sprague** hat sich diesbezüglich einen grofsen Verdienst erworben.

Methode der Reserve-Prämie (prime d'inventaire).

285. Eigentlich kann man jede Methode, welche mit einer anderen als der Netto-Prämie rechnet, eine Methode mit Reserve-Prämie nennen. Hier wollen wir jedoch darunter nur diejenige Methode verstehn, die dem Wert der Auszahlungen den Wert von Prämien gegenüberstellt, die ein wenig höher sind als die Netto-Prämien, sodafs eine Reserve entsteht, die etwas niedriger ist als die auf denselben Grundlage berechnete Netto-Reserve, sich von dieser aber immer weniger unterscheidet, je länger die Versicherung dauert. Der Zweck der Methode ist der, von der ersten Prämien-Einnahme über etwas mehr für Unkosten verfügen zu können als von der späteren.

Wenn P die Netto-Prämie ist, so ist die Netto-Reserve nach m Jahren: $A_{(m)} - P \cdot a_{(m)}$. Die Unkosten, welche mit dem Abschliefsen der Versicherung verbunden sind, mögen durch die Zahl μ dargestellt sein. In der Brutto-Jahresprämie, die der Versicherte zahlt, mufs dann

der Teil $\frac{\mu}{a}$, welcher dazu bestimmt ist, diese Unkosten zu decken, mit einbegriffen sein. Die Methode der Netto-Prämie nimmt an, dafs dieser Teil des Zuschlags ebenso wie der Rest jedes Jahr von der Gesellschaft eingenommen wird, obgleich sie bei dem Abschliefsen der Versicherung μ auf einmal zahlt. Die Gesellschaft mufs dann einen Vorschufs leisten, dessen Tilgung ebenso lange dauert wie die Prämien-Zahlung.

Die Methode der Reserve-Prämie dagegen erhöht die Netto-Jahresprämie um einen Betrag λ, und nimmt also $P + \lambda$ als Reserve-Prämie an, sodafs die Reserve nach m Jahren ist:

$$A_{(m)} - (P + \lambda)\, a_{(m)}.$$

Diese Reserve, begründet auf die Reserve-Prämie, ist nun um $\lambda \cdot a_{(m)}$ kleiner als die Netto-Reserve.

Die Reserve-Prämie $P + \lambda$, die sowohl für das Risico wie auch für die ersten Unkosten bestimmt ist, mufs jetzt um den Zuschlag erhöht werden für fortwährende Unkosten und für Gewinnbildung. Die einmalige Netto-Prämie für die Versicherung ist nun $P \cdot a$, der gegenwärtige Wert von demjenigen, was der Versicherte jährlich für Risico und erste Unkosten zusammen zahlt, ist $(P + \lambda) \cdot a$, sodafs für die ersten Unkosten $\lambda \cdot a$ bestimmt wird; setzen wir $\lambda \cdot a = \mu$, so ist also die Reserve-Prämie $P + \frac{\mu}{a}$. Die Zahl $\lambda = \frac{\mu}{a}$ kann je nach dem System constant oder vom Alter des Beitritts abhängig sein.

Nehmen wir jetzt an, dafs die Reserve nach dieser Rechnung nie negativ wird, so wird, nach dem zweiten Jahre blos für die Auszahlung die Jahresprämie $P + \frac{\mu}{a}$ bestimmt; denn wo wir angenommen haben: Reserve gleich dem Wert der Auszahlung, minus dem Wert der Prämie, wird immer die nur für die Auszahlung bestimmte Prämie gemeint. Der Prämie $P + \frac{\mu}{a}$ im ersten Jahr kann die Gesellschaft dann gleich nach dem Abschliefsen die ersten Unkosten μ entnehmen und hat also keinen Vorschufs zu geben.

Tritt indessen der Fall ein, dafs die Reserve während zwei oder mehr Jahren negativ bleibt, so kann man wohl immer für die ersten Unkosten μ ausgeben, nur kann dieser Betrag nicht aus der Prämie des ersten Jahres entnommen werden, sondern es mufs ein teilweiser Vorschufs stattfinden; bringt die Gesellschaft die negative Reserve mit in

Rechnung, was weniger gut ist, so läfst sie diesen Vorschufs durch die Reserve-Rechnung, rechnet sie die negative Reserve = 0, so läfst sie ihn durch die Gewinn- oder Verlust-Rechnung machen, einen Vorschufs, der getilgt ist, sobald die Reserve positiv wird.

Dafs die Reserve während der ersten Jahre negativ wird, findet sehr oft statt bei Versicherungsweisen, für welche schon die Netto-Reserve selbst gering ist, z. B. bei temporärer Versicherung für Auszahlung auf den Todesfall mit kurzem Termin.

Es giebt Gesellschaften, welche zur Feststellung ihrer Reserve-Prämie, die Netto-Prämie erhöhen um $\frac{1}{3}$ des ganzen Zuschlags, sodafs $\frac{2}{3}$ des Zuschlags disponibel bleibt für bleibende Unkosten und Gewinn.

Die $x+1$-Methode.

286. Für einige Versicherungsweisen wollen wir die Bedingung suchen, unter welcher bei dem Arbeiten mit Reserve-Prämie niemals negative Reserve auftritt.

Wir wählen dazu an erster Stelle die Versicherung auf den Erlebensfall nach n Jahren, für welche die Netto-Jahresprämie ist:

$$P_x\,{}_{\overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}.$$

Rechnen wir jetzt mit der Reserve-Prämie P, so ist nach m Jahren die Reserve:

$${}_mV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} - P \cdot \frac{N_{x+m-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+m}}.$$

Soll nun die Reserve nie negativ werden, so findet man den gröfstmöglichen Wert für P, wenn man die Reserve nach 1 Jahr, d. h.

$$\frac{D_{x+n}}{D_{x+1}} - P \cdot \frac{N_x - N_{x+n-1}}{D_{x+1}}$$

$= 0$ setzt, woraus folgt:

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n-1}}.$$

Man erkennt, dafs diese Reserve-Prämie für den x-jährigen gerade die Netto-Prämie $P_{x+1} \cdot {}_{\overline{n+1}|}$ für den $x+1$-jährigen ist, wenn dieser das Geld in demselben Alter erhalten soll wie der x-jährige.

Als erste Unkosten kann man jetzt rechnen:

$$(P_{x+1} - P_x) \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x} =$$

$$= \left(\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n-1}} - \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n+1}} \right) \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}.$$

Da $N_{x-1} = D_x + N_x$ ist, so reducirt sich vorstehender Ausdruck zu:

$$\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n-1}},$$

d. i. gerade zur Reserve-Prämie P_{x+1}. Dies liefs sich erwarten, denn da das Ableben keine Auszahlung zur Folge hat, kann die Gesellschaft, wenn nach einem Jahr keine Reserve gebildet wird, die ganze Prämie des ersten Jahres auf Unkosten ausgeben.

Wenn indessen die Versicherung von kurzer Dauer ist, so ist P_{x+1} viel gröfser als P_x und es entstände dann gewifs, wenn man den fortlaufenden Unkosten Rechnung trägt, eine sehr hohe Brutto-Prämie.

287. Betrachten wir jetzt die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall gegen gleichbleibende Jahresprämie; P_x sei wieder die Netto-, P die Reserve-Prämie, dann ist die Reserve nach m Jahren:

$${}_mV = A_{x+m} - P \cdot a_{x+m}.$$

Nach einem Jahr ist ${}_1V = A_{x+1} - P \cdot a_{x+1}$. Soll also dann die Reserve, d. h.

$A_{x+1} - P \cdot a_{x+1} = 0$ sein, so ist $P = \frac{A_{x+1}}{a_{x+1}}$

zu wählen, d. h. die Reserve-Prämie für den x-jährigen mufs die Netto-Prämie P_{x+1} für den $x+1$-jährigen sein.

Will man nun bei einer solchen Reserve-Prämie P_{x+1} alle ersten Unkosten aus der Prämie des ersten Jahres bestreiten, so mufs nach No. 285, wenn wir das Maximum für Unkosten $= \mu$ setzen,

$$P_x + \frac{\mu}{a_x} = P_{x+1}$$

sein, woraus sich ergiebt:

$$\mu = (P_{x+1} - P_x)\, a_x .$$

Was die Gesellschaft auch im ersten Jahr an Prämie mehr als P_{x+1} erhält, wird auf die gewöhnlichen jährlichen Unkosten und Gewinn gerechnet.

Wie in No. 285 schon ausgeführt ist, wird im ersten Jahre P_{x+1} zur Deckung des Risicos und der ersten Unkosten benützt, in den nächsten Jahren nur zu ersterem Zweck.

Sehen wir jetzt einmal zu, was im ersten Jahr zur Deckung des Risicos zur Verfügung steht.

Es ist dies offenbar:

$$P_{x+1} - (P_{x+1} - P_x)\, a_x .$$

Substituirt man hierin:

$$P_x = \frac{1}{a_x} - d, \quad P_{x+1} = \frac{1}{a_{x+1}} - d,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{1}{a_{x+1}} + \frac{1}{1+i} - \frac{a_x}{a_{x+1}}.$$

Nun ist

$$a_x = 1 + \frac{1}{1+i} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x}\, a_{x+1},$$

also:

$$\frac{a_x}{a_{x+1}} = \frac{1}{a_{x+1}} + \frac{1}{1+i} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

sodafs man im ersten Jahr zur Deckung des Risicos verfügen kann über:

$$\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+i} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{1}{1+i}\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right),$$

was gerade die Prämie für den x-jährigen ist, um während eines Jahres versichert zu sein.

Man kann auch folgenderweise vorgehn: für das erste Jahr bestimmt man für das Risico die Summe Z, man soll denn ausdrücken, dafs der Barwert der Prämie unverändert bleiben mufs, wenn dieselbe jedes Jahr gleich grofs wäre. Man findet dann die Gleichung:

$$P_x \cdot a_x = Z + \frac{1}{1+i} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot P_{x+1} \cdot a_{x+1},$$

oder

$$A_x = Z + \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot A_{x+1},$$

oder

$$\frac{M_x}{D_x} = Z + \frac{M_{x+1}}{D_x},$$

woraus folgt: $$Z = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} = \frac{C_x}{D_x},$$

das ist die Prämie für ein Jahr.

Die Sache kommt also auf Folgendes hinaus: man denkt sich, dafs der Versicherte, was die eigentliche Versicherung betrifft, im ersten Jahr nur für diejenige während dieses einen Jahres, jedes nachfolgende Jahr aber P_{x+1} für seine fortwährende Versicherung zahle; wir haben also hier dann den in No. 123 besprochenen Fall.

Die Methode hat zwar den Vorteil, dafs sie nie zu einer negativen Reserve führt — wenigstens solange man die Versicherungen für sehr junge Kinder ausschliefst, wo $P_{x+1} < P_x$ ist —, man kann aber die Abschlufs-Provision schwerlich consequent darnach einrichten; denn für das jugendliche Alter ist die Differenz zwischen P_x und P_{x+1} sehr gering, man würde also leicht eine zu geringe Abschlufs-Provision erhalten; bei sehr hohem Alter dagegen ist die Differenz zwischen P_x und P_{x+1} ziemlich grofs. Die Gesellschaften, welche nach der $x+1$-Methode rechnen, wählen ihre Abschlufs-Provisionen denn auch in diesen Fällen nicht nach ihrer Methode, sondern schiefsen bei denjenigen, die in jugendlichem Alter beitreten, anfangs vor, und bei denjenigen, die in höherem Alter beitreten, behalten sie etwas übrig.

Indessen mufs stets dafür gesorgt sein, dafs die Brutto-Prämie genügend höher ist als P_{x+1}, um daraus jährlich wenigstens über die gewöhnlichen Administrationskosten verfügen zu können. Für die Fälle, dafs die Brutto-Prämie dadurch allzu hoch würde, mufs die Reserve-Prämie niedriger als P_{x+1} angesetzt werden.

Wir brauchen die $x+1$-Methode nicht noch für andere Versicherungsweisen zu behandeln; für jede Versicherungsweise und Prämien-Zahlung, wo die Netto-Reserve die Form $(P_{(m)} - P) \cdot a_{(m)}$ hat (No. 251), braucht man P nur zu ersetzen durch $P_{(1)}$, die Netto-Prämie für das um ein Jahr höhere Alter, oder bei mehr Leben durch die Prämie für durchweg ein Jahr ältere Personen, um die Reserve nach der $x+1$-Methode zu erhalten. Immer sieht man dann sofort, dafs für $m = 1$ die Reserve $= 0$ ist.

Diese viel angewandte, viel besprochene und auch viel bestrittene Methode ist in England von **T. B. Sprague** eingeführt worden. Auf dem Continent ist sie bekannt als Zillmer'sche Methode, weil sie Dr. **A. Zillmer** in Deutschland eingeführt hat. Sie ist auch von **Actuarius** in dem Moniteur des Assurances (Teil 22, 1890) empfohlen worden. Sie hat aber sehr wenig Effect bei Versicherungs-

weisen, bei denen schon die Netto-Reserve sehr gering ist, z. B. bei temporärer Versicherung auf den Todesfall mit kurzer Dauer.

288. Bei lebenslänglicher Versicherung gegen lebenslängliche gleichbleibende Jahresprämie ist die Reserve nach der $x+1$-Methode nach m Jahren:

$$A_{x+m} - P_{x+1} \cdot a_{x+m} = 1 - d \cdot a_{x+m} - \left(\frac{1}{a_{x+1}} - d\right) \cdot a_{x+m} =$$

$$= 1 - \frac{a_{x+m}}{a_{x+1}}.$$

Die Differenz zwischen dieser und der Netto-Reserve ist also:

$$\frac{a_{x+m}}{a_{x+1}} - \frac{a_{x+m}}{a_x}.$$

Daraufhin berechnen einige Gesellschaften die Reserve für die lebenslängliche Versicherung gegen temporäre Prämie sowie auch für die gemischte Versicherung, indem sie von der Netto-Reserve dieselbe Differenz subtrahiren.

Wenn dieses Verfahren auch nicht ausreichend logisch begründet ist, so läfst es sich doch vom praktischen Standpunkt aus verteidigen; keinesfalls darf es aber angewendet werden, nachdem die Prämienzahlung aufgehört hat, und ebensowenig ist es brauchbar bei Versicherungen mit nur einmaliger Prämienzahlung.

Eine vermittelnde Methode.

289. Es giebt Gesellschaften, deren Methode sozusagen die Mitte hält zwischen der $x+1$- und der Netto-Methode.

Man wählt für alle, die bei ihrem Zutreten zwischen dem 1. Januar und dem 31. December das volle Alter von 40 Jahren erreicht haben und von denen also einige am 31. December gerade 40, andere fast 41 Jahre alt sein werden, als Reserve-Prämie die Netto-Prämie des 41-jährigen und nimmt sie am 31. December sämmtlich als 41 Jahr alt an. Dann ist für alle im Laufe des Jahres Eingeschriebenen die Reserve am Ende des Jahres $= 0$, nämlich $A_{41} - P_{41} \cdot a_{41}$, einige derselben aber sind erst ungefähr einen Tag, andere ein ganzes Jahr versichert, sodafs durchschnittlich nach halbjähriger Mitgliedschaft die Reserve $= 0$ ist. Zahlen nun die Versicherten eine Brutto-Prämie, so viel wie möglich nach dem richtigen Alter (vergl. No. 202), so ist diese durch-

schnittlich die des $40\frac{1}{2}$-jährigen, und es steht dann eine Reserve-Prämie P_{41} einer Netto-Prämie $P_{40\frac{1}{2}}$ gegenüber.

Hier war in der Hauptsache die Rede von lebenslänglicher Versicherung. Will man indes bei gemischter Versicherung die Reserve solcherweise berechnen, dafs dieselbe nach einem halben Jahre noch null ist, aber dann positiv wird, so wähle man die Reserve-Prämie

$$\tfrac{1}{2}\,(P_{40\,.\,\overline{20}|} + P_{41\,.\,\overline{19}|}),$$

worin die P Netto-Prämien sind. Ist aber die ganze Dauer der Versicherung kurz, so kann diese Reserve-Prämie noch zu hoch sein gegenüber der Brutto-Prämie.

Eine Methode für jede Zahlungsweise der Prämien.

290. Wie wir schon für einen einzelnen Fall in No. 287 erläutert haben, kann man überall, wo mit einer Reserve-Prämie gerechnet wird, die Sache auf die Weise deuten, dafs der Versicherte zwar jedes Mal gleich viel an Brutto-Prämie, deshalb aber nicht jedes Jahr gleich viel für seine Versicherung zahle; im ersten Jahr zahle er dafür am wenigsten und erst nach dem zweiten, dritten oder noch späteren Jahr zahle er dafür jährlich gleich viel. Nun kann man leicht berechnen, wie hoch die gleichbleibende Prämie der späteren Jahre gesetzt werden mufs, wenn jemand, der eine lebenslängliche Versicherung eingeht, während der ersten zwei Jahre nicht mehr zahlen will, als gerade für die Versicherung jedes dieser Jahre nötig ist.

Die Antwort ist einfach: im ersten Jahre $\frac{C_x}{D_x}$, im zweiten $\frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}$ und in jedem späteren $\frac{M_{x+2}}{D_{x+2}}$.

Dies sind selbstverständlich Netto-Prämien; nimmt man jetzt bei einer lebenslänglichen Versicherung gegen gleichbleibende Jahresprämie $\frac{M_{x+2}}{D_{x+2}}$ als Reserve-Prämie, so kann man zwar, wie einige durchaus wollen, sagen, dafs man mit Netto-Prämie rechne, im Grunde ist dies aber nur ein Spiel mit Worten, denn thatsächlich sind es doch ganz andere Netto-Prämien, als sie sonst dem betreffenden Alter zukommen. Mit demselben Recht könnte man dann jede Methode, wo die Reserve-Prämie (sei es auch noch so wenig), geringer ist als die Brutto-Prämie, eine Netto-Prämien-Methode nennen.

Wenn man dafür sorgt, dafs auch von den bereits früher abgeschlossenen Versicherungen auch in Zukunft noch Gewinn zu erwarten, der Gewinn also nicht nur von neuem Zugang an Versicherungen abhängig ist, m. a. W. wenn keine Anticipation des Gewinns stattfindet, und wenn man den zukünftigen Unkosten genügend Rechnung trägt, so kann man das Suchen nach Worten, um ein solches Verfahren zu verhüllen, nur bei Dilettanten begreifen, die einmal ein einseitig geschriebenes, populäres Buch über Lebensversicherung gelesen und vielleicht auch dieses nur halb verstanden haben.

Aber noch mehr: es kann vorkommen, dafs die Netto-Reserve, auch dann, wenn man sonst dieselben Grundlagen benützt, nicht nur nicht unter allen Umständen am höchsten ist, sondern sie kann sogar nicht hoch genug sein.

Man denke sich eine Gesellschaft, die Versicherungen nur gegen einmalige Prämie abschliefst, wie z. B. sofort beginnende Leibrente, die Gesellschaft habe ihre Netto-Prämie nicht nur für die Unkosten des Abschliefsens erhöht, die sofort wieder ausgegeben werden, sondern auch für die weitere Administration und zur Erzielung von Gewinn. Würde eine solche Gesellschaft die Reserve nach der Netto-Methode berechnen, so verfügte sie sofort nach Abschlufs einer neuen Versicherung über den gesammten Zuschlag, und wäre in derselben Lage wie eine Gesellschaft, welche die ganze jährliche Brutto-Prämie als Reserve-Prämie betrachtet: sie ist ganz und gar auf das Abschliefsen neuer Versicherungen angewiesen, wenn nicht die Wahl der Sterblichkeitstafel und des Zinsfufses sich in der Zukunft vorteilhaft erweist.

Nicht anders liegt die Sache im Princip bei den Versicherungen gegen temporäre Prämienzahlung von kürzerer Dauer als die Versicherung, denn sobald letztere aufgehört hat, kann man von dem Zuschlag nichts mehr erwarten.

Wenn nun auch in der Regel die Anzahl der Versicherungen zu einmaliger oder temporärer Jahresprämie gegenüber denen mit fortwährender Prämie gering ist, so ist es doch empfehlenswert und auch nicht schwer, ihnen Rechnung zu tragen.

Es handle sich um lebenslängliche Versicherung für Auszahlung auf den Todesfall.

Die ersten Unkosten seien wieder bezeichnet mit μ, und es bedeute α einen in der einmaligen Brutto-Prämie einbegriffenen Teil, bestimmt zur Bestreitung der Administrationskosten und für den Gewinn

in den folgenden Jahren, sodafs auf jedes Jahr $\frac{\alpha}{a_x}$ entfällt. Alsdann mufs nach m Jahren die Reserve der einmaligen Brutto-Prämie sein:

$$ {}_mV_x = A_{x+m} + \alpha \cdot \frac{a_{x+m}}{a_x}. \qquad (424) $$

Nehmen wir jetzt bei Zahlung einer fortwährenden gleichbleibenden Jahresprämie als Reserve-Prämie an:

$$ \frac{A_x + \mu + \alpha}{a_x}, $$

dann ist die Reserve nach m Jahren:

$$ {}_mV_x = A_{x+m} + \alpha \cdot \frac{a_{x+m}}{a_x} - \frac{A_x + \mu + \alpha}{a_x} \cdot a_{x+m}. \qquad (425) $$

Augenscheinlich ist dies dieselbe Reserve wie:

$$ A_{x+m} - \left(P_x + \frac{\mu}{a_x}\right) \cdot a_{x+m} \text{ in No. 285.} $$

Nach Formel (424) kann man die Rechnung jetzt leicht für jede andere Art der Prämien-Zahlung durchführen.

Wird z. B. die Prämie innerhalb n Jahren gezahlt, so ist die temporäre Netto-Jahresprämie $\frac{A_x}{a_{x\,\overline{n}|}}$, und als Reserve-Prämie nehmen wir:

$$ \frac{A_x + \mu + \alpha}{a_{x\,\overline{n}|}}, $$

alsdann ist die Reserve nach m Jahren, wenn $m < n$:

$$ {}_mV = A_{x+m} + \frac{\alpha}{a_x} \cdot a_{x+m} - \frac{A_x + \mu + \alpha}{a_{x\,\overline{n}|}} \cdot a_{x+m\,.\,\overline{n-m}|}. \qquad (426) $$

Wenn $m \geqq n$, ist die Reserve wieder einfach die der Formel (424):

$$ {}_mV = A_{x+m} + \frac{\alpha}{a_x} \cdot a_{x+m}. $$

291. Es ist zweckmäfsig, für $\frac{\alpha}{a_x}$ die Abkürzung β zu substituiren, sodafs Formel (424) in

$$ {}_mV = A_{x+m} + \beta \cdot a_{x+m} \qquad (427) $$

übergeht. Man kann nun einen Tarif für die Reserven einmaliger Prämien aufstellen, der den zukünftigen Unkosten Rechnung trägt und

hat dann nur jedesmal die Reserve-Prämie entsprechend zu wählen, um welche Zahlungsweise von Jahresprämien es sich auch immer handele. Es versteht sich, dafs die Gröfse β nicht für jedes Alter gleich grofs zu sein braucht (vergl. Kapitel VIII).

Bei Zahlung einer fortwährenden gleichbleibenden Jahresprämie müssen wir als Reserve-Prämie nehmen:

$$\frac{A_x + \mu}{a_x} + \beta.$$

Man hat also, um die Reserve-Prämie, sie sei gleichbleibend oder veränderlich, zu bestimmen, $A_x + \mu + \beta \cdot a_x$ durch die entsprechende Leibrente zu dividiren.

Was mich persönlich betrifft, so ist im Allgemeinen diese Methode der Reserveberechnung, welche die Gegenwart nicht allzu schwer belastet und gleichzeitig bei jeder Weise der Prämienzahlung die Zukunft im Auge behält, die empfehlenswerteste.

Setzt man $\mu = 0$, so giebt dies die Methode, welche vom Comité der vier grofsen französischen Gesellschaften empfohlen wird. Sie trägt den Unkosten der Zukunft auch bei einmaliger oder temporärer Prämie, aber gar nicht den gröfseren Unkosten des ersten Jahres Rechnung, das heifst die Netto-Methode nur nach einiger Richtung corrigiren. (Man sehe einen Artikel von Herrn **Léon Marie**: „Les nouveaux Tarifs des Compagnies françaises d'Assurances sur la vie" im holländischen Jahrbuch für 1895.)

Für schon angefangene Leibrente wäre die Reserve-Formel

$$(1 + \beta) \cdot a_{x+m} \text{ (siehe No. 238).}$$

Die ersten Unkosten bei den Activen.

292. Es giebt Gesellschaften, welche die Reserve nach der Methode der Netto-Prämie berechnen und diese Reserve also als Passiv-Posten in ihre Bilanz bringen, dagegen den gegenwärtigen Wert desjenigen, was die Versicherten noch zahlen müssen, um die ersten Unkosten zu bestreiten, als Activ-Posten aufnehmen. Handelt es sich z. B. um lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall und ist P_x die Netto-Jahresprämie, so hat man nach m Jahren als Passivum:

$${}_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}.$$

Betragen andererseits die ersten Unkosten μ, so entrichtet der

Versicherte zur Tilgung derselben jährlich $\frac{\mu}{a_x}$. Der gegenwärtige Wert dieser jährlichen Einlage, nämlich $\frac{\mu}{a_x} \cdot a_{x+m}$, ist dann das Activum.

Der Erfolg eines derartigen Verfahrens ist augenscheinlich derselbe, als wenn man mit der Reserve-Prämie $P_x + \frac{\mu}{a_x}$ rechnete, sodafs die Reserve wäre:

$$A_{x+m} - \left(P_x + \frac{\mu}{a_x}\right) \cdot a_{x+m}.$$

Wenn man aber diese Methode für jede Versicherung anwendet, führt man hier und dort sozusagen unbemerkt eine negative Reserve ein. Eine solche läfst sich freilich vermeiden, wenn man auf Grund einer vorherigen Untersuchung die Versicherungen aus der Reserve-Rechnung ausscheidet, welche zu einer negativen Reserve führen würden.

293. Andere Gesellschaften, die auch mit Netto-Prämien rechnen, nehmen für jede Versicherung die ersten Unkosten zu den Activen, tilgen sie aber in einer bestimmten Anzahl von (z. B. 10) Jahren, indem sie jährlich $\frac{1}{10}$ abschreiben.

Diese Methode, bei Feststellung der Bilanz den unvermeidlichen Unkosten, die mit dem Abschliefsen der Versicherungen verbunden sind, Rechnung zu tragen, mag dem Laien gegenüber den Vorzug der Deutlichkeit haben, rationell ist sie aber gewifs nicht; auch giebt sie nicht weniger Veranlassung als andere, unbemerkt eine negative Reserve in Rechnung zu stellen.

Die ersten Unkosten über einige Jahre verteilt.

294. Wird (No. 191) bei lebenslänglicher Versicherung während der ersten fünf Jahre jährlich die Prämie $P - f$ und während der späteren Jahre jährlich P für das Risico bestimmt, so ist am Ende des ersten Jahres die Reserve:

$${}_1V = A_{x+1} - (P - f) \cdot \frac{N_x - N_{x+4}}{D_{x+1}} - P \cdot \frac{N_{x+4}}{D_{x+1}}$$

oder

$${}_1V = A_{x+1} - (P - f) \cdot a_{x+1} - f \cdot \frac{N_{x+4}}{D_{x+1}}.$$

Substituirt man hierin nach Formel (310):

$$P - f = P_x - f \cdot \frac{N_{x+4}}{N_{x-1}},$$

so wird:

$${}_1V = A_{x+1} - P_x \cdot a_{x+1} - f \cdot \left(1 - \frac{N_x}{N_{x-1}}\right) \cdot \frac{N_{x+4}}{D_{x+1}},$$

wodurch die Differenz gegen die Netto-Reserve deutlich hervortritt.

Weiter ist:

$${}_2V = A_{x+2} - (P - f) \cdot a_{x+2} - f \cdot \frac{N_{x+4}}{D_{x+2}},$$

u. s. w.

$${}_5V = A_{x+5} - P \cdot a_{x+5}, \text{ u. s. w.}$$

Versicherung mit Gewinn-Anteil.

295. Bei Gesellschaften, welche ihren Versicherten entweder nach allen oder nur nach einigen Tarifen Anteil am Gewinn zugestehen, wird der Einfluſs dieses Umstandes sich auch bei der Berechnung der Reserve sichtbar machen müssen. In noch stärkerem Maſse soll mit diesem Umstande Rechnung getragen werden, wenn eine Gesellschaft separate Tarife hat für dieselben Versicherungsarten, ohne und mit Anteil am Gewinn.

Bei den Versicherungen mit Gewinn-Anteil erscheint es zumindestens vorsichtig, die Prämien-Reserve höher zu nehmen als für dieselben Versicherungen ohne Gewinn-Anteil. Folgt man bei der Verteilung einem System der steigenden Dividende, so erscheint es selbst notwendig, eine Gewinnreserve zu formieren, weil sonst Enttäuschungen in der Zukunft stark zu befürchten sind und zwar in viel stärkerem Maſse, als wenn der Anteil am Gewinn unabhängig ist von der Zeit, während welcher die Versicherung in Kraft war.

Die Berücksichtigung des Beitritts im Laufe des Jahres.

296. Die Reserve wird in der Regel bei einer Gesellschaft für das Ende des Jahres berechnet; die obigen Formeln, ausgenommen die Methode in No. 289, stellen aber alle die Reserve dar, wie sie eine volle Anzahl von Jahren nach dem Abschlieſsen der Versicherung sein soll. Nun werden die meisten Versicherungen nicht am Anfang, sondern im Laufe des Jahres abgeschlossen, und insoweit dafür Jahresprämien ge-

zahlt werden, geschieht dies in der Regel an dem Datum des Beginns der Versicherung. Es kommt also darauf an, die Reserve zu bestimmen, wie sie sich eine gemischte Anzahl von Jahren nach dem Anfang der Versicherung stellt.

Hierzu könnten wir von der Voraussetzung ausgehn, dafs das Ableben gleichmäfsig über das Jahr verteilt ist. Nachdem wir aber unter dieser Voraussetzung die Leibrente so ausführlich behandelt haben, glauben wir hier von einer entsprechenden Entwicklung absehen zu können, einmal weil wir dort bemerkt haben, dafs die Formeln in der Praxis allzu weitläufig werden in Anbetracht der erforderlichen Genauigkeit, und aufserdem, weil die Voraussetzung selbst nicht zutrifft.

Sei für jede Versicherung die Reserve nach m Jahren ${}_mV$, also nach $m+1$ Jahr ${}_{m+1}V$; k sei eine Zahl, kleiner als 1.

Wenn wir annehmen, dafs die Zunahme, oder auch die Abnahme der Reserve (wie letztere z. B. bei temporärer Versicherung auf den Todesfall gegen das Ende des Vertrages hin stattfindet) im Laufe des Jahres der Zeit proportional ist, so ist nach $m+k$ Jahren die Reserve:

$$ {}_{m+k}V = (1-k)\cdot {}_mV + k\cdot {}_{m+1}V. \qquad (428)$$

Nun setzen die Formeln für ${}_mV$ und ${}_{m+1}V$ voraus, dafs unmittelbar nach dem Zeitpunkt, für welchen die Reserve berechnet ist, eine neue Prämien-Zahlung erfolgt; dasselbe gilt also für Formel (428); dieselbe könnte daher, so wie sie ist, benutzt werden, wenn man die Prämien-Zahlung so einrichtete, dafs sie stets am Anfang des Jahres stattfände.

Unten wollen wir angeben, wie man die Reserve nach Formel (428) verbessern kann, um dem Datum der Prämien-Zahlung Rechnung zu tragen.

297. Bei einer grofsen Anzahl von Versicherungen kann man unbedenklich voraussetzen, dafs die Versicherten durchschnittlich inmitten des Jahres beigetreten sind, und also für alle, die wenigstens m und höchstens $m+1$ Jahre versichert sind, die Reserve-Formel:

$$ \tfrac{1}{2}({}_mV + {}_{m+1}V) \qquad (429)$$

anwenden.

Es ist zweckmäfsig, Tafeln der Werte von (429) für die verschiedenen m aufzustellen.

Ein anderes Verfahren, dessen Endresultat von dem des vorher-

gehenden nicht wesentlich abweichen wird, beruht darauf, dafs man alle in der ersten Hälfte des Jahres Beigetretenen als am Anfang desselben, alle in der zweiten Hälfte des Jahres Beigetretenen als am Ende dieses Jahres beigetreten voraussetzt.

Es ist jedoch ratsam, die allerhöchsten Versicherungen nicht in dieser Weise zu behandeln. Hat man z. B. viele Versicherungen zu einem Betrage von 10.000 M., aber wenige von höherem, so kann man auf die letzteren Formel (428) anwenden und dabei die Dauer der Versicherung bis auf einen Monat genau nehmen; dies wird besonders notwendig sein bei hohen Versicherungen mit temporärer Prämien-Zahlung von kurzer Daner.

298. Es ist nicht nötig, von den Werten von ${}_mV$ und ${}_{m+1}V$ selbst auszugehn; auch haben wir schon in No. 289 hinsichtlich einer besonderen Reserve-Prämie einen anderen Weg eingeschlagen. Man kann auch auf der Formel fufsen:

$$ {}_mV = A_{(m)} - P \cdot \mathrm{a}_{(m)}, $$

dann ist die Reserve nach $m+k$ Jahr:

$$ {}_{m+k}V = A_{(m+k)} - P \cdot \mathrm{a}_{(m+k)}, \qquad (430) $$

in welcher man dann weiter substituiren kann:

$$ A_{(m+k)} = (1-k)\, A_{(m)} + k\, A_{(m+k)}, $$
$$ \mathrm{a}_{(m+k)} = (1-k)\, \mathrm{a}_{(m)} + k\, \mathrm{a}_{(m+k)}. $$

Setzt man das Beitreten durchschnittlich in der Mitte des Jahres an, so hat man die Formel:

$$ {}_{m+\frac{1}{2}}V = \tfrac{1}{2}(A_{(m)} + A_{(m+1)}) - \tfrac{1}{2} P \cdot (\mathrm{a}_{(m)} + \mathrm{a}_{(m+1)}). \qquad (431) $$

299. Im Allgemeinen findet man nicht ganz dasselbe Resultat, wenn man zur Berechnung der Reserve ${}_{m+k}V$ interpolirt zwischen ${}_mV$ und ${}_{m+1}V$ und wenn man die Formel (430) anwendet und $A_{(m+k)}$ interpolirt zwischen $A_{(m)}$ und $A_{(m+1)}$, $\mathrm{a}_{(m+k)}$ zwischen $\mathrm{a}_{(m)}$ und $\mathrm{a}_{(m+1)}$.

Bei allen denjenigen Versicherungsarten aber, bei welchen die einmalige Prämie die Form $A = 1 - d \cdot \mathrm{a}$ annimmt (und es giebt deren viele), geben beide Methoden genau dasselbe Resultat.

In diesem Falle ist nämlich

$$ A_{(m+1)} - A_{(m)} = d\,(\mathrm{a}_{(m)} - \mathrm{a}_{(m+1)}). $$

Setzt man

$$A_{(m+k)} = (1-k) \cdot A_{(m)} + k \cdot A_{(m+1)},$$

so kann man hierfür schreiben:

$$1 - d \cdot a_{(m+k)} = (1-k)(1 - d \cdot a_{(m)}) + k \cdot (1 - d \cdot a_{(m+1)}),$$

woraus folgt:

$$a_{(m+k)} = (1-k) \cdot a_{(m)} + k \cdot a_{(m+1)}.$$

Sollte man die Reserve-Formel

$${}_mV = (P_{(m)} - P) \cdot a_{(m)},$$

anwenden, so giebt es einen geringen Unterschied, je nachdem man direct zwischen die V interpolirt und also die Formel (428) anwendet, oder:

$${}_{m+k}V = (P_{(m+k)} - P) \cdot a_{(m+k)}$$

setzt, $P_{(m+k)}$ interpolirt zwischen $P_{(m)}$ und $P_{(m+k)}$ also

$$P_{(m+k)} = (1-k) \cdot P_{(m)} + k \cdot P_{(m+1)}$$

und $a_{(m+k)}$, wie oben, interpolirt zwischen $a_{(m)}$ und $a_{(m+1)}$.

Die Formeln (430) und (431) setzen wieder voraus, dafs unmittelbar nach dem Zeitpunkt, für welchen die Reserve berechnet wird, eine Jahresprämie gezahlt wird.

Nun kann Formel (430) der Voraussetzung angepafst werden, dafs eine Prämie erst wieder $1-k$ Jahr nach jenem Zeitpunkt gezahlt wird. Es wird dann angenommen, dafs der Zutritt k Jahr vor dem Ende eines Jahres stattfand, wenn, wie vorausgesetzt, die Reserve am Ende des Jahres berechnet wird. Man hat einfach in Formel (430) a_{m+k} zu ersetzen durch die um $1-k$ Jahr aufgeschobene Leibrente, d. h. mit genügender Annäherung durch $a_{(m+1)} - 1 + k$ (No. 205), und dann wird die Reserve-Formel:

$${}_{m+k}V = A_{(m+k)} - P \cdot (a_{(m+k)} - 1 + k), \qquad (432)$$

während wir statt Formel (431) erhalten:

$${}_{m+\frac{1}{2}}V = \tfrac{1}{2}(A_{(m)} + A_{(m+1)}) - \tfrac{1}{2} P (a_{(m)} + a_{(m+1)} - 1). \qquad (433)$$

300. Es könnte scheinen, als wollten wir den Versicherten nur ein Beitrittsalter in vollen Jahren zuschreiben; das ist aber die Absicht nicht. Man kann allen, die beim Beitritt zwischen 40 und 41 Jahr alt waren, das Alter $40\frac{1}{2}$ zuteilen. Ist die Reserve-Prämie des 40-jährigen P_{40}, die des 41-jährigen P_{41}, so ist die des $40\frac{1}{2}$-jährigen zu nehmen

$$\tfrac{1}{2}(P_{40} + P_{41}).$$

An einem Beispiel wollen wir erläutern, wie man nötigenfalls noch genauer rechnen kann.

Jemand, der am 20. April 1841 geboren ist, versichere sich am 16. Juni 1879, also im Alter von 38 Jahren und 2 Monaten, gegen Jahresprämie, jedesmal zahlbar am 16. Juni.

Ist jetzt die Reserve-Prämie für den 38-jährigen P_{38}, die für den 39-jährigen P_{39}, so kann man dieselbe in unserm Fall setzen auf:

$$\tfrac{5}{6} P_{38} + \tfrac{1}{6} P_{39} = P.$$

Zieht man die Bilanz für den 31. December 1892, so ist der Versicherte 51 Jahr 8 Monate alt, sodafs sich bei Anwendung der Formel (432) ergiebt:

$$V = \tfrac{1}{3} A_{51} + \tfrac{2}{3} A_{52} - P\,(\tfrac{1}{3} a_{51} + \tfrac{2}{3} a_{52} - \tfrac{11}{24}),$$

und zwar entsteht der Bruch $\frac{11}{24}$, weil die erste neue Prämienzahlung $5\frac{1}{2}$ Monate nach Festsetzung der Reserve stattfindet.

In besonderen Fällen ist es bisweilen nötig, so genau zu rechnen; auch giebt es noch Gesellschaften, die sowohl das Alter wie auch die Dauer der Versicherungen scharf in Betracht ziehen, während die meisten anderen mehr und mehr davon abkommen.

So giebt es Gesellschaften, welche für Versicherungen auf den Erlebensfall und für gemischte Versicherungen bei der Berechnung der Reserve die zukünftige Dauer in ganzen Zahlen von Jahren nehmen und die Jahresteile vernachlässigen; ebenso handeln dieselben dann mit der künftigen Dauer der Prämienzahlungen im Falle der lebenslänglichen Versicherung mit temporärer Prämie.

Bei temporärer Versicherung auf den Todesfall nehmen sie ebenso die Dauer in ganzen Jahren, rechnen dabei aber einen Jahresteil für ein ganzes Jahr.

Das sind Mafsnahmen, welche die Reserve erhöhen und das Rechnen erleichtern.

Andere Gesellschaften hingegen rechnen zwar die zukünftige Dauer auch in ganzen Jahren, wählen dazu aber die nächstliegende Anzahl, sodafs diese Anzahl für die eine Versicherung zu grofs, für die andere zu klein erscheint. Bei einer sehr grofsen Anzahl Versicherungen kann man dann annehmen, dafs die Differenzen sich ausgleichen.

Bezahlung in Raten.

301. Wenn die Versicherten die Jahresprämie in Raten bezahlen, aber auch in ihrem Sterbejahre die Prämie für das ganze Jahr schulden,

(No. 228), sodafs nur ein Zuschlag wegen des Zinsverlustes berechnet zu werden braucht, so stellt sich die Prämien-Reserve ebenso hoch als bei Zahlung einer Jahresprämie.

Bezahlen die Versicherten jedoch in Raten, dafs beim Tode die weitere Zahlung ausbleiben kann, so könnte man in der Reserve-Formel

$$A_{(m)} - P \cdot a_{(m)}$$

unter P die für die Ratenzahlung erhöhte Jahresprämie verstehen, und die $a_{(m)}$ ersetzen durch den Wert der Leibrente in Raten: $a^{(n)}_{(m)}$.

Wenn der Versicherte in diesem Falle während einer ganzen Anzahl Jahre gezahlt hat, ist die Reserve immer etwas höher, als wenn er in Jahresprämien gezahlt hätte, denn er hat mehr gezahlt und die Gesellschaft hat dasselbe Risiko gelaufen.

Meistens aber macht man den Unterschied nicht und betrachtet alle Versicherten, als ob sie Jahresprämien zahlten.

Gruppirung nach dem Alter.

302. Wenn viele gleichartige Versicherungen bestehn, ist es, die sehr hohen Versicherungen wieder ausgenommen, nicht nötig, die Reserve Posten für Posten zu berechnen.

Beginnen wir mit der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall gegen gleichbleibende Jahresprämie.

Ist S die einzelne Versicherungssumme, P die entsprechende Reserve-Prämie, dann ist, wenn der Versicherte das Alter von y Jahren erreicht hat, die Reserve:

$$S \cdot A_y - P \cdot a_y.$$

Für die ganze Gruppe derjenigen, die bei Bestimmung der Reserve y Jahr alt sind, ist dann die Reserve:

$$A_y \cdot \Sigma(S) - a_y \cdot \Sigma(P), \qquad (434)$$

wo $\Sigma(S)$ die Summe aller versicherten Kapitalien, $\Sigma(P)$ diejenige der Reserve-Prämien, A_y wie früher die einmalige Netto-Prämie für die Einheit auf den Todesfall, a_y den Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente 1 per Jahr bedeutet.

Das Alter y für den Zeitpunkt der Reservebestimmung kann auf verschiedene Weise eingeschätzt werden, je nach der Art der Aufzeichnung.

Sind nämlich alle Versicherten mit demselben Geburtsjahr in dasselbe Register eingetragen und ist daneben für jeden einzelnen das

Kapital und die Reserve-Prämie vermerkt, so kann man rechnen wie in No. 54. Die in das Register für das Jahr 1850 Eingetragenen sind am 31. December 1892 zwischen 42 und 43 Jahr alt, man kann ihnen also das durchschnittliche Alter $42\frac{1}{2}$ Jahr geben, und die Reserve ist folglich für diese Gruppe:

$$A_{42\frac{1}{2}} \cdot \Sigma(S) - a_{42\frac{1}{2}} \cdot \Sigma(P),$$

worin

$$A_{42\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(A_{42} + A_{43}), \quad a_{42\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(a_{42} + a_{43}).$$

Rechnet man nach der Methode von No. 56, die auch in No. 289 behandelt ist, dann werden beispielsweise alle im Laufe des Jahres 1885 in einem Alter zwischen 40 und 41 Jahr Beigetretenen als am 1. Januar 1845 geboren betrachtet; sie kommen also alle zusammen in das Register für 1845 und es wird ihnen am 31. December 1892 das volle Alter von 48 Jahren zugeteilt.

Die Methode von No. 58, bei welcher den Versicherten auch eine volle Anzahl von Jahren zugeschrieben wird, ist indessen die genaueste von den dreien. Bei jeder von ihnen faſst man diejenigen zusammen, die bei Bestimmung der Reserve dasselbe taxirte Alter haben, und für alle gilt die Formel (434).

Ermittelt man auf diesem Wege die Reserve für jedes Alter, so erhält man durch Summirung die totale Reserve für die Gesammtheit der in derselben Weise Versicherten.

303. Indessen ist auch bei anderer Zahlungsweise der Prämien und sogar bei anderen Versicherungsweisen eine solche Gruppirung nach dem gegenwärtigen Alter möglich, wenn wenigstens für jede einzelne Versicherung gewisse Daten in die Register eingetragen sind. Von Vereinfachung abgesehn, folgen wir hierbei Herrn **J. H. Schuylenburg.**

Nehmen wir die lebenslängliche Versicherung gegen temporäre Jahresprämie.

Wir setzen voraus, daſs die Prämien-Zahlung währt, bis der Versicherte z Jahr wird. Bedeutet dann P die Reserve-Prämie bis zu diesem Alter, so ist die Reserve für eine einzelne Versicherung:

$$S \cdot A_y - P \cdot \left(a_y - \frac{N_{z-1}}{D_y}\right),$$

und folglich für die ganze Gruppe der y-jährigen:

$$A_y \cdot \Sigma(S) - a_y \Sigma(P) + \frac{1}{D_y} \cdot \Sigma(P \cdot N_{-1}), \qquad (435)$$

sodafs für jede einzelne Versicherung

$$S,\ P \text{ und } P \cdot N_{z-1}$$

aufgezeichnet werden müssen.

Sobald ein Versicherter das Alter z erreicht hat, wird seine Reserve-Prämie gestrichen.

Auf diese Weise könnte man die lebenslänglichen Versicherungen auf den Todesfall gegen gleichbleibende fortwährende oder temporäre Jahresprämie und einmalige Prämie zusammenfassen; bei einmaliger Prämie kommt natürlich die Reserve-Prämie überhaupt nicht in Betracht und ist alsdann S die einzige erforderliche Eintragung. Ferner ist es leicht, die Principien von No. 290 und 291 anzuwenden, wenn man A_y ersetzt durch $A_y + \beta\, \mathfrak{a}_y$ und durchweg die Reserve-Prämie zweckmäfsig erhöht.

304. Für eine temporäre Versicherung auf den Todesfall, die beim Alter von z Jahren abläuft, ist im Alter von y Jahren ($y < z$) die Reserve:

$$S \cdot \left(A_y - \frac{D_z}{D_y} A_z\right) - P \cdot \left(\mathfrak{a}_y - \frac{N_{z-1}}{D_y}\right) =$$

$$= S \cdot A_y - \frac{1}{D_y} \cdot (S \cdot D_z \cdot A_z - P \cdot N_{z-1}) - P \cdot \mathfrak{a}_y =$$

$$= S \cdot A_y - \frac{1}{D_y} (S \cdot M_z - P \cdot N_{z-1}) - P \cdot \mathfrak{a}_y,$$

für die Gruppe der y-jährigen stellt sie sich also auf:

$$A_y \cdot \Sigma(S) - \frac{1}{D_y} \cdot \Sigma(S \cdot M_z - P \cdot N_{z-1}) - \mathfrak{a}_y \cdot \Sigma(P). \qquad (436)$$

Für jede Versicherung sind daher die folgenden drei Zahlen zu verzeichnen:

$$S,\ P \text{ und } S \cdot M_z - P \cdot N_{z-1}.$$

305. Bei einer gemischten Versicherung sei z das Alter, worin die Auszahlung im Erlebensfalle geschehen soll. Wenn der Versicherte y Jahre alt ist, so beträgt dann die Reserve seiner Versicherung:

$$S \cdot \left(A_y - \frac{D_z}{D_y} A_z + \frac{D_z}{D_y}\right) - P \cdot \left(\mathfrak{a}_y - \frac{N_{z-1}}{D_y}\right) =$$

$$= S \cdot A_y + \frac{1}{D_y} \cdot [S \cdot D_z \cdot (1 - A_z) + P \cdot N_{z-1}] - P \cdot \mathfrak{a}_y;$$

weil $A_z = 1 - d \cdot \frac{N_{z-1}}{D_z}$ und also $D_z \cdot (1 - A_z) = d \cdot N_{z-1}$ ist, kann man den letzteren Ausdruck auch wie folgt schreiben:

$$S \cdot A_y + \frac{1}{D_y} \cdot (S \cdot d + P) \cdot N_{z-1} - P \cdot \mathfrak{a}_y,$$

und folglich stellt sich für die Gruppe der y-jährigen die Reserve auf:

$$A_y \cdot \Sigma(S) + \frac{1}{D_y} \cdot \Sigma[(S \cdot d + P) \cdot N_{z-1})] - \mathfrak{a}_y \cdot \Sigma(P). \qquad (437)$$

Für jede Versicherung sind hier zu verzeichnen die Zahlen:

$$S,\ P \text{ und } (S \cdot d + P) \cdot N_{z-1}.$$

306. Man sieht, dafs sich bei dieser Methode zu einem Ganzen zusammenfassen lassen lebenslängliche, temporäre und gemischte Versicherung auf den Todesfall, und zwar sowohl bei einmaliger und fortlaufender als auch bei temporärer gleichbleibender Prämien-Zahlung; oft aber hat man Gründe, die Rechnung für die verschiedenen Versicherungsarten separat zu halten, z. B. wenn es gilt, den Anteil am Gewinn für jede derselben zu bestimmen.

Bei Versicherung auf den Erlebensfall ohne Rückgewähr läfst sich dieselbe Gruppirung nach dem Alter anwenden, und die Formel ist:

$$\frac{1}{D_y} \cdot \Sigma(S \cdot D_z + P \cdot N_{z-1}) - \mathfrak{a}_y \cdot \Sigma(P), \qquad (438)$$

sodafs für jede Versicherung aufgezeichnet werden müssen:

$$S \cdot D_z + P \cdot N_{z-1} \text{ und } P.$$

Hier benützt man aber gewöhnlich eine andere Sterblichkeitstafel als bei den vorhergehenden Versicherungsweisen, sodafs für diese Art Versicherung selbstverständlich die Reserve gesondert berechnet werden mufs.

307. Es versteht sich von selbst, dafs hier immer von Versicherungen die Rede ist, welche zu dem Zeitpunkt, für welchen die Bilanz gezogen wird, in Kraft sind. Den Versicherungen, die wegen Todesfalles oder aus anderen Gründen aufgehört haben, kann man Rechnung tragen, indem man sie einfach in den Büchern löscht.

Manche aber ziehen es vor, die Versicherungen, die einmal eingeschrieben sind, nicht zu anulliren und die Reserve zu berechnen, als wenn nie eine Versicherung wegen Ablebens oder aus einem anderen

Grunde abgelaufen wäre; sie führen dann aber nebenher ein Contra-Buch, worin die aufgehobenen Versicherungen in derselben Weise mit den nötigen Angaben aufgezeichnet werden, wie die weiterbestehenden, und berechnen für jene die Reserve genau wie für diese; die Differenz bildet die erforderliche Reserve.

(Was Gruppirungen betrifft, sehe man weiter den Artikel: Sur quelques Méthodes de grouper les assurances en vue du calcul des Réserves par **Louis Maingie** in dem „Bulletin de l'Association des Actuaires Belges“ 15. December 1899.)

Doppelte Gruppirung.

308. Wir wollen hier nicht für jede Versicherungsweise und Prämien-Zahlung die möglicherweise erforderlichen Gruppirungen behandeln. Es können unter Umständen soviele Arten von Gruppen nötig sein, dafs es besser ist, jede Versicherung einzeln vorzunehmen. Es sei aber darauf aufmerksam gemacht, dafs bei der gemischten Versicherung mit fortwährender Prämien-Zahlung zwei statt drei Zahlenangaben für jede Versicherung genügen, wenn man die Versicherungen gruppirt:

1. nach dem gegenwärtigen Alter;
2. nach dem Alter (z), bei welchem im Erlebensfall die Auszahlung erfolgen soll.

Heifst $A_{x\,.\,\overline{z-x|}}$ die einmalige Prämie des x-jährigen für Versicherung der Einheit, zahlbar im Alter von z Jahren oder bei früherem Ableben, $a_{x\,.\,\overline{z-x|}}$ der Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente 1 per Jahr für den x-jährigen bis zum Alter von z Jahren, bezeichnet endlich S wieder das Kapital, P die Reserve-Prämie, so ist für die einzelne Versicherung die Reserve am y-jährigen Alter:

$$S \cdot A_{y\,.\,\overline{z-y|}} - P \cdot a_{y\,.\,\overline{z-y|}},$$

und folglich für alle jetzt y-jährigen, deren Versicherung bis zum Alter z läuft:

$$A_{y\,.\,\overline{z-y|}} \cdot \Sigma(S) - a_{y\,.\,\overline{z-y|}} \cdot \Sigma(P). \qquad (439)$$

Für jede Versicherung braucht also nur S und P aufgezeichnet zu werden, genau so wie bei stückweiser Berechnung; man kann aber viele Rubriken nötig haben, weil das Alter, bis zu welchem die Versicherungen laufen, sehr verschieden sein kann.

Man erkennt leicht, dafs bei der Versicherung auf den Erlebensfall dieselbe Gruppirung anwendbar ist, ebenso bei der temporären Ver-

sicherung auf den Todesfall; wenn A und a diesen Versicherungen entsprechend gewählt sind, bleibt die Formel $A\,\Sigma(S) - a\,\Sigma(P)$ unverändert gültig.

Reserve, auf diejenige des vorhergehenden Jahres begründet.

309. Die Methode, zu der wir jetzt übergehn, ist von Herrn **G. Fouret** in Paris angegeben worden, der aber auf meinen Rat eine sehr notwendige Correction angebracht hat. Die Methode, welche auf diese Weise entstanden ist, fufst auf Formel (414).

Man vereinigt zu einer Gruppe alle, die weniger als 6 Monate vor oder nach dem ersten Januar eines gewissen Jahres geboren sind. Als Datum des Beginns der Versicherung betrachtet man denjenigen 1. Januar, der dem wirklichen Zeitpunkt des Beitritts am nächsten liegt; man rechnet also so, als ob die in der ersten Hälfte eines Jahres Beigetretenen am Ende des Jahres ein volles Jahr versichert seien, die in der zweiten Hälfte Beigetretenen dagegen das erste Jahr von der Versicherung ausgeschlossen wären. Zu jeder Versicherung wird der versicherte Betrag und die Netto-Prämie verzeichnet.

Sei nun die Reserve bekannt für eine Gruppe — von Personen gleichen Alters selbstverständlich — und zwar für die Versicherungen, die am 31. December des vorhergehenden Jahres in Kraft waren. Zu diesem Ganzen fügt man den Betrag der Prämien für dieselben Versicherungen, sowie für diejenigen Versicherungen hinzu, von denen man in der oben besprochenen Weise voraussetzt, dafs sie am 1. Januar des laufenden Jahres in Kraft getreten sind.

Zu der so erhaltenen Summe addirt man den Zins während eines Jahres und subtrahirt dann den mathematischen Wert der erwartungsmäfsigen Auszahlungen. Um letzteren Wert zu bestimmen, multiplicirt man die Sterbenswahrscheinlichkeit während des vergangenen Jahres mit dem Betrag der am 31. December des vorhergehenden Jahres versicherten Kapitalien, vermehrt um den Betrag der in der ersten Hälfte des Jahres hinzugetretenen.

Multiplicirt man die Differenz mit dem reciproken Wert der Lebenswahrscheinlichkeit während des vergangenen Jahres, so hätte man dann die Reserve für die Gruppe eines bestimmten Alters, wenn ausnahmsweise weder Todesfälle noch Streichungen unter den Versicherten dieser Gruppe stattgefunden hätten.

Von der Summe der so für die verschiedenen Altersstufen erhaltenen Reserven mufs man endlich die Reserve der Versicherungen subtrahiren, die im Laufe des Jahres gestrichen sind, sei es wegen Ablebens oder

wegen Auszahlung bei Lebzeiten oder wegen willkürlichen Austretens, und zwar die Reserve, wie sie sein würde, wenn alle diese Versicherungen noch beständen. Man hat also die Reserven für die in Wegfall gekommenen Versicherungen einzeln festzustellen und zugleich in Rücksicht auf die Rechnung des folgenden Jahres die betreffenden Kapitalien und Prämien in den Registern zu streichen.

310. Man erkennt leicht, dafs diese Methode sowohl auf lebenslängliche als auf temporäre und gemischte Versicherung mit fortwährender, temporärer, gleichbleibender oder veränderlicher Prämie anwendbar ist, sobald man nur die Register bezüglich des Ablaufs oder der Änderungen der Prämienzahlung regelmäfsig berichtigt, und dafs sogar alle diese Arten von Versicherungen zu einem Ganzen zusammengefafst werden könnten. Auch bei der Versicherung auf den Erlebensfall läfst sich die Methode benutzen; nur mufs hier, weil das Ableben keine Auszahlung zur Folge hat, die Subtraktion wegen der Sterbenswahrscheinlichkeit unterbleiben.

Es bedarf kaum des Hinweises, dafs, wenn bei gemischter Versicherung oder bei Versicherung auf den Erlebensfall eine Police wegen Ablaufens der Versicherung in Wegfall kommt, die alsdann wegfallende Reserve aus der ganzen Versicherungssumme besteht.

Bisher hatten wir Netto-Prämien im Auge, nichts aber hindert, diese durch Reserve-Prämien zu ersetzen. Das erste Jahr ist dann aber die Prämie eine geringere.

So einfach die Methode sein mag, erweist sie sich weniger zweckmäfsig da, wo ziemlich viele Anullirungen stattfinden, weil die Reserve für alle diese, soweit sie in dem Jahre erfolgen, einzeln berechnet werden mufs.

Auch läfst sich nicht leugnen, dafs, weil man immer auf die Reserve des vorhergehenden Jahres baut, ein Fehler, der sich einmal in die Rechnung eingeschlichen hat, immer weiter mitgeführt wird.

Auch wo man zur Berechnung der Reserve andere Methoden anwendet, kann die hier behandelte mit Erfolg zur Controle, besonders bei einzelnen Versicherungen, benutzt werden.

Altersgruppen.

311. Man hat Formel (434) auch angewendet auf gröfsere Altersgruppen statt auf jedes einzelne Altersjahr, und zwar weniger zur definitiven Darstellung der Reserve, als vielmehr zur Controle, ob bei der Berechnung gröfsere Fehler vorgekommen sind. Man fafst z. B. alle

10—15-, alle 15—20-jährigen u. s. w. zusammen und mufs dann einen durchschnittlichen Wert von A_x und von a_x für jede dieser Gruppen bestimmen. Auf Einzelheiten wollen wir uns gegenüber diesem Verfahren nicht einlassen, ausführlicher aber die Näherungsmethode des Herrn **Woolhouse** darstellen.

Es handle sich um lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall gegen gleichbleibende Prämie.

Für eine gewisse Altersgruppe sei A die einmalige Prämie für die Einheit beim Ableben, a der Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente vom Betrage 1 per Jahr, S die gesammte Versicherungssumme, P die Summe der von den Versicherten der Altersgruppe per Jahr gezahlten Reserve-Prämie. Der gegenwärtige Wert der Auszahlung für die Gruppe ist alsdann $A \cdot S$, der Wert der zukünftigen Prämien $P \cdot a$. Nun aber ist:

$$A = 1 - \frac{i}{1+i} \cdot a,$$

also

$$a = \frac{1+i}{i}(1 - A),$$

sodafs sich ergiebt:

$$P \cdot a = \frac{1+i}{i}(P - P \cdot A).$$

Rechnet man z. B. mit 4%, so ist

$$P \cdot a = 26\,(P - P \cdot A).$$

Auf diese Weise ist der gegenwärtige Wert sowohl der Prämien wie auch der Auszahlungen ausgedrückt mittels der einmaligen Prämie für die bezügliche Altersgruppe.

Hat man dieselben Ziffern für jedes Alter bestimmt, so erhält man durch Addition:

$$\left.\begin{aligned} &\text{den gegenwärtigen Wert der Auszahlungen} \\ &\qquad = \Sigma(A \cdot S) \\ &\text{den gegenwärtigen Wert der Prämien} \\ &\qquad = 26\,[\Sigma(P) - \Sigma(P \cdot A)] \end{aligned}\right\}; \quad (440)$$

die Differenz beider bildet die Reserve.

Woolhouse wählt nun die Gruppen in der Weise, dafs für jede die einmalige Prämie A so einfach wie möglich wird. In der Tafel der einmaligen Prämien suche man nach, für welche Altersjahre die einmalige Prämie (für die Einheit) zwischen 0.15 und 0.25 liegt; all diese

Altersjahre werden zu einer Gruppe vereinigt und die durchschnittliche einmalige Prämie für diese Gruppe wird $= 0.2$, dem arithmetischen Mittel zwischen 0.15 und 0.25 gesetzt; die verschiedenen Altersjahre, für welche die einmalige Prämie zwischen 0.25 und 0.35 liegen, bilden eine zweite Gruppe mit der durchschnittlichen einmaligen Prämie 0.3 u. s. w. Nur für die jüngsten Altersklassen ist man bisweilen gezwungen, eine weniger einfache Zahl zu wählen.

Für jede Gruppe wird jetzt das Gesammt-Kapital S, sowie der gesammte Betrag an Reserve-Prämie P bestimmt; dann beschränkt sich die näherungsweise Bestimmung der Reserve mittels Formel (440) auf 14 sehr einfache Multiplicationen, etliche Additionen und eine Subtraktion.

Es versteht sich von selbst, dafs die Altersgruppen für verschiedene Sterblichkeitstafeln und verschiedenen Zinsfufs einigermafsen verschieden ausfallen.

Auch bei gemischter Versicherung kann man die Methode anwenden, wenn man die Versicherungen zuerst gruppirt nach dem Alter, bei welchem im Erlebensfall das versicherte Kapital ausgezahlt wird; auch anderen Versicherungsweisen liefse sich die Methode anpassen.

Proben haben gezeigt, dafs die auf diese Weise näherungsweise gefundene Reserve procentual nur wenig abweicht von derjenigen, die für jedes einzelne Altersjahr berechnet ist, wenigstens wenn die Anzahl der Versicherungen grofs genug ist; hierbei handelt es sich natürlich nicht um hunderte, sondern um tausende von Versicherungen.

Es liefsen sich auch Versuche anstellen, ob man statt mit der einmaligen Prämie A mit der Leibrente a rechnen kann. Der gegenwärtige Wert der Auszahlungen wäre dann:

$$\Sigma(S) - \frac{i}{1+i} \cdot \Sigma(S \cdot \mathrm{a})$$

und derjenige der Prämien $\Sigma(P \cdot \mathrm{a})$. Man müfste hierbei die Gruppen so wählen, dafs der durchschnittliche Wert von a für jede Gruppe in ganzen Zahlen gegeben wird, z. B. der Reihe nach 20, 16, 12, 8, 4.

Rechnung mit Durchschnittsalter.

312. Bei gemischter Versicherung und bei Versicherung auf den Erlebensfall fafst Herr **King** alle Versicherungen zusammen, die in demselben Jahre ablaufen müssen und teilt allen Versicherten dasselbe Alter zu, nämlich ihr durchschnittliches an dem Tage, für welchen die Reserve berechnet wird. Es werden dabei alle diese Versicherungen

als eine einzige betrachtet, für welche die Reserve-Prämie die Summe derjenigen der einzelnen Versicherungen ist.

Andere sind seinem Beispiel gefolgt und erkannten die Methode wenigstens als ausgezeichnetes Mittel zur Controle anderer. Es läfst sich aber erwarten, dafs die Methode desto weniger genau ist, je länger die Dauer der Versicherungen ist. Bei längerer Dauer und lebenslänglicher Versicherung, die auch als eine gemischte Versicherung zu betrachten ist, könnte man die Versicherten auf einige Altersgruppen verteilen, z. B. bis 40, von 40 bis 60, 60 Jahr und darüber, und für jede Gruppe das mittlere Alter bestimmen.

Zur Bestimmung des durchschnittlichen Alters thut man indessen besser, nicht von den Versicherten selbst, sondern von den versicherten Kapitalien auszugehn; man multiplicirt jedes Alter mit dem entsprechenden Kapital, summirt und dividirt mit der Summe der Kapitalien. Hierdurch rechnet man genauer, und räumt den gröfsten Kapitalien auch den gröfsten Einfluſs ein.

Annäherung durch Interpolation.

313. Herr **Hardy** hat in vielen Fällen sehr befriedigende Resultate gefunden, indem er für die einzelnen Versicherungen nicht Jahr für Jahr die Reserve streng berechnete, sondern nur ${}_0V$, ${}_5V$, ${}_{10}V$, ${}_{15}V$ u. s. w. und die dazwischen liegenden interpolirte. Man kann leicht ermitteln, ob diese Zahlen nahezu eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. und deshalb eine einfache Interpolation zulässig ist, oder ob zweite Differenzen berücksichtigt werden müssen.

Correction für das Datum der Auszahlung.

314. Sowohl die einmalige wie die jährliche Netto-Prämie für die temporäre oder lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall mit Auszahlung am Ende des Sterbejahres wird auf die entsprechende mit Auszahlung unmittelbar nach dem Tode näherungsweise durch den Faktor $\sqrt{1+i}$ oder auch $1+\frac{1}{2}i$ corrigirt.

Man kann also die unter der Voraussetzung, dafs die Auszahlung am Ende des Sterbejahres stattfindet, abgeleitete Netto-Reserve mit demselben Faktor multipliciren, um die Netto-Reserve für den Fall der Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben zu erhalten.

Bei der gemischten Versicherung ist der Unterschied verhältnismäfsig geringer und zwar umsomehr, je kürzer die festgesetzte Dauer

der Versicherung ist. Viele finden die Correction denn auch nicht nötig (No. 108), weil die Auszahlung gewöhnlich doch nicht unmittelbar nach dem Ableben erfolgt und die Sterblichkeit nur wenig — bei Versicherung blos auf den Todesfall gewifs weniger als 2 % und bei gemischter noch viel weniger — unter derjenigen der zu Grunde gelegten Sterblichkeitstafel zu bleiben braucht, um den etwaigen Verlust zu decken.

Reserve von Extra-Prämie.

315. Im Vorhergehenden war nur die Rede von Prämien-Reserve in dem Sinne, dafs die Prämie dem wirklichen Alter beim Beitritt unter normalen Verhältnissen entspricht, also nicht von der Reserve von Extra-Prämie. Man mufs hier mehrere Fälle unterscheiden: wenn die Gesellschaft den Versicherten wegen seines schlechten Gesundheitszustandes eine Prämie zahlen läfst, die einem höheren Alter entspricht, so ist sie berechtigt, auch rücksichtlich der Reserve-Rechnung dem Versicherten dieses erhöhte Alter zuzuschreiben, wenn es auch mehr als einmal vorkommen wird, dafs dieses erhöhte Alter zu einer niedrigeren Reserve führt als das wahre Alter; das schadet aber nichts; wenn die Erhöhung richtig war, so ist auch die Reserve richtig.

Wenn die Erhöhung nicht gerade aus der Zuteilung eines höheren Alters hervorgeht, sondern in einer Extra-Prämie besteht, bei der man voraussetzt, dafs ihre Ursache jedes folgende Lebensjahr ungefähr gleich kräftig wirken wird, so ist kein Grund vorhanden, von dieser Extra-Prämie etwas zu reserviren; man kann hier vielmehr annehmen, dafs jedes Jahr das Extra-Risiko durch die Extra-Prämie gedeckt wird. Später wird sich zeigen, dafs eben wegen der Prämienerhöhung öfters die Reserve noch wohl um etwas geringer sein könnte. Wird die Extra-Prämie angewendet aus einem Grunde, der erst in höherem Alter die Sterbenswahrscheinlichkeit vergröfsert, so mufs unbedingt alle Extra-Prämie bis zu dem kritischen Alter reservirt und verzinst werden, um dann für die bestehengebliebenen Versicherungen allmählich abzunehmen So mufs auch die Extra-Prämie, welche in Friedenszeit für Kriegsrisiko gefordert wird, ganz reservirt und verzinst werden, bis ein Krieg ausbricht.

Es war hier immer die Rede von Extra-Prämie, welche fortdauernd jährlich gezahlt wird.

Wird die Extra-Prämie auf einmal oder in kürzerer Zeit gezahlt, als das erhöhte Risiko dauert, so mufs natürlich von der Extra-Prämie reservirt werden.

Gestundete und vorausgezahlte Prämien, geschuldete Renten.

316. Wenn die Versicherten in der Regel wirklich Jahresprämien zahlen und zwar immer am Datum des Beitritts, ist die Anwendung von Formel (432) oder (433) zu empfehlen. Wenn aber halbjährliche, vierteljährliche oder monatliche Prämien gezahlt werden, könnte man zwar die Reserve-Prämie und die a entsprechend einrichten; dies thun aber nur wenige; zumeist rechnet man auch hier nach Jahres-Prämien; ohne eine Correction für die terminweise Zahlung würden dann aber die Formeln (432) und (433) eine zu grofse Reserve geben, da sie voraussetzen, dafs die Prämie bis zum nächsten Datum des Beitritts bereits gezahlt ist. Die Gesellschaft hat für die Posten mit terminweiser Prämien-Zahlung noch alle Prämien zu fordern, die bis zum nächsten Datum des Einschreibens zu zahlen sind. Diese Prämien, die noch zu fordern oder gestundet sind und nicht nach der Brutto-, sondern nach der Reserve-Prämie berechnet werden, bringt man in der Bilanz unter die Activen. Diese gestundete Prämie bleibt für eine Versicherung jedes Jahr dieselbe, wenigstens so lange, als sich die Prämie nicht ändert; darum ist es richtig, sie für jede einzelne Versicherung in die Bücher einzutragen, um sie sämmtlich am Ende jedes Jahres zusammenzufassen.

Die gestundete Prämie kommt auch bei der Methode von No. 309 in Frage.

317. Berechnet man aber die Reserve nach der Formel (430) oder (431), wozu auch die Methode von No. 289 gehört, oder wendet man eine der Methoden von No. 302—308 oder No. 311 an, so setzt man voraus, dafs die Prämie bis zum Ende des Jahres bereits gezahlt ist. Man kann dann die Reserve unverändert lassen für diejenigen kleinen Versicherungen, bei denen eine wöchentliche Prämie gezahlt wird.

Es würde sogar keinen Bedenken unterliegen, die monatlichen Prämien-Zahlungen aufser Betracht zu lassen; bei Zahlung voller Jahresprämien, halbjährlicher und vierteljährlicher Prämien aber mufs man beachten, dafs die Gesellschaft schon über das Ende des Jahres hinaus Prämie empfangen hat, vorausgezahlte (oder unverdiente) Prämie, wie man sie nennt. Diese Prämie, die für jede Versicherung vom Ende des Jahres bis zu der nächsten Prämien-Zahlung berechnet ist, und zwar nach der Reserve-Prämie, ist unter die Passiven aufzunehmen. Auch diese vorausgezahlten Prämien sind für jede Versicherung ein für allemal zu bestimmen und in die Bücher einzutragen.

Indessen kann man bei Bestimmung der vorausgezahlten Prämie auch von der Einnahme an Brutto-Prämien ausgehn.

Bei der Gesellschaft ist aus den Büchern bekannt, wieviel sie von den bestehenden Versicherungen an Prämien zu empfangen hat per Jahr, per halbes Jahr, per Vierteljahr. Von diesen Beträgen kann sie z. B. 10 % subtrahiren und für diejenigen, die jährlich zahlen, die Prämie durchschnittlich ein halbes Jahr, für die halbjährlich zahlenden drei Monate und für die vierteljährlich zahlenden ein halbes Vierteljahr vorausgezahlt annehmen. Kann man also am Ende eines Jahres, wo die Bilanz gezogen wird, von den existirenden Versicherungen für das nächste Jahr die Summe J an Jahresprämie, zweimal die Summe H an halbjährlicher, viermal die Summe D an vierteljährlicher Prämie erwarten, so mufs man von J, H und D die bestimmten Procente subtrahiren, wodurch die Zahlen J', H' und D' hervorgehn mögen, und es wird die vorausgezahlte Prämie einfach: $\frac{1}{2}(J' + H' + D')$. Eine solche Schätzung ist in der Regel genau genug, doch ist auch hier gröfsere Genauigkeit nötig, je geringere Wahrscheinlichkeit die angenommenen Grundlagen und die benutzte Berechnungsmethode für eine zu grofse Reserve bieten. Daher hat es Gesellschaften gegeben und giebt es deren wohl noch heute, die bei Benutzung von Formel (430) oder (431) vorausgezahlte Prämie in ihre Bilanz nicht aufnahmen.

Neben dem Posten vorausgezahlte Prämien (Prämien-Übertrag) unter den Passiven kann hierbei auch noch unter den Activen ein Posten gestundete Prämien vorkommen für diejenigen Versicherten, welche ihre Prämie an einem anderen Datum als dem ihres Beitritts zahlen.

318. Bei der Bestimmung der Reserve für Renten-Versicherung mufs man auch Rücksicht nehmen auf das Datum der Auszahlung. Ist jemand an dem Tage, für welchen die Bilanz gezogen wird, z. B. 60 Jahre alt, so ist die Rente, wenn man voraussetzt, dafs sie ein Jahr nachher beginnt, $= a_{60}$. Wenn nun das Geschäftsjahr am 1. Januar anfängt und die Zahlung der Rente immer am 1. Juni stattfinden soll, so fängt die Rente 7 Monate früher an, als a_{60} voraussetzt. Darum kann man näherungsweise $\frac{7}{12}$ des jährlichen Rentenbetrags als geschuldete Rente unter die Passiven aufnehmen. Wir brauchen nicht darauf besonders einzugehn, wie zu verfahren ist, wenn die Renten-Zahlung halbjährlich oder vierteljährlich stattfindet. Man kann auch hier für jede Versicherung den Betrag der geschuldeten Rente ein für allemal bestimmen und in die Bücher eintragen. Auch könnte man bei einer sehr grofsen Anzahl von Versicherten die geschuldete Rente auf demselben

Wege näherungsweise bestimmen, wie er oben für die vorausgezahlte Prämie beschrieben worden ist.

Ankauf des bloſsen Eigentums (nuda proprietas) und des Nieſsbrauchs.

319. Der Käufer eines mit Nieſsbrauch beschwerten, also eines bloſsen Eigentums, kann dieses erst dann ausnutzen, wenn der Inhaber der Nieſsnutzung gestorben ist. Von Besonderheiten abgesehen, läſst sich das Eigentum in Geld abschätzen und der Jetztwert des bloſsen Eigentums ist dann nichts anderes als der eines Kapitals, das man beim Ableben des Nieſsnutzers erhält.

Wird der Zins dieses Kapitals einmal per Jahr und nicht bis zum Tage des Ablebens dem Nieſsnutzer ausgezahlt, so wird das bloſse Eigentum für den Käufer rentirend und wird also sein eigentliches Eigentum am Anfang des Sterbejahres des Nieſsnutzers.

Ist das Kapital, dessen bloſses Eigentum gekauft wird, die Einheit, a der Wert der postnumerando zahlbaren Leibrente 1 per Jahr bei dem Zins i per Einheit und per Jahr, dann ist der Wert des bloſsen Eigentums:

$$1 - i\,a \text{ (No. 108).}$$

Will aber der Käufer, solange der Nieſsnutzer am Leben ist, einen höheren Zins $i + \sigma$ erzielen, so muſs er weniger (X) zahlen. Sein jährlicher Gewinn ist alsdann $X \cdot \sigma$ und dessen Barwert $X\,\sigma\,a$. Diesen Gewinn erhebt er gleich beim Ankauf und giebt also für das bloſse Eigentum:

$$1 - i\,a - X\,\sigma\,a;$$

man hat zur Bestimmung von X nunmehr die Gleichung:

$$X = 1 - i\,a - X\,\sigma\,a,$$

woraus folgt:

$$X = \frac{1 - i\,a}{1 + \sigma\,a}. \qquad (441)$$

Berechnet man also den Wert a mit dem Zins 4 % und will der Käufer 5 % bekommen, so ist die Kaufsumme:

$$\frac{1 - 0.04\,a}{1 + 0.01\,a}.$$

Hier genieſst der Käufer während des Lebens des Nieſsnutzers den höheren Zins $i + \sigma$ über die Kaufsumme des bloſsen Eigentümers; wünscht

er diesen höheren Zins über das unbeschwerte Kapital zu erzielen, so soll er weniger geben und zwar:

$$1 - (i + \varrho)\, a.$$

Gewöhnlich repräsentirt das bloſse Eigentum nicht ein bestimmtes Kapital, sondern es bildet vielmehr einen Besitz, dessen Wert veränderlich ist. Nehmen wir z. B. ein Effekt, dessen Nominalwert 1000 Mark beträgt; wünscht der Käufer dieses Effekt zu besitzen gegen den Cours von 80 %, sodaſs es für ihn einen Wert von 800 Mark repräsentirt, und will er während des Lebens des Nieſsnutzers 5% über diese 800 Mk. erzielen, so soll er für das bloſse Eigentum zahlen

$$800 - 40\, a \text{ Mark.}$$

Etwas anders stellt sich folgende Rechnung: Es soll das bloſse Eigentum eines 3 % Zinsen tragenden Effekts zum Nominalwert von 1000 Mark gekauft werden. Der Käufer, der mit 4 % rechnet und auch die Leibrente auf diesen Zinsfuſs basiert, will nicht nur während des Lebens des Nieſsnutzers, sondern fortwährend, also auch wenn das Effekt sein unbeschwertes Eigentum sein wird, 4 % erzielen. Das Effekt selbst ist ihm also 750 Mark wert. Der Nieſsnutzer zieht aber jährlich und lebenslänglich 30 Mark und der Barwert dieser Leibrente stellt sich auf 30 a Mark, sodaſs der Käufer für das bloſse Eigentum 750 — 30 a Mark geben kann.

Damit er nicht zu viel zahle, soll der Käufer die Leibrente a nach einer Tafel, welche eine nicht zu hohe Sterblichkeit ausweist, berechnen.

320. Der Wert eines Nieſsbrauchs ist weiter nichts als der einer Rente zu Gunsten des Nieſsnutzers und besteht dieser Nieſsbrauch nicht gerade in einer Rente, sondern z. B. in der lebenslänglichen Benutzung eines Hauses, so kann man ihn doch immer in eine Rente umrechnen.

Stellt sich der Nieſsbrauch in einer Rente vom Betrage 1 per Jahr dar, postnumerando und nicht bis zum Tage des Ablebens zahlbar, so ist sein Wert einfach $= a$, der sicherheitshalber auf eine Tafel mit groſser Sterblichkeit gegründet sein muſs.

Zum besseren Verständnis scheint aber noch eine andere Ableitung nicht überflüssig. Jemand, oder sagen wir: eine Gesellschaft, kauft einen Nieſsbrauch, die Einheit per Jahr, und zahlt dafür eine noch unbekannte Summe Y. Nun kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn der Nieſsnutzer eine Lebensversicherung vom Betrage Y kauft, der rentirend wird am Anfang seines Sterbejahres, die Gesellschaft aber die Summe Y sofort erlegt. Der Nieſsbraucher muſs also am Ende jedes

Jahres den Zins $i\,Y$ sammt der Prämie für die Lebensversicherung zahlen, welche letztere Prämie beträgt:

$$\frac{1-i\,a}{a}\cdot Y.$$

Zins und Prämie zusammen müssen 1 geben, da die Gesellschaft soviel jedes Jahr erhält. Wir haben also die Gleichung:

$$i\,Y+\frac{1-i\,a}{a}\cdot Y=1,$$

woraus sich ergiebt: $Y=a$.

Will der Käufer (die Gesellschaft) während des Lebens des Nieſsnutzers einen höheren als den vorausgesetzten Zins i beziehn, etwa $i+\sigma$, und will er von der Prämie den Teil α per Einheit für Administrationskosten u. s. w. erhalten, dann verringert sich die Kaufsumme auf einen Betrag Z, der aus folgender Gleichung hervorgeht:

$$(i+\sigma)\cdot Z+\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1-i\,a}{a}\cdot Z=1. \qquad (442)$$

Um z. B. bei Lebzeiten des Nieſsnutzers 5 % zu erhalten, während a mit 4 % berechnet ist, und um von der Prämie 10 % für sich zu haben, wird die Gesellschaft eine Kaufsumme Z zahlen, die sich aus der Gleichung ergiebt:

$$0.05\,Z+\frac{1}{0.9}\cdot\frac{1-0.04\,a}{a}\cdot Z=1.$$

321. Wenn ein Privatmann oder eine Gesellschaft ein bloſses Eigentum oder einen Nieſsbrauch gekauft hat, dann muſs bei der jährlichen Bilanzbildung der Wert aufs Neue geschätzt werden aus Rücksicht auf das zunehmende Alter und die dadurch geänderte Sterbenswahrscheinlichkeit des Nieſsnutzers. Es ist wohl vorgekommen, daſs Privatleute (oder vielleicht auch Gesellschaften?) ihre gekauften bloſsen Eigentümer in die Bilanz zogen, indem sie die gezahlten Kaufsummen um Zinseszins zunehmen lieſsen. Wuſsten sie, oder wuſsten sie nicht, daſs sie dieselben auf diese Weise zu hoch und auf die Länge der Zeit sogar viel zu hoch in die Bilanz zogen? Fährt man mit dieser fehlerhaften Methode lange genug fort, so wird, wenn der Nieſsnutzer über die mathematische Dauer hinaus lebt (wovon später die Rede sein wird), das bloſse Eigentum sogar höher in die Bilanz gezogen als der Wert beträgt, den es beim Tode des Nieſsnutzers haben wird und ganz besonders dann, wenn mit hohem Zinsfuſse gerechnet wird. Daſs der Wert des Nieſsbrauchs von Jahr zu Jahr abnimmt, ist selbstverständlich.

Die Stellung der Reserve in der Bilanz.

322. Die meisten Gesellschaften nehmen in ihrer Bilanz die Reserve zu den Passiven, andere stellen dafür den gegenwärtigen Wert ihrer zukünftigen Leistungen unter die Passiva und den gegenwärtigen Wert der künftigen Beiträge der Versicherten unter die Activa. Wenn die Berechnung beidemal auf denselben Prämien fufst, ist das Endresultat — vielleicht bis auf eine Kleinigkeit als Folge der Abrundungen — dasselbe, wenigstens so lange keine negative Reserve entsteht. Wenn solche vorkommt und nicht mitgerechnet werden soll, kann man das zweitgenannte Verfahren nicht streng innehalten, sondern ist genötigt, entweder den Posten der Leistungen zu erhöhen oder den der Beiträge zu erniedrigen, bis die Reserve der bezüglichen Versicherungen $= 0$ ist. Aufserdem führt die Berechnung der Reserve für sich, besonders bei mehreren Versicherungsweisen, viel schneller zum Ziel, als wenn man überall Leistungen und Beiträge einzeln bestimmen und zu einem Ganzen vereinigen mufs. Und zur Berechnung der totalen Reserve ist es unbedingt bequemer, eine Reihe kleiner Zahlen als zwei Reihen grofser Zahlen zu addiren; auch ist im ersten Fall die Wahrscheinlichkeit, Fehler zu machen, geringer als im zweiten. Die Werte der Leistungen und der Beiträge sind für sich genommen von geringerer Bedeutung, nur ihre Differenz ist von Gewicht.

Will man durchaus in die Bilanz einerseits einen Passiv-, anderseits einen Activposten bringen, statt einfach die Reserve zu den Passiven zu nehmen, so kann man mit gleichem Recht als Passivposten den totalen (nicht discontirten) versicherten Betrag und als Activposten eine Summe einstellen, die um die Reserve geringer ist. Die Reserve-Formeln $1 - \frac{a_{(m)}}{a}$ und $1 - \left(P + \frac{i}{1+i}\right) a_{(m)}$ regen sogar zu diesem Verfahren an. Der Activposten besteht dann in dem Jetztwert der zukünftigen Prämien und dem der Zinsen der versicherten Kapitalien während der Dauer der Versicherungen. Bei Anwendung der retrospectiven Methode könnte man als Passivposten aufnehmen den Wert der bereits erhaltenen Prämien und als Activposten den Wert der erfolgten Auszahlungen, beide nach der angenommenen Sterblichkeitstafel berechnet.

So könnte man mit ebenso viel Recht sagen, dafs zu den Activen gewifs der gegenwärtige Wert der Brutto-Prämien gehört, dagegen zu den Passiven nicht nur der gegenwärtige Wert der künftigen Aus-

zahlungen an die Versicherten, sondern auch derjenige aller künftigen Unkosten. Werden die Administrationskosten der Zukunft allzu niedrig geschätzt und wird nicht auf zukünftigen Gewinn aus dem Zuschlag Bedacht genommen, so könnte dies leicht zu einer bedenklichen Gewinn-Anticipation führen.

Es ist überdies gefährlich, in die Habenseite der Bilanz Wechsel aufzunehmen, deren Honorirung nicht vollkommen gewifs erscheint, und zu dieser Categorie gehört der Zuschlag für Gewinn der Zukunft.

Kapitel XI.

Einstellung der Prämien-Zahlung. Veränderung der Prämie oder der Versicherung.

Rückkauf.

323. Die totale Reserve einer Lebensversicherungs-Gesellschaft kann zusammengesetzt werden und wird auch wohl zusammengesetzt aus den Reserven für die einzelnen Versicherungen. Eine Gesellschaft, die liquidiren will, braucht ihre Reserve nicht mehr und müfste sie also billigerweise den Versicherten anszahlen. Diese beiden Thatsachen bewirken, dafs man wohl die Reserve als Eigentum der Versicherten betrachtet. Diese Anschauung hat ihre Berechtigung, insofern die Versicherten Anspruch darauf machen können, dafs die Gesellschaft ihre Reserve auf einer Höhe hält, welche mit grofser Wahrscheinlichkeit — Gewifsheit kann man nie erreichen — die Erfüllung ihrer Verpflichtungen verbürgt. Anfechtbar ist es aber, wenn man auf jenen Begriff das Recht der Versicherten begründen will, bei willkürlichem Austreten die Auszahlung der Reserve ihrer Versicherung fordern zu können.

Wenn eine Gesellschaft liquidirt, mufs so viel Reserve da sein, dafs eine andere solide Gesellschaft ohne Bedenken, gegen Übergabe dieser Reserve und gegen Weiterzahlung der Prämien seitens der Versicherten, letztere übernehmen könnte. Es wäre aber ein Irrtum zu glauben, dafs jeder einzelne Versicherte, wenn er auch bei der Liquidation seine

ganze Reserve zurück bekäme, sich mit derselben bei einer beliebigen anderen Gesellschaft gegen die frühere Prämie wieder einkaufen könnte.

Wo wir von dem Wert einer Versicherung reden, da ist eine durchschnittliche, sozusagen eine normale gemeint; viele, sehr viele Versicherte sind aber im Laufe der Zeit nicht normal geblieben, die Sterbenswahrscheinlichkeit hat sich bei einem grofsen Teil im Laufe der Zeit weit mehr oder auch weit weniger geändert, als es die Alterszunahme mit sich bringt.

In einigen Fällen, wenn z. B. ein auf den Todesfall Versicherter im Sterben liegt, würde die Gesellschaft vom finanziellen Standpunkt aus gern auf die Reserve verzichten, wenn sie dadurch die Versicherung los würde; aber gerade solche Versicherungen werden gewöhnlich, und sei es auch durch die Hilfe anderer, aufrecht erhalten.

Bei Versicherung auf den Erlebensfall und bei Leibrente ist gerade das Entgegengesetzte der Fall; wenn jemand sehr krank und das Ableben wahrscheinlich ist, würde es in seinem Interesse liegen, dafs ihm die Gesellschaft die Versicherung gegen die Reserve abkaufte; dies kann sie in diesem Falle aber unmöglich thun; denn ihr Tarif ist daraufhin berechnet, dafs einige innerhalb der Zeit sterben, deren Prämien dann verloren sind. Gerade dieses letzte Beispiel ist sehr geeignet, darüber aufzuklären, dafs, wenn die Reserve das Eigentum der sämmtlichen Versicherten sein soll, der individuelle Versicherte keinen Anspruch darauf erheben kann.

Eine Versicherung, von welcher die Auszahlung wahrscheinlich noch lange nicht stattfinden wird, hat unter jedem Gesichtspunkte wenig Wert; dagegen wird jemand, der z. B. eine gemischte Versicherung mit nahe bevorstehendem Auszahlungstermin besitzt, aber die Prämie nicht länger aufbringen kann, leicht einen anderen finden, der ihm gegen Überlassung der Police eine Summe zahlt, die dem versicherten Betrage sehr nahe kommt, und die weitere Prämien-Zahlung auf sich nimmt. In einem solchen Falle kann die Versicherungs-Gesellschaft selbst der Käufer sein.

Um beurteilen zu können, ob einem willkürlich Austretenden die Reserve seiner Versicherung ganz, teilweise oder überhaupt nicht zurückgegeben werden kann, müfste die Gesellschaft eigentlich jeden Fall für sich untersuchen, und dies ist, wie wir sahen, vor allem bei Versicherung auf den Erlebensfall nötig. Aber auch in anderen Fällen ist dafür zu sorgen, dafs das Zurücktreten den Versicherten im Allgemeinen keinen Vorteil bringen darf, dafs ihnen vielmehr das Aufrechterhalten der Versicherung möglichst vorteilhaft gemacht wird; eine Lebensver-

sicherungs-Gesellschaft ist ja doch keine Sparkasse, auch darf das Ablisten der Clientel durch Agenten concurrirender Gesellschaften nicht gefördert werden durch allzu grofse Freigebigkeit bei Einstellung der Prämien-Zahlung. Solches Übergehn von einer Gesellschaft zu einer anderen liegt nicht im Interesse des Versicherungswesens.

324. Nun mufs man indessen die Bestimmungen so allgemein wie möglich wählen. Bei der Versicherung auf den Todesfall, wozu wir hier auch die gemischte Versicherung rechnen, kann man als Regel annehmen, den Austretenden etwas zurückzugeben, keinesfalls aber die ganze Reserve; denn wenn der Austretende auch nicht zu denen gehört, die ein sehr langes Leben versprechen, so soll die Gesellschaft dennoch nicht auf den Gewinn verzichten, der aus den noch ausstehenden Prämien möglich ist, und aufserdem gründet eine Versicherungs-Gesellschaft ihre Hoffnung auf die grofse Anzahl der Versicherungen, das willkürliche Austreten kann aber offenbar die Wahrscheinlichkeit von Abweichungen erhöhn, die Sicherheit der Vorausberechnungen also verringern.

Um nicht jeden Fall für sich besonders betrachten zu müssen, besteht bei vielen Gesellschaften die Regel, einem Versicherten im Fall seines Austretens einen gewissen Teil, z. B. $\frac{3}{4}$ der Reserve auszuzahlen, sobald die Versicherung wenigstens 3 Jahre in Kraft gewesen ist; es ist wunderbar, dafs so viele Gesellschaften an diesem wenig rationellen Verfahren noch immer festhalten. Bei einer gemischten Versicherung ist, falls spätestens nach zwei Jahren die Auszahlung erfolgen mufs, $\frac{3}{4}$ der Reserve ein lächerlich geringer Rückkaufwert, dagegen wieder ein allzu hoher, falls die Versicherung erst kurze Zeit läuft, weil $\frac{1}{4}$ der sowieso geringen Reserve eine zu geringe Vergütung ist für den Gewinn, den die Gesellschaft einbüfst. Ein bestimmter Bruchteil der Reserve ist überhaupt kein guter Mafsstab für den Rückkaufwert; denn nach dieser Regel hält die Gesellschaft von der Reserve mehr zurück, je nachdem die Police länger aufrecht geblieben ist. Es wäre schwer, eine schlechtere Regel ausfindig zu machen.

Am besten ist es, den Rückkaufwert in der Reserve bestehn zu lassen, nachdem man von ihr den gegenwärtigen Wert bestimmter Procente der gleichbleibenden Jahresprämie subtrahirt hat, und den zurückzubehaltenden Teil der Reserve also nicht von der Art der Prämien-Zahlung abhängen zu lassen.

Sei z. B. die Reserve für eine Versicherung $= V$, P die dafür jährlich fortdauernd gezahlte Prämie — oder richtiger die Prämie, welche gezahlt würde, wenn die Versicherung zu fortwährender gleichbleibender

Prämie abgeschlossen wäre —, α sei der Teil des gegenwärtigen Wertes der Prämie P, welchen man von der Reserve zurückbehalten will, a der Wert der Leibrente 1 per Jahr bis zum Ende der Versicherung bei dem gegenwärtig erreichten Alter, dann ist nach der erwähnten Methode der Rückkaufwert $= V - \alpha \cdot P \cdot a$.

Hier wird bei dem Rückkauf viel von der Reserve zurückbehalten, wenn die Versicherung erst jüngst abgeschlossen ist, wenig, wenn die Versicherung bald zur Auszahlung kommt. Bei diesem Verfahren kommt auch die ziemlich willkürliche Bedingung, dafs die Versicherung, um zurückgekauft werden zu können, wenigstens 3 Jahre in Kraft gewesen sein mufs, in Wegfall. Diese traditionellen 3 Jahre haben auch eigentlich gar keinen Sinn; bei einigen Versicherungen (gemischten mit kurzer Dauer) kann man gewifs schon nach zwei Jahren zurückkaufen und bei anderen ist dies nach fünf Jahren noch nicht möglich ohne Schaden für die Gesellschaft. Übrigens empfiehlt es sich, neben jedem Prämientarif zugleich einen Tarif für den Rückkauf zu geben, denn die Gesellschaften sind oft genötigt, einen Preis zu bieten, bei welchem sich die Versicherten für übervorteilt halten.

Bei einigen Arten der Versicherung oder der Prämien-Zahlung ist die Reserve nach gewisser Zeit so gering, dafs, wenn beim Austreten überhaupt etwas, dann jedenfalls sehr wenig zurückerstattet werden kann, wie z. B. bei temporärer Versicherung von kurzer Dauer und bei Versicherung mit steigender Prämie. So etwas sollen die Versicherten aber im voraus wissen.

Es ist schwierig, eine feste Regel für die Wahl der Zahl α zu geben; soviel aber ist gewifs, dafs man unterscheiden mufs, ob die Gesellschaft bei der Berechnung der Reserve Rücksicht nimmt auf die Kosten des Abschliefsens oder nicht. Im letzteren Falle, wo die Gesellschaft Netto-Reserve in die Bilanz bringt, könnte man $\alpha = 0.08$, im ersteren $\alpha = 0.05$ setzen.

325. Es giebt noch andere Regeln zur Bestimmung des Rückkaufwertes. Es sind z. B. Gesellschaften, bei welchen derselbe auf ein Minimum von 60 % der Netto-Reserve festgesetzt ist, um mit der Dauer der Versicherung allmählich zu steigen bis zur vollen Reserve, welche bei der gemischten Versicherung erreicht wird z. B. drei Jahre vor dem Termin der Auszahlung.

Andere Gesellschaften halten bei der gemischten Versicherung von der Reserve soviel Procente zurück, als die Versicherung noch Jahre zu laufen hätte, mit einer Jahresprämie als Minimum. Bei der gemischten Versicherung mit längerer Dauer als die mittlere Lebens-

dauer und bei lebenslänglicher Versicherung kann man dann die mittlere Lebensdauer als die Dauer der Versicherung betrachten.

326. Wie schon gesagt, ist ein Rückkauf unzulässig bei Versicherung auf den Erlebensfall und bei Pensions-Versicherung, wenn nicht eine sehr genaue Untersuchung die gute Gesundheit des Versicherten verbürgt. Man braucht weniger Schwierigkeiten zu machen, wenn die Versicherung auf den Erlebensfall mit der Bedingung der Rückerstattung der Prämie bei früherem Ableben abgeschlossen ist, denn bei dieser Versicherungsweise ist weniger zu besorgen, dafs die Bitte um Rückkauf auf Speculation beruht. In diesem Falle also kann die Gesellschaft sich auf den Rückkauf einlassen, sie sorge aber dafür, dafs der Preis des Rückkaufs sich unter der Rückerstattung hält, die beim Ableben stattfinden würde.

Es ist hier nachstehende Bemerkung am Platze. Man setze den Fall, dafs jemand sich nach zehn Jahren ein Kapital im Erlebensfall versichern will, aber fürchtet, dafs es ihm nicht gelingen wird, die Prämienzahlung während dieser Zeit zu leisten, indem er weifs, dafs die Gesellschaft z. B. nach fünf Jahren sich nicht für einen Rückkauf finden lassen wird. In solchem Falle berechnet er die Prämie auf eine zehnjährige Dauer zu einem niedrigeren Kapital auf eine fünfjährige Dauer; bleibt er am Leben und kann er die Prämienzahlung fortsetzen, so zahlt er einfach das ihm ausgezahlte Kapital als einmalige Prämie für eine neue Versicherung auf abermals fünfjährige Dauer und setzt die Prämienzahlung fort. Er bekommt zum Schlufs das nämliche Kapital, als wenn er sich für zehn Jahre versichert hätte. Sollte er aber am Ende der ersten fünf Jahre die Prämienzahlung nicht fortsetzen können, so nimmt er einfach das versicherte Kapital in Empfang, und befindet sich in denselben Umständen, als ob er sich auf zehn Jahre versichert hätte und die Gesellschaft ihm nach fünf Jahren die volle Reserve erstattete.

Wir wollen dies noch mittels einer Formel nachweisen und nehmen an, dafs jemand die Jahresprämie 1 bestimmt für eine Versicherung auf fünfjährige Dauer. Das versicherte Kapital stellt sich dann auf

$$\frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4}}{D_{x+5}}.$$

Am Ende der fünf Jahre leistet er diese Summe als einmalige Prämie für eine neue Versicherung abermals auf fünfjährige Dauer und versichert sich hierfür ein Kapital in der Höhe von

$$\frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4}}{D_{x+5}} \cdot \frac{D_{x+5}}{D_{x+10}}.$$

Überdies setzt er seine Prämienzahlung zum Betrage der Einheit fort, und versichert sich hierfür das Kapital:

$$\frac{D_{x+5} + D_{x+6} + D_{x+7} + D_{x+8} + D_{x+9}}{D_{x+10}}.$$

Im Erlebensfall erhält er also am Ende der zehn Jahre einen Betrag von:

$$\frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+9}}{D_{x+10}},$$

die nämliche Summe, welche er erhalten hätte, wenn er sich vom Anfang an auf zehnjährige Dauer versichert hätte.

Zwar kann in der Praxis ein relativ geringer Unterschied entstehen, weil die Gesellschaft nicht gegen Netto-Prämie versichert, aber das Princip bleibt aufrecht; ein kluger Kandidat versichert sich weder ein Kapital im Erlebensfalle noch eine Pension auf zu lange Dauer, er kann sein Ziel erreichen mittels fortdauernder Versicherung auf kurze Dauer.

Dies stellt neuerdings die schwache Seite der Versicherung im Erlebensfall und der Pensionsversicherungen für die Gesellschaften ins Licht.

(Über den Rückkauf sehe man: Die Theorie des Policen-Rückkaufes in der Lebensversicherung von **Julius Altenburger** in der „Österreichischen Versicherungs-Zeitung“ XXVII. Jahrgang.)

Darlehen.

327. Es geschieht öfters, dafs Versicherte, welche sich in Geldnot befinden, ihre Police nicht aufgeben wollen, und dieselbe daher nicht zum Rückkauf dabieten, sondern um ein Darlehen ansuchen. Wenn es Policen gilt, welche einen Rückkaufswert besitzen, braucht die Gesellschaft dagegen keine Schwierigkeit zu erheben. Im Gegenteil, die Belehnung der Policen ist für sie eine sehr solide Geldanlage, wenn die dageliehene Summe nicht über den Rückkaufswert hinausgeht. Die Gesellschaften bedingen einen schönen Zins von 5 % und sogar noch darüber, welchen sie überdies öfters im Voraus auf ein Jahr zahlen lassen.

Wenn ein Versicherter in einem bestimmten Augenblick seine Prämie nicht bezahlen kann, gewähren die meisten Gesellschaften, ohne Zinsen zu fordern, eine Zahlungsfrist von einem Monat; wünscht er eine längere Frist, so kann ihm dieselbe eigentlich nur gewährt werden, wenn die Police Rückkaufswert hat und wird jedenfalls eine Zinsvergütung gefordert. Es kommt indes wieder auf ein Darlehen hinaus.

Es könnte infolge des oben Gesagten bei Versicherung im Erlebensfall, bei Pensionsversicherungen, Witwenpensionen u. dergl. keine Prämienzahlungsfrist gewährt werden. Es giebt viele Gesellschaften, welche, wenn es das Gewähren einer Zahlungsfrist betrifft, nachgiebiger sind, als wenn es sich um Rückkauf handelt. Man läfst öfters Gnade für Recht walten, und das ist nur selbstverständlich.

Prämienfreie Police.

328. Es kommt vielfach vor, dafs eine Gesellschaft bei Einstellung der Prämien-Zahlung den ganzen Wert der Versicherung als einmalige Prämie für eine verminderte Versicherung gleicher Art wie die ursprüngliche gelten läfst, sodafs dann für die neue Police keine Prämie mehr gezahlt zu werden braucht. Das Alter bei Einstellung der Prämien-Zahlung gilt als Mafsstab. Dasselbe Verfahren kann man auch bei Versicherung auf den Erlebensfall anwenden, ebenfalls ohne Untersuchung auf den Gesundheitszustand, weil beim Ableben innerhalb der Versicherungsdauer die Auszahlung nicht stattfindet.

Einige Gesellschaften kaufen nicht zurück, geben aber die freie Police, andere lassen den Versicherten die Wahl. Für das erste Prinzip läfst sich vor allem anführen, dafs die Versicherung hierbei ihren Charakter behält; doch bestimmen viele Umstände oft zur Annahme des zweiten, und die Concurrenz spielt auch eine Rolle.

Indessen ist es nicht gerade notwendig, dafs die Gesellschaft zur Bestimmung der Gröfse der reducirten Versicherung einen Tarif von einmaligen Netto-Prämien benützt; sie ist in jeder Hinsicht berechtigt, einen Zuschlag auf die einmalige Netto-Prämie zu machen, wenn es auch richtig ist, unter dem Brutto-Tarife zu bleiben. Einerseits kommen die ersten Unkosten von selbst in Wegfall, andererseits kann die Gesellschaft wohl etwas von dem Gewinn beanspruchen, den sie in Form des Zuschlags zur Jahresprämie erwarten konnte.

Ist die versicherte Summe die Einheit, so stellt sich eine einfache, selbstverständliche Formel für den Betrag der prämienfreien Police:

$$W = 1 - \frac{P}{P_{(m)}}, \qquad (443)$$

worin P die Prämie vorstellt, welche der Versicherte jährlich für seine Versicherung zahlt, und $P_{(m)}$ die Prämie, welche er jährlich bezahlen müfste, wenn er im Augenblick, worin der Betrag der freien Police bestimmt wird, zutreten würde.

Sind nun P und $P_{(m)}$ Netto-Prämien, so ist W das Maximum der freien Police; dann dient die Netto-Reserve als netto-einmalige Prämie der freien Police.

Das Minimum der prämienfreien Police entsteht, wenn P die Brutto-Prämie ist, welche der Versicherte wirklich zahlt, indem $P_{(m)}$ Netto-Prämie ist.

Wir wollen die Formel noch algebraisch beweisen für die lebenslängliche und die gemischte Versicherung.

Die Prämienreserve ist:

$$V = 1 - \frac{a_{(m)}}{a},$$

die einmalige Prämie für die Einheit im Augenblick, worin die prämienfreie Police bestimmt wird, ist

$$1 - d \cdot a_{(m)},$$

also ist der Betrag der prämienfreien Police:

$$W = \left(1 - \frac{a_{(m)}}{a}\right) \cdot \frac{1}{1 - d \cdot a_{(m)}}.$$

Nun ist

$$P = \frac{1}{a} - d, \text{ also } a = \frac{1}{P + d}, \; a_m = \frac{1}{P_{(m)} + d}.$$

Substituirt man dies in obenstehendem Ausdruck für W, so bekommt man:

$$W = \left(1 - \frac{P + d}{P_{(m)} + d}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{d}{P_{(m)} + d}} = \frac{P_{(m)} - P}{P_{(m)} + d} \cdot \frac{P_{(m)} + d}{P_{(m)}} =$$

$$= 1 - \frac{P}{P_{(m)}}.$$

Die Formel ist indessen auch giltig für temporäre Versicherung im Ablebensfall, für Versicherung im Erlebensfall, für lebenslängliche und gemischte Versicherung auf mehr Häupter, für Überlebensrenten und -Kapital, aber stets bei gleichbleibender Prämie während der Dauer der Versicherung.

329. Man stellt gern Versicherungs-Bedingungen, die auch dem Laien leicht verständlich sind. Bei Versicherung auf den Erlebensfall und bei Pensions-Versicherung mit fortwährender gleichbleibender Jahresprämie ist es deshalb bei mehreren Gesellschaften üblich, bei Einstellung

der Prämien-Zahlung das ursprünglich versicherte Kapital oder die Pension im Verhältnis der Anzahl der gezahlten Jahresprämien zur Zahl der überhaupt zu zahlenden zu reduciren.

Soll das versicherte Kapital S im Erlebensfall nach n Jahren ausgezahlt werden, so reducirt man, wenn die Versicherung m Jahre in Kraft gewesen ist, das Kapital im Verhältnis von m zu n, sodafs die reducirte Versicherungssumme, welche im Erlebensfall zu demselben Zeitpunkt ausgezahlt werden soll, wie dies für die ursprüngliche Versicherung bestimmt war, jetzt $\frac{m}{n} \cdot S$ beträgt.

Auf dieselbe Weise wird eine Pension S per Jahr zu einer Pension $\frac{m}{n} \cdot S$ reducirt, welche zur selben Zeit wie die ursprüngliche Versicherung beginnen soll.

Wir wollen einmal zusehen, ob diese Methode immer anwendbar ist. Sei das ursprünglich versicherte Kapital vom Betrage 1 im Erlebensfall nach n Jahren auszuzahlen.

Die Netto-Jahresprämie ist

$$\frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}};$$

m Jahre nach dem Abschliefsen der Versicherung ist nach No. 253 die Netto-Reserve:

$$\frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} - \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \cdot \frac{N_{x+m-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+m}} =$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+m-1}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}. \qquad (443^*)$$

Der Versicherte, der beim Abschliefsen x Jahr alt war, ist jetzt nach m Jahren $x+m$ Jahr alt, und die einmalige Prämie für die Einheit auf den Erlebensfall im Alter $x+n$ ist

$$\frac{D_{x+n}}{D_{x+m}}.$$

Die Reserve (443*) kann also als einmalige Prämie einer reducirten Versicherung vom Betrage

$$\frac{N_{x-1} - N_{x+m-1}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \qquad (444)$$

dienen, zahlbar im Alter $x+n$.

Dieser Betrag ist aber auch das Maximum; weiter kann die Gesellschaft keinesfalls gehen, weil wir hier mit Netto-Reserve und einmaliger Netto-Prämie gerechnet haben. Wenn es möglich sein soll, die reducirte Versicherung auf $\frac{m}{n}$ festzusetzen, so mufs der Ausdruck (444) gröfser als $\frac{m}{n}$ sein.

Dafs dies wirklich der Fall ist, ergiebt sich leicht, wenn wir folgenden arithmetischen Satz bewiesen haben:

Wenn in dem Bruch

$$X = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m + k_{m+1} + \ldots + k_n}$$

der Zähler aus m, der Nenner aus n Gliedern ($m < n$) besteht und dabei die Zahlen k von links nach rechts beständig abnehmen, sodafs

$$k_1 > k_2 > k_3 \ldots > k_n,$$

dann ist:

$$X > \frac{m}{n}.$$

Um dies zu beweisen, wollen wir den Bruch X schreiben:

$$X = \frac{1}{1 + \frac{k_{m+1} + k_{m+2} + \ldots + k_n}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m}} = \frac{1}{1 + Y}.$$

In dem Bruch

$$Y = \frac{k_{m+1} + k_{m+2} + \ldots + k_n}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m}$$

besteht der Zähler aus $n - m$, der Nenner aus m Gliedern. Weil die Zahlen k abnehmen, ist der Zähler von $Y < (n - m)\, k_m$ und der Nenner $> m\, k_m$; darum ist der Bruch $Y < \frac{n - m}{m}$.

Hieraus folgt:

$$X = \frac{1}{1 + Y} > \frac{1}{1 + \frac{n - m}{m}}, \text{ d. h. } X > \frac{m}{n}.$$

Weil nun in dem Bruch (444)

$$\frac{N_{x-1}-N_{x+m-1}}{N_{x-1}-N_{x+n-1}}=\frac{D_x+D_{x+1}+\ldots+D_{x+m-1}}{D_x+D_{x+1}+\ldots+D_{x+m}+D_{x+m+1}+\ldots+D_{x+n-1}}$$

der Zähler aus m, der Nenner aus n Gliedern besteht, die nach der Bedeutung der D von links nach rechts fortwährend abnehmen, so ist dieser Bruch $> \frac{m}{n}$.

Wenn man also die Versicherung im Verhältnis m zu n reducirt, ist die reducirte Versicherungssumme niedriger als der Höchstbetrag, den die Netto-Reserve zuläfst; für die Gesellschaft bleibt also noch ein Gewinn übrig.

330. Die Methode wird auch auf gemischte Versicherung angewendet; dann ist es aber weniger sicher, dafs die reducirte Versicherung niedrig genug wird. Zunächst ist doch bei sehr langer Dauer der gemischten Versicherung und bei sehr jugendlichem Beitrittsalter die Reserve nach 1 Jahr ungefähr $= 0$ und kann also dann von der Anwendung am Anfang nicht die Rede sein.

Die Anwendung der Methode wird bei der gemischten Versicherung um so eher möglich sein, je mehr sich die Versicherung derjenigen auf den Erlebensfall nähert, je geringer also während der Dauer der Versicherung der Einfluſs der Sterbenswahrscheinlichkeit auf die Prämie ist im Vergleich mit demjenigen der Lebenswahrscheinlichkeit.

Um einen Fall zu nehmen, der auf der Grenze liegt, wählen wir den, dafs ein x-jähriger eine gemischte Versicherung vom Betrage 1 auf zwei Jahre abschliefst. Die Jahresprämie ist dann:

$$\frac{D_x}{D_x+D_{x+1}}-\frac{i}{1+i}.$$

Nach 1 Jahr ist die Reserve:

$$\frac{1}{1+i}-\left(\frac{D_x}{D_x+D_{x+1}}-\frac{i}{1+i}\right)=1-\frac{D_x}{D_x+D_{x+1}}=\frac{D_{x+1}}{D_x+D_{x+1}}.$$

Hierfür kann die Gesellschaft versichern die Summe:

$$\frac{D_{x+1}}{D_x+D_{x+1}}\cdot(1+i)=\frac{(1+i)\,l_{x+1}}{(1+i)\,l_x+l_{x+1}}.$$

Soll jetzt die Methode der Policen-Reduction auch hier gelten, so mufs

$$\frac{(1+i)\,l_{x+1}}{(1+i)\,l_x+l_{x+1}}>\tfrac{1}{2},$$

oder wenn man die Lebenswahrscheinlichkeit

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x$$

setzt,

$$\frac{(1+i)\,p_x}{1+i+p_x} > \tfrac{1}{2}$$

sein, woraus sich ergiebt:

$$p_x > \frac{1+i}{1+2i}.$$

Setzt man $1 - p_x = q_x$, sodafs q_x die Sterbenswahrscheinlichkeit bedeutet, dann wird die Bedingung:

$$q_x < \frac{i}{1+2i}.$$

Rechnet man mit dem Zinsfufs 4 %, so mufs die Sterbenswahrscheinlichkeit kleiner sein als 0.03704.

Man kann die Methode also um so weniger anwenden, je gröfser die Sterbenswahrscheinlichkeit, je höher m. a. W. das Beitrittsalter ist

Sie ist z. B. nicht immer verwendbar — ohne Verlust für die Gesellschaft — für den Fall, dafs ein 60-jähriger eine gemischte Versicherung abschliefst auf die Dauer von zehn Jahren; denn beim Gebrauch mehrerer Sterblichkeitstafeln stellt sich für jeden Wert von m die auf die Netto-Reserve begründete freie Police auf einen Betrag, der kleiner ist als $\frac{m}{10}$ des ursprünglich versicherten Kapitals.

Bei den Altersstufen und der Dauer, für welche die gemischte Versicherung meistens abgeschlossen wird, kann man indessen die Methode in der Regel anwenden; nur versäume man nicht, sich durch Versuche davon zu überzeugen.

Etwas unbedenklicher als bei gemischter Versicherung, doch weniger unbedenklich als bei Versicherung auf den Erlebensfall, ist die Anwendung möglich bei Versicherung auf bestimmte Verfallzeit (No. 126), denn die Sterbenswahrscheinlichkeit hat da weniger Einflufs als bei gemischter Versicherung.

Endlich wird dieselbe Methode der Policen-Reduction auch angewendet auf lebenslängliche Versicherung gegen temporäre Prämie, sodafs jemand, der z. B. nach Zahlung der Hälfte seiner Prämien die Zahlung einstellt, eine freie Police auf die halbe Versicherungssumme bekommt. Gewifs ist aber, dafs die Methode nicht in allen Fällen mit Sicherheit verwendbar ist.

Es giebt Gesellschaften, welche zur Bestimmung des Rückkaufswertes von dem Betrag der prämienfreien Police ausgehen, und diesen discontiren, ohne die Sterbenswahrscheinlichkeit zu beachten; ist bei gemischter Versicherung die zukünftige Dauer noch n Jahr, so ist nach diesem System der Rückkaufswert

$$\frac{W}{(1+i)^n}.$$

Bei lebenslänglicher Versicherung und bei gemischter, wobei die zukünftige Dauer noch länger ist als die mittlere Lebensdauer, betrachte man letztere als die zukünftige Dauer.

Temporäre Fortsetzung der Versicherung ohne weitere Prämienzahlung.

331. Wenn ein Versicherter im Ablebensfall oder für gemischte Versicherung Prämienzahlung verweigert, ohne Rückkauf oder prämienfreie Police anzufragen, ist es noch nicht nötig, gleich zu annulliren, und die Gesetze einiger Länder verbieten es selbst. Die Police kann, wenn dieselbe Rückkaufswert hat, während einiger Zeit in Kraft bleiben. Um diese Zeit zu bestimmen, hat man nur einem Tarif der einmaligen Prämien für temporäre Versicherung im Ablebensfall nachzugehn, wie lange der Rückkaufswert noch Anspruch giebt auf Auszahlung des Kapitals, wenn der Versicherte sterben sollte. Dieser kann im Voraus gewarnt werden, und ist der Termin verstrichen, so folgt Anullirung.

Änderung der Versicherungssumme.

332. Wenn jemand, der früher eine Versicherung abgeschlossen hat, den Betrag dieser Versicherung erhöhen will, so erhält man die Prämie, welche forthin gezahlt werden mufs, indem man einfach die alte Prämie um die Prämie für die Erhöhung der Versicherungssumme, wie dieselbe sich mit Rücksicht auf das erreichte Alter stellt, zunehmen läfst, wobei aber nach der Art der Versicherung ärztliche Untersuchung nötig sein kann. Wenn hingegen jemand seine Versicherung verringern will, so ist es, besonders wenn die Versicherung schon eine Anzahl Jahre bestanden hat, nicht angängig, die Prämie einfach dem Betrage proportional zu reduciren.

Wie man dann richtig verfährt, wollen wir an einem Beispiel zeigen.

Es habe jemand eine Lebensversicherung auf 10000 M. und zahle dafür eine jährliche Prämie P; jetzt, wo er 50 Jahr alt ist, könne er

diese Prämie nicht länger zahlen und wolle deshalb seine Versicherung auf 6000 M. reduciren. Wenn nun V die Reserve für die ganze Summe von 10000 M. bedeutet, dann ist die Reserve der 4000 M., welche verfällt, $\frac{2}{5} V$; diese Summe wird ihm nicht ausgezahlt, sondern man verrechnet jährlich $\frac{2}{5} V \cdot \frac{1}{a_{50}}$ in der Prämie, sodafs er künftig für die 6000 M.

$$\frac{3}{5} P - \frac{2}{5} V \cdot \frac{1}{a_{50}}$$

als jährliche Prämie zahlt.

Statt, wie es so geschieht, dem Versicherten die ganze Reserve $\frac{2}{5} V$ gutzuschreiben, ist es nicht unbillig, diesen Betrag etwas zu verringern; die neue Prämie wird dann:

$$\frac{3}{5} P - \frac{2}{5}\left(\frac{V}{a_{50}} - \alpha P\right),$$

worin α z. B. $= 0.05$ zu wählen ist. (Vergl. No. 324.) Bei der Wahl des Koeffizienten α soll man indessen Unterschied machen zwischen den Fällen, dafs V Netto-Reserve ist oder eine Reserve, welche mit den ersten Unkosten rechnet.

Zur Bestimmung der Reserve für die 6000 M. hat man forthin der reducirten Prämie Rechnung zu tragen, und ist es am einfachsten, die Reserve-Prämie in demselben Verhältnis wie die Brutto-Prämie zu reduciren. Dies zeigt aufs Neue, dafs es nicht immer leicht ist, das System der Netto-Reserve streng durchzuführen.

Änderung der Prämien-Zahlung.

333. Jemand habe eine lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall gegen fortwährende Prämie vom Betrage P per Jahr geschlossen. Er habe jetzt das Alter von y Jahren erreicht, und wolle seine noch ausstehenden Prämien auf einmal im Ganzen zahlen.

Man braucht dann nicht mit der Reserve zu rechnen, um zu bestimmen, wie viel er zu zahlen hat, denn die zu fordernde Einlage besteht einfach aus dem gegenwärtigen Wert aller künftigen Jahresprämien, d. h. $P \cdot a_y$.

Will er aber weiterhin die Jahresprämie in 10 Jahren, bezw. bis zu seinem früheren Ableben abzahlen, so bestimmt sich diese 10-jährige Prämie auf:

$$P \cdot \frac{a_y}{|_{10} a_y} = P \cdot \frac{N_{y-1}}{N_{y-1} - N_{y+9}}. \qquad (445)$$

Die Gesellschaft kann immer gestatten, von einer Prämien-Zahlung mit langer Dauer zu einer mit kurzer Dauer überzugehn; das Umgekehrte aber ist ohne besondere Untersuchung nicht zulässig, und es mufs jedenfalls die Prämie etwas höher angesetzt werden, als die Reductions-Formel mit sich führt.

334. Wenn ein Versicherter einige Jahre lang seine Prämie gezahlt hat, und es zeigt sich dann, dafs seine Prämie zu niedrig war, z. B. in Folge fehlerhafter Altersangabe, so kann die Versicherung in Kraft bleiben, wenn wenigstens die Prämie angemessen erhöht wird und auch für das früher zu wenig Gezahlte Entschädigung geleistet wird.

Sei das Alter (das genaue Alter) beim Beitritt x Jahr und sei n Jahre hindurch jährlich ein Betrag α zu wenig an Prämie gezahlt worden. Der Versicherte hätte jährlich P_x zahlen sollen, und zahlt nur $P_x - \alpha$.

Wenn man Sterbenswahrscheinlichkeit und Zins berücksichtigt, so ist nach diesen n Jahren der Wert des zu wenig Gezahlten:

$$\alpha \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_{x+n}} = \alpha \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+n}}.$$

Handelt es sich um eine lebenslängliche Versicherung und will der Versicherte die Nachzahlung nicht auf einmal leisten, sondern durch Erhöhung der jährlichen Beiträge verrechnen lassen, so ergiebt sich diese jährliche Erhöhung durch Division der einmaligen Nachzahlung mit a_{x+n}; sie ist also:

$$\alpha \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{N_{x+n-1}}. \qquad (446)$$

Forthin mufs der Versicherte also jährlich zahlen

$$P_x + \alpha \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{N_{x+n-1}}.$$

Hierbei setzt man voraus, dafs beim Ableben innerhalb der n Jahre die ganze versicherte Summe ausgezahlt wäre gegen die zu niedrige Prämie.

Entdeckt man erst bei der Auszahlung, dafs der Versicherte eine zu niedrige Prämie gezahlt hat, so besteht das leichteste und genaueste Verfahren darin, den versicherten Betrag im Verhältnis der gezahlten zur richtigen Prämie zu reduciren.

Wenn man annehmen kann, dafs beim früheren Ableben diese Reduction stattgefunden hätte, wenn zu wenig Prämie gezahlt wäre, so ist das System der proportionalen Reduction auch anzuwenden, wenn ein Fehler dieser Art noch bei Lebzeit des Versicherten wieder-

hergestellt wird. Es sei S die versicherte Summe, wofür der Versicherte jährlich die Prämie $S \cdot P$ bezahlt, indem er $S \cdot P'$ hätte zahlen sollen, so reducirt sich das versicherte Kapital zu $S \cdot \frac{P}{P'}$, er kann nun die Prämie $S \cdot P$ fortsetzen und versichert bleiben für $S \cdot \frac{P}{P'}$; soll das versicherte Kapital forthin jedoch wieder S sein, und ist die Jahresprämie für die Einheit in Übereinstimmung mit dem jetzigen Alter $P_{(m)}$, so mufs der Versicherte forthin jährlich zahlen:

$$S \cdot P + S \cdot \left(1 - \frac{P}{P'}\right) \cdot P_{(m)}.$$

Änderung der Versicherungsweise.

335. Es kommt gelegentlich vor, dafs ein Versicherter nach einigen Jahren gegen Zahlung derselben Prämien zu einer anderen Versicherungsweise übergehn will, wobei sich selbstverständlich auch das versicherte Kapital ändern mufs.

An erster Stelle mufs festgestellt werden, ob sich der Versicherte dazu einer ärztlichen Untersuchung unterziehn mufs. Dies ist unumgänglich notwendig, wenn man von einer Versicherung auf den Erlebensfall zu einer solchen auf den Todesfall, oder von einer gemischten zu einer lebenslänglichen übergehn will.

Ist man hierüber einig, so wäre es, wenn die Versicherung schon einige Jahre bestanden hat, unrichtig, die früher gezahlten Prämien aufser Rechnung zu lassen. Man wird vielmehr den Betrag bestimmen, auf welchen die Reserve der bisherigen Versicherung Anspruch giebt, und diesen zu dem Betrag hinzunehmen, welcher der künftigen Prämien-Zahlung entspricht, um die neue Versicherungssumme zu erhalten.

336. Wenn jemand eine lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall gegen Jahresprämie, nachdem er einige Jahre versichert gewesen ist, in eine gemischte Versicherung umwandeln will gegen Fortzahlung derselben Jahresprämie und daher mit niedrigerer Versicherungssumme, so geht es nicht an, die Sache einfach so zu betrachten, als wenn schon von Anfang an die gemischte Versicherung bestanden hätte. Die Gesellschaft hätte dann für die gemischte Versicherung keine ausreichende Reserve gebildet, denn von derselben Prämie mufs bei demselben Beitrittsalter mehr reservirt werden für gemischte als für lebenslängliche Versicherung. Mit anderen Worten: die Gesellschaft läuft ein gröfseres Risiko, wenn jemand eine gewisse Prämie für lebenslängliche

Versicherung, als wenn er dieselbe Prämie für gemischte Versicherung zahlt. Man mufs dann wohl verfahren, wie wir in No. 335 angegeben haben.

Wenn aber umgekehrt jemand eine gemischte Versicherung gegen Jahresprämie nach einigen Jahren in eine lebenslängliche Versicherung zu dem, dem Beitrittsalter entsprechenden höheren Betrage umwandeln will, dann braucht die Gesellschaft keine Schwierigkeiten zu machen, wenn eine ärztliche Untersuchung den guten Gesundheitszustand des Versicherten festgestellt hat. Letztere ist erforderlich, weil gegen dieselbe Prämie nicht nur die Auszahlung höher werden mufs, sondern weil es aufserdem nicht sicher ist, dafs, wenn die Gesellschaft einen Anwärter für eine gemischte Versicherung bis zu seinem 60sten Jahr angenommen hat, sie ihn auch lebenslänglich hätte versichern wollen. Was die Reserve betrifft, so ist diese so reichlich vorhanden, dafs nicht nur der geänderten Versicherung entsprochen wird, sondern sogar für die Gesellschaft noch etwas übrig bleibt.

337. Eine strenge Methode für den Übergang von einer Versicherung in die andere ist die folgende:

Ein x-jähriger habe eine lebenslängliche Versicherung abgeschlossen; nachdem seine Police n Jahre gelaufen ist, will er sie in eine andere für gemischte Versicherung auf denselben Betrag und mit einer Dauer von m Jahren umwandeln. Die von dem Versicherten bisher jährlich gezahlte Prämie sei P_x; hätte er gleich anfänglich die gemischte Versicherung, also auf eine Dauer von $m+n$ Jahren, abgeschlossen, dann wäre die Prämie $P_{x.\overline{m+n}|}$ gewesen; er hat also während der n Jahre jährlich $P_{x.\overline{m+n}|} - P_x$ zu wenig gezahlt.

Nach No. 334 hat er dafür während der folgenden m Jahre jährlich:

$$(P_{x.\overline{m+n}|} - P_x) \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{N_{x+n-1} - N_{x+m+n-1}}$$

nachzuzahlen.

Im Ganzen hat er also hinfort zu zahlen:

$$P_{x.\overline{m+n}|} + (P_{x.\overline{m+n}|} - P_x) \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{N_{x+n-1} - N_{x+m+n-1}}. \qquad (447)$$

Es ist ganz deutlich, dafs man hier unter P_x und $P_{x.\overline{m+n}|}$ die Prämien des Tarifs verstehen mufs.

Bedeuten die P Netto-Prämien, so ist Formel (447) mit

$$\frac{A_{x+n.\overline{m}|} - {}_nV_x}{a_{x+n.\overline{m}|}}$$

identisch, worin dann $A_{x+n.\overline{m}|}$ die einmalige Prämie für die gemischte Versicherung zur Zeit der Veränderung ist, ${}_nV$ die Reserve für die bisherige Versicherung, die also bei der Berechnung der neuen Prämie in Abzug zu bringen ist.

Man kann hierfür auch schreiben:

$$P_{x+n.\overline{m}|} - \frac{{}_nV}{a_{x+n.\overline{m}|}}; \qquad (448)$$

diese Formel ist selbstverständlich und kann auf Brutto-Prämie P angewandt werden. Der Versicherte geht die neue Prämie $P_{x+n.\overline{m}|}$ bezahlen, aber er erhält Kürzung wegen der anwesenden Reserve.

Kapitel XII.

Specielle Probleme.

Einfluſs des Zinsfuſses und der Sterblichkeitstafel auf Prämie und Reserve.

338. Wir können diesen Einfluſs nicht mittels einer einzigen Formel darstellen, weil Prämie und Reserve ziemlich verwickelte Functionen der Sterbenswahrscheinlichkeit und des Zinsfuſses sind.

Dennoch wollen wir versuchen, hierauf etwas einzugehn, beschränken uns aber auf die Hauptsachen: lebenslängliche Leibrente und lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall.

Setzen wir $\frac{1}{1+i} = v$, dann ist nach No. 94 der Wert der lebenslänglichen Leibrente:

$$a_x = 1 + v\,p_x + v^2\,p_x\,p_{x+1} + v^3\,p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2} + \ldots, \qquad (449)$$

worin die p die Lebenswahrscheinlichkeiten während eines Jahres sind die einmalige Prämie für die Lebensversicherung ist nach No. 102*:

$$A_x = \frac{1}{l_x}\,(v\,d_x + v^2\,d_{x+1} + v^3\,d_{x+2} + \ldots) =$$
$$= 1 - d \cdot a_x = 1 - (1 - v)\,a_x. \qquad (450)$$

und die Jahresprämie:

$$P_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{1}{a_x} - 1 + v. \qquad (451)$$

Bei der Wahl eines anderen Zinsfufses werden sich a, A und P ändern. Nimmt i zu, so nimmt v und nehmen auch a und A augenscheinlich ab; ein höherer Zinsfufs giebt also einen kleineren Wert für die Leibrente wie auch für die einmalige Prämie der Lebensversicherung.

Für die Jahresprämie ist das nicht so deutlich; so viel ist aber sicher: wenn der höhere Zinsfufs die Prämie abnehmen läfst, so ist die Abnahme procentual geringer als bei der einmaligen Prämie. Wir müssen also genauer zusehn.

Ändert sich i in i' und hiermit v in v', so wollen wir die entsprechenden a und P auch mit Accenten versehen, sodafs:

$$P'_x = \frac{1}{a'_x} - 1 + v',$$

also:

$$P_x - P'_x = \frac{1}{a_x} - \frac{1}{a'_x} + v - v' =$$

$$= v - v' - \frac{a_x - a'_x}{a_x\, a'_x}.$$

Jetzt kommt es darauf an, Zähler und Nenner des letzteren Bruches zu entwickeln. Aus Formel (449) ergiebt sich:

$$\begin{aligned} a_x - a'_x = (v - v')\,[&p_x + (v + v')\,p_x\,p_{x+1} + \\ &+ (v^2 + v\,v' + v'^2)\,p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2} + \\ &+ (v^3 + v^2\,v' + v\,v'^2 + v'^3)\,p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2}\,p_{x+3} + \ldots] \end{aligned} \qquad (452)$$

$$\begin{aligned} a_x\,a'_x = 1 &+ v\,p_x + v'\,p_x + v^2\,p_x\,p_{x+1} + v\,v'\,p_x\,p_x + \\ &+ v'^2\,p_x\,p_{x+1} + v^3\,p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2} + v^2\,v'\,p_x\,p_{x+1}\,p_x + \\ &+ v\,v'^2\,p_x\,p_x\,p_{x+1} + v'^3\,p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2} + \ldots \end{aligned} \qquad (453)$$

Der eckig eingeklammerte Ausdruck in (452) hat, wenn er entwickelt ist, dieselben Glieder der Form $v^m\,v'^n$ wie (453), aber mit anderen Koeffizienten.

In (453) hat erstens jeder Koeffizient einen Faktor weniger als der entsprechende in (452). Der Koeffizient von $v^m\,v'^n$ innerhalb der [] von (452) ist $p_x \cdot p_{x+1} \ldots p_{x+m+n}$, hat also $m + n + 1$ Faktoren, in (453) ist dieser Koeffizient $p_x \cdot p_{x+1} \ldots p_{x+m-1} \cdot p_x \cdot p_{x+1} \ldots p_{x+n-1}$, hat

also $m + n$ Faktoren. Alle diese Faktoren sind selbstverständlich kleiner als die Einheit. Wenn jetzt die Lebenswahrscheinlichkeiten mit der Zunahme des Alters stets abnehmen, d. h.:

$$p_x > p_{x+1} > p_{x+2} \cdots,$$

so ist deutlich, dafs jedes Glied $v^m v'^n$ innerhalb der [ ] von (452) einen kleineren Koeffizienten hat als dasselbe Glied in (453), und deshalb ist dann der Ausdruck innerhalb der [ ] von (452) kleiner als $a_x a'_x$. Ohne Ausnahme hat nun $a_x - a'_x$ dasselbe Vorzeichen wie $v - v'$, es ergiebt sich also, dafs bei immer abnehmender Lebenswahrscheinlichkeit, absolut genommen,

$$\frac{a_x - a'_x}{a_x a'_x} < v - v'.$$

Ist jetzt $i' > i$, also $v' < v$, dann ist deutlich $P'_x < P_x$. Bei immer abnehmender Lebenswahrscheinlichkeit giebt also ein höherer Zinsfufs einen niedrigeren Tarif der Jahresprämie.

Nehmen wir wie bisher die sehr jungen Kinder aus, so können wir ruhig die Regel ohne Einschränkung hinstellen, denn die Altersjahre, nach welchen die Lebenswahrscheinlichkeit bei einigen Tafeln noch etliche Jahre zunehmen kann, üben wenig oder gar keinen Einfluſs.

339. Was den Einfluſs auf die Reserve betrifft, so reden wir nur von Reserve der Jahresprämie, denn die Reserve der einmaligen Prämie ist wieder eine einmalige Prämie.

Nach m Jahren ist bei dem Zins i die Reserve ${}_mV_x = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}$; bei dem Zins i' schreiben wir sie:

$${}_mV'_x = 1 - \frac{a'_{x+m}}{a'_x},$$

dann ist:

$${}_mV_x - {}_mV'_x = \frac{a'_{x+m}}{a'_x} - \frac{a_{x+m}}{a_x} = \frac{a_x a'_{x+m} - a'_x a_{x+m}}{a_x a'_x}. \quad (454)$$

Entwickeln wir hierin den Zähler nach Formel (449), so erhält sie nach einer leichten Umrechnung die Form:

$$a_x a'_{x+m} - a'_x a_{x+m} =$$
$$= (v - v') \Sigma \Big\{ v^y v'^y (v^{k-1} + v^{k-2} v' + v^{k-3} v'^2 + \ldots + v'^{k-1}) \times$$
$$\times p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+y-1} p_{x+m} p_{x+m+1} p_{x+m+2} \cdots p_{x+m+y-1} \times$$
$$\times (p_{x+y} p_{x+y+1} \cdots p_{x+y+k-1} -$$
$$- p_{x+m+y} p_{x+m+y+1} \cdots p_{x+m+y+k-1}) \Big\}, \quad (455)$$

wo die Summirung sich erstreckt auf die Combination aller ganzen Werte für y und k, anzufangen mit $y=0$ und $k=1$. Die Reihe bricht aber von selbst ab, denn die Lebenswahrscheinlichkeiten p sind null, wenn die Indices der p gröfser sind als das höchste Alter der Mortalitätstafel.

Nehmen jetzt die Lebenswahrscheinlichkeiten mit zunehmendem Alter ab, so ist jedes Glied der Summe Σ positiv, und wenn auch einmal vereinzelt die Lebenswahrscheinlichkeit zunähme, so würde deshalb doch fast nie die ganze Summe Σ negativ werden, aufser vielleicht für einen speciellen Wert für x, bei welchem die Lebenswahrscheinlichkeit zunimmt, und dann nur bei einem sehr geringen Wert für m, z. B. $m=1$.

Man kann also mit Gewifsheit sagen, dafs der Zähler in (454), d. h. $a_x\, a'_{x+m} - a'_x\, a_{x+m}$ dasselbe Vorzeichen hat wie $v-v'$, und dies gilt also auch für ${}_mV - {}_mV'$; d. h. ein höherer Zinsfufs giebt eine kleinere Reserve.

340. Der Einflufs der Benutzung einer Sterblichkeitstafel mit geringerer Sterbenswahrscheinlichkeit auf die Tarife ergiebt sich sofort aus den Formeln (449), (450) und (451).

Nehmen die Sterbenswahrscheinlichkeiten ab, so nehmen die Lebenswahrscheinlichkeiten p zu; der Wert der Leibrente wird also gröfser, aber die einmalige und die Jahresprämien für die Lebensversicherung nehmen ab; die Form $\frac{A_x}{a_x}$ für die Jahresprämie zeigt aber, dafs die Abnahme der Jahresprämie procentual gröfser ist als die der einmaligen Prämie, denn der Zähler nimmt ab, der Nenner aber nimmt zu — also gerade der entgegengesetzte Fall, wie bei der Wahl eines anderen Zinsfufses, denn da ist der Einflufs auf die einmalige Prämie procentual gröfser wie auf die Jahresprämie.

341. Weniger leicht ist es, den Einflufs der geänderten Sterblichkeit auf die Reserve zu ermitteln. Die Reserve nach m Jahren ist

$$ {}_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}. $$

Eine Sterblichkeitstafel, die von einem Altersjahr zum anderen eine geringere Sterblichkeit angiebt, läfst zwar sowohl A_{x+m} wie auch P_x abnehmen, vergröfsert aber a_{x+m}; a priori kann man hier also über die Veränderung von ${}_mV$ nichts aussagen.

Auch hier ist Formel

$$ {}_mV_x = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x} $$

der nützlichste Ausgangspunkt.

Durch die geringere Sterblichkeit nimmt sowohl a_{x+m} wie auch a_x zu. Ist dies jetzt bei a_x verhältnismäfsig mehr der Fall als bei a_{x+m}, so nimmt $\frac{a_{x+m}}{a_x}$ ab und ${}_mV_x$ nimmt zu.

Es kann also vorkommen, dafs eine Tafel mit geringerer Sterblichkeit, obgleich sie für jedes Alter niedrigere Prämien liefert, dennoch für jede Versicherungsdauer zu einer höheren Reserve führt.

Aus Formel (449) ergiebt sich:

$$a_x = 1 + v p_x + v^2 p_x p_{x+1} + \ldots + v^{m-1} p_x p_{x+1} \ldots p_{x+m-1} + \\ + v^m p_x p_{x+1} \ldots p_{x+m-1} \cdot a_{x+m}. \qquad (456)$$

Den Quotienten $\frac{a_{x+m}}{a_x}$ kann man also auf die Form bringen:

$$\frac{a_{x+m}}{B + C \cdot a_{x+m}}.$$

Trifft jetzt die Annahme der geringeren Sterblichkeit nur zu für das Alter $x+m$ und die höheren, so nimmt sowohl a_x wie auch a_{x+m} zu, B und C aber bleiben unverändert, denn in der rechten Seite der Formel (456) ändert sich nur a_{x+m}. Nehmen wir an, dafs a_{x+m} durch die geringere Sterblichkeit $1+\alpha$ mal so grofs wird, so ist deutlich, dafs $B + C \cdot a_{x+m}$ nicht in demselbin Verhältnis zunimmt, dafs also $\frac{a_{x+m}}{a_x}$ wächst und folglich die Reserve $1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}$ abnimmt. Dann verursacht der niedrigere Tarif eine Herabsetzung der Reserve für die Versicherten, welche beim Beitritt jünger als $x+m$ waren, wenn sie das Alter $x+m$ oder darüber erreicht haben.

Setzen wir dagegen den Fall, dafs die Abnahme der Sterblichkeit nur die Alter unter $x+m$ betrifft, dann bleibt a_{x+m} unverändert, aber a_x nimmt zu, $\frac{a_{x+m}}{a_x}$ nimmt ab, die Reserve $1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}$ nimmt zu.

Die Erniedrigung des Tarifs für diejenigen, welche in jüngerem Alter als $x+m$ beitreten, verursacht also unbedingt eine Erhöhung der Reserve, sobald sie $x+m$ Jahr oder älter geworden sind. Innerhalb der m Jahre kann sowohl eine höhere wie auch eine niedrigere Reserve entstanden sein.

Eine grofse Abnahme der Sterbenswahrscheinlichkeit in den höheren Altersstufen den niedrigeren gegenüber, wird also im Allgemeinen zu einer Erniedrigung der Reserve Veranlassung geben. Betrifft dagegen die Abnahme der Sterblichkeit hauptsächlich die jüngeren Altersklassen,

so kann eine Tafel mit geringerer Sterblichkeit, obgleich sie kleinere Prämien ergiebt, durchgehend zu einer höheren Reserve führen.

342. Es ist leicht möglich, dafs zwei Sterblichkeitstafeln, die bei Benutzung desselben Zinsfufses sehr verschiedene Prämien geben, dennoch zu wenig verschiedenen Reserven führen. Dies erhellt daraus, dafs man aus einer gegebenen Sterblichkeitstafel eine andere ableiten kann, die trotz sehr verschiedener Sterbenswahrscheinlichkeit bei demselben Zinsfufs die Reserve unverändert läfst.

Die Reserve hängt ab von dem Quotienten $\frac{a_{x+m}}{a_x}$; ist nun auf Grund einer anderen Sterblichkeitstafel für jeden Wert von x der Leibrenten-Wert $a'_x = \alpha\, a_x$, wo α eine Constante bedeutet, so übt die Verschiedenheit der Sterblichkeitstafel keinen Einfluſs auf die Reserve aus.

Aus Formel (449) ergiebt sich:

$$a_x = 1 + v \cdot p_x\, a_{x+1},$$

also ist auch

$$a_{x-1} = 1 + v \cdot p_{x-1}\, a_x$$

und ähnlich

$$a'_{x-1} = 1 + v \cdot p'_{x-1}\, a'_x,$$

wenn p' die Lebenswahrscheinlichkeit nach der neuen Sterblichkeitstafel bedeutet.

Wir suchen jetzt die Bedingung, welche die neue Lebenswahrscheinlichkeit p'_{x-1} erfüllen mufs, damit aus $a'_x = \alpha \cdot a_x$ folge:

$$a'_{x-1} = \alpha \cdot a_{x-1};$$

dazu ist notwendig, dafs

$$1 + v\, p'_{x-1}\, a'_x = \alpha\,(1 + v p_{x-1}\, a_x),$$

und also auch

$$1 + v p'_{x-1}\, \alpha\, a_x = \alpha\,(1 + v p_{x-1}\, a_x) \text{ sei.}$$

Hieraus ergiebt sich die Bedingung:

$$p'_{x-1} = p_{x-1} + \frac{\alpha - 1}{v \cdot \alpha \cdot a_x}. \qquad (457)$$

Um jetzt aus einer gegebenen Sterblichkeitstafel eine andere abzuleiten, die der gestellten Forderung entspricht, mufs man bei dem höchsten Alter der Sterblichkeitstafel anfangen. Sei das höchste Alter der gegebenen Tafel 100 Jahr, dann ist $p_{100} = 0$, $a_{100} = 1$; nehmen

wir $\alpha > 1$, dann mufs $a'_{100} = \alpha$ sein. Wir lassen nun die neue Sterblichkeitstafel endigen mit 101, dann ist

$$p'_{101} = 0,\ a'_{101} = 1,\ a'_{100} = 1 + v\,p'_{100},$$

also $1 + v \cdot p'_{100} = \alpha$, woraus folgt:

$$p'_{100} = \frac{\alpha - 1}{v}.$$

Nach (457) mufs dann sein:

$$p'_{99} = p_{99} + \frac{\alpha - 1}{v\,\alpha},$$

$$p'_{98} = p_{98} + \frac{\alpha - 1}{v\,\alpha\,a_{99}},$$

$$p'_{97} = p_{97} + \frac{\alpha - 1}{v\,\alpha\,a_{98}},$$

u. s. w.

Weil wir $\alpha > 1$ gesetzt haben, sodafs $a' > a$, entstehen auf diese Weise die Lebenswahrscheinlichkeiten für eine neue Sterblichkeitstafel mit geringerer Sterblichkeit und also mit geringerer Prämie als nach der gegebenen Tafel; es bleibt aber für jedes Alter und jede Dauer die Reserve dieselbe. Keine der neuen Lebenswahrscheinlichkeiten p' darf indessen höher sein als die Einheit; in dieser Hinsicht ist man also in der Wahl der α beschränkt, und soll die neue Tafel nicht widersinnig sein, so mufs p'_{100} weit unter der Einheit bleiben, z. B. $= 0.1$ sein. Sorgt man hierfür, so ist die Gefahr, dafs sich Werte von p' höher als die Einheit ergeben, sehr gering, weil doch (von den vereinzelten möglichen Fällen, dafs die Lebenswahrscheinlichkeit nicht fortwährend abnimmt, abgesehen) der Wert der Leibrente gröfser, also die Zunahme $\frac{\alpha - 1}{\alpha\,v\,a_x}$ der Lebenswahrscheinlichkeit geringer wird, je niedriger das Alter ist; man braucht also die Lebenswahrscheinlichkeit der niedrigsten Altersstufen am wenigsten zu erhöhen.

Wenn freilich ein Versicherter das Alter 101 oder mehr erreichen sollte, so würde doch ein sehr geringer Unterschied in den Reserven entstehen; augenscheinlich ist nämlich $a'_{101} = a_{101} = 1$, also ist nach der ursprünglichen Tafel die Reserve $1 - \frac{1}{a_x}$, nach der neuen:

$$1 - \frac{1}{\alpha\,a_x}.$$

Will man eine neue Sterblichkeitstafel aufstellen, die bei gröfserer Sterblichkeit dieselbe Reserve giebt wie eine gegebene, so mufs man $\alpha < 1$ wählen.

Jetzt ist $\quad a_{99} = 1 + v\,p_{99}$, $a'_{99} = 1 + v\,p'_{99}$,

$$1 + v\,p'_{99} = \alpha\,(1 + v\,p_{99}),$$

also:

$$p'_{99} = \alpha\,p_{99} - \frac{1-\alpha}{v},$$

und weiter nach Formel (457):

$$p'_{98} = p_{98} - \frac{1-\alpha}{v\,\alpha\,a_{99}},$$

$$p'_{97} = p_{97} - \frac{1-\alpha}{v\,\alpha\,a_{98}},$$

u. s. w.

Hier entstände noch ein sehr geringer Unterschied der Reserven, wenn ein Versicherter 100 Jahr erreichte.

343. Fragen wir, was geschieht, wenn die Lebenswahrscheinlichkeiten nach einer Sterblichkeitstafel für alle Altersstufen mit demselben Faktor multiplicirt werden. Sei k dieser Faktor.

In der Formel (449) für die Leibrente wird jedes p mit k multiplicirt, und wir erhalten den neuen Wert der Leibrente:

$$a'_x = 1 + v\,k\,p_x + v^2\,k^2\,p_x\,p_{x+1} + v^3\,k^3\,p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2} + \cdots$$

Eine solche Veränderung der Lebenswahrscheinlichkeiten hat also auf den Wert der Leibrente und deshalb auch auf Prämie und Reserve denselben Einflufs, als wenn die Lebenswahrscheinlichkeiten unverändert blieben, aber v durch $v\,k$ ersetzt würde, ein Fall, den wir schon in No. 338 und 339 behandelt haben.

344. Ersetzt man v durch $\frac{v}{k}$, während man alle Lebenswahrscheinlichkeiten der Sterblichkeitstafel mit k multiplicirt, so bleibt hierbei a_x unverändert für jeden Wert von x, also ändert sich auch die Reserve nicht, die Prämien aber ändern sich, denn in den Formeln (450) und (451) kommt aufser a_x auch v vor, welches in $\frac{v}{k}$ übergeht.

Ersetzt man den Zins i durch i', also $1+i$ durch $1+i'$, $v = \frac{1}{1+i}$ durch $v' = \frac{1}{1+i'}$, dann ist $v' = v \cdot \frac{1+i}{1+i'}$.

Multiplicirt man zugleich die Lebenswahrscheinlichkeiten mit $\frac{1+i'}{1+i}$, so bleibt die Reserve unverändert.

Wenn man beispielsweise den Zinsfuſs 4 % durch 3 % ersetzt, also $v = \frac{1}{1.04}$ mit $\frac{103}{104}$ dividirt, so bleiben bei Multiplication aller Lebenswahrscheinlichkeiten mit $\frac{103}{104}$ die Reserven dieselben, während die Prämien aus zwei Gründen zunehmen, 1. wegen der Abnahme des Zinsfuſses, 2. wegen der Zunahme der Sterbenswahrscheinlichkeit.

Stellt man jetzt eine dritte Tafel mit noch höherer Sterblichkeit auf, aber derartig erhöhter — die Möglichkeit haben wir bewiesen — daſs, wenn man mit 3 % rechnet, die Reserve niedriger ist als bei der zweiten mit 3 %, so ist sie auch niedriger als bei der ersten Tafel mit 4 %; die Prämien sind indessen höher als bei der zweiten Tafel mit 3 % und also sicher noch höher als bei der ersten Tafel mit 4 %.

Wir constatiren also die Möglichkeit, daſs, wenn man mit einem niedrigen Zinsfuſs rechnet und mit einer Tafel, die eine groſse Sterblichkeit angiebt, hohe Prämien mit verhältnismäſsig niedriger Reserve verbunden sein können.

345. Um deutlich hervortreten zu lassen, daſs wir es hier nicht mit einer bloſsen Möglichkeit, sondern mit einer Thatsache zu thun haben, mit welcher die Praxis rechnen muſs, wollen wir die Veränderung der Lebenswahrscheinlichkeit noch auf andere Weise stattfinden lassen, nämlich so, daſs der (Netto-) Tarif der Jahresprämien bei jedem Alter um dieselbe Zahl erhöht werden muſs, eine Voraussetzung, die wenigstens näherungsweise zutreffen muſs, wenn Gesellschaften z. B. wegen einer höheren Sterbenswahrscheinlichkeit in den Tropen die Jahresprämie um eine constante Zahl erhöhen.

Nach Formel (423) ist

$$ {}_mV_x = \frac{P_{x+m} - P_x}{P_{x+m} + d}. $$

Bleibt der Zinsfuſs, also auch d ungeändert, wachsen aber P_x und P_{x+m} beide um dieselbe Zahl an, so bleibt der Zähler ungeändert; nimmt der Nenner zu, nimmt also der Bruch ab; eine für jedes Alter gleiche Erhöhung der Jahresprämie bedingt daher eine Abnahme der Reserve.

346. Mehr Wahrscheinlichkeit als eine für alle Altersstufen gleiche Zunahme der Jahresprämie hat eine für alle Altersstufen gleiche Zunahme der Sterbenswahrscheinlichkeit.

Sei das versicherte Kapital die Einheit, dann beträgt beim Ableben die eigentliche Auszahlung der Gesellschaft im ersten Jahr $1 - {}_1V$, im zweiten $1 - {}_2V$ u. s. w. Wollte man jetzt den Versicherten jedes Jahr für sein erhöhtes Risiko während dieses Jahres aufkommen lassen, dann würde diese Erhöhung mit jedem folgenden Jahr abnehmen. Will man aber diese Erhöhung jedes Jahr gleich machen, also die jährlich abnehmende Extra-Prämie auf eine jährlich gleiche zurückführen, so braucht man nur No. 266 nachzusehn, um zu erkennen, dafs diese gleichbleibende Extra-Prämie in der Regel zu einer negativen Extra-Reserve führen mufs, d. h. bei dem Übergang zu einer durchweg um gleichviel erhöhten Sterbenswahrscheinlichkeit nimmt die Prämie überall zu, die Reserve aber ab.

Das eine und das andere bestätigt, dafs, wie wir in No. 315 gesagt haben, in vielen Fällen Extra-Prämie für erhöhtes Risiko nicht verbunden zu sein braucht mit Extra-Reserve und erklärt z. B., wie es möglich ist, dafs die höheren Prämien nach der Northampton-Tafel in der Regel zu einer niedrigeren Reserve führen als die niedrigeren Prämien nach der Tafel der 17 englischen Gesellschaften.

Gewinn oder Verlust durch die Wahl der Sterblichkeitstafel.

347. Es sei die Rede von gemischter Versicherung, wozu wir hier auch die lebenslängliche rechnen. Wenn P, A und a die bekannte Bedeutung für Jahresprämie, einmalige Prämie, Leibrente haben, dann ist

$$A = 1 - \frac{i}{1+i}\,\mathrm{a}, \quad P = \frac{1}{\mathrm{a}} - \frac{i}{1+i},$$

folglich:

$$\mathrm{a} = \frac{1+i}{i}\,(1 - A),$$

also auch:

$$A = P \cdot \mathrm{a} = \frac{1+i}{i}\,P \cdot (1 - A). \qquad (458)$$

Sei nun die Wahl der Sterblichkeitstafel unrichtig und die Werte für a und A, welche der richtigen Tafel entsprechen, a' und A'.

Dann ist bei Zahlung der einmaligen Prämie im Augenblick des Abschliefsens der Gewinn für die Gesellschaft:

$$G = A - A',$$

nämlich Gewinn wenn $A > A'$,

Verlust wenn $A < A'$.

Bei Zahlung von Jahresprämien empfängt die Gesellschaft für die Versicherung P per Jahr, der genaue Wert der Leibrente ist

$$a' = \frac{1+i}{i}(1 - A'),$$

der richtige Wert aller Jahresprämien ist also:

$$P\,a' = \frac{1+i}{i}(1 - A') \cdot P.$$

Der gegenwärtige Wert (G') des Gewinns bei Zahlung von Jahresprämien ist am Anfang der Versicherung: der genaue Wert der Prämie, vermindert um den genauen Wert der Auszahlung, d. h. es ist

$$G' = P\,a' - A' = \frac{1+i}{i}(1 - A')\,P - A';$$

nach (458) ist aber:

$$0 = \frac{1+i}{i}(1 - A)\,P - A.$$

Durch Subtraction ergiebt sich:

$$G' = \frac{1+i}{i}(A - A')\,P + A - A';$$

substituirt man hierin $A - A' = G$, so erhält man:

$$G' = G + \frac{1+i}{i}\,G\,P.$$

Man sieht also, dafs bei derselben Versicherung der Gewinn, den die Gesellschaft durch die Wahl der Sterblichkeitstafel erwarten kann, bei Jahresprämie gröfser ist als bei einmaliger Prämie.

Nach Formel (458) ist jetzt $\frac{1+i}{i}P = \frac{A}{1-A}$, man hat deshalb:

$$G' = G + G \cdot \frac{A}{1-A} \text{ oder } G' = G \cdot \frac{1}{1-A},$$

und also:

$$G' = G \cdot \frac{1+i}{i} \cdot \frac{1}{a}. \qquad (459)$$

Rechnet man mit dem Zins 4 %, so ist

$$G' = G \cdot \frac{26}{a}.$$

Nach angestellten Versuchen ist bei einem Beitrittsalter von 30 Jahren das Verhältnis $\frac{G'}{G}$ ungefähr 1.5, von 50 Jahren ungefähr 2, und bei 60 Jahren beinahe 3. Dieses Verhältnis ändert sich aber einigermafsen mit Sterblichkeitstafel und Zinsfufs.

Die Abweichung der Sterblichkeit läfst also bei Zahlung von Jahresprämien auf die Dauer einen gröfseren Gewinn erhoffen (bezw. einen gröfseren Verlust befürchten), als bei Zahlung einmaliger Prämie, was man auch so ausdrücken kann: das mathematische Risiko ist rücksichtlich der Sterblichkeit bei Jahresprämie gröfser als bei einmaliger Prämie.

Mathematische Dauer der Versicherung.

348. Die verschiedenen Versicherungen auf den Todesfall, die eine Gesellschaft haben kann, lassen sich vom finanziellen Standpunkt in drei Gruppen teilen. Die Versicherung kann

1°. so lange laufen, dafs die Gesellschaft unter Einrechnung des Zinses gerade so viel empfangen hat, als sie auszahlen mufs,

2°. sie kann für die Gesellschaft vorteilhaft sein, indem die Auszahlung erst später stattfinden mufs,

3°. sie kann nachteilig sein.

Wir fragen jetzt: wie lange mufs die Versicherung gegen einmalige Prämie laufen, damit, wenn die Auszahlung stattfinden mufs, die Gesellschaft ohne Gewinn und Verlust abschneidet.

Um diese Anzahl von Jahren zu bestimmen, hat man die Gleichung:

$$A(1+i)^n = 1.$$

Diese Anzahl n von Jahren nennen wir die mathematische Dauer der Versicherung. Lebt der Versicherte länger, so ist das für die Gesellschaft vorteilhaft, lebt er weniger lange, so ist es der Gesellschaft nachteilig.

Fragen wir nun, welche Summe (S) nach derselben Anzahl n von Jahren die Jahresprämien ausmachen würden, wenn die Versicherung gegen eine Jahresprämie $P = \frac{A}{\mathfrak{a}}$ abgeschlossen wäre. Nach Formel (28) ergiebt sich:

$$S = P(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Substituirt man hierin $(1+i)^n = \frac{1}{A}$, dann ist:

$$S = \frac{1+i}{i} \cdot \left(\frac{P}{A} - P\right),$$

oder, wenn man hierin wieder

$$\frac{P}{A} = \frac{1}{a},\ P = \frac{1}{a} - \frac{i}{1+i},\ \frac{P}{A} - P = \frac{i}{1+i} \text{ setzt,}$$

$$S = \frac{1+i}{i} \cdot \frac{i}{1+i} = 1.$$

Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Eine lebenslängliche oder gemischte Versicherung, gegen einmalige Prämie abgeschlossen, mufs dieselbe Zeit (mathematische Dauer) laufen wie dieselbe Versicherung gegen Jahresprämie, damit die Gesellschaft weder Gewinn noch Verlust hat.

Wenn der Versicherte länger als diese Anzahl von Jahren lebt, so hat die Gesellschaft mehr Gewinn, wenn der Versicherte Jahresprämie zahlt, als wenn er einmalige Prämie gezahlt hätte, und zwar besteht das Plus aus den Prämien einschliefslich des Zinses, die nach der mathematischen Dauer noch eingehn. Stirbt der Versicherte aber eher, so hat die Gesellschaft mehr Verlust bei Jahresprämie als bei einmaliger Prämie, und zwar besteht der gröfsere Verlust aus den Jahresprämien einschliefslich des Zinses, die noch bis zum Ende der mathematischen Dauer zu erwarten waren.

Gleichwie in der vorhergehenden No. ergiebt sich auch aus dieser Betrachtung, dafs das mathematische Risiko, was die Sterblichkeit betrifft, bei Jahresprämie gröfser ist als bei einmaliger Prämie.

Bei Leibrenten besteht die mathematische Dauer in gegengesetztem Sinn; wenn die sämmtlichen aufgezinsten Auszahlungen den aufgezinsten Einlagen gleich sind, ist die mathematische Dauer durchlebt.

Bei Kapital-Versicherungen auf den Erlebensfall besteht sie aber nicht; hierbei ist für die einzelnen Versicherungen nie von Gleichspielen die Rede; die Versicherten, die bis zum Ende des Termins am Leben bleiben, sind der versichernden Gesellschaft nachteilig; diejenigen, welche vor diesem Termin sterben, sind der Gesellschaft vorteilhaft.

Bei temporärer Versicherung auf den Todesfall kann nur bei längerer Dauer der Versicherung von einer mathematischen Dauer die Rede sein,

diese besteht gewifs nicht, wenn die Dauer geringer ist als die mathematische Dauer bei lebenslänglicher Versicherung, oder selbst ihr gleich ist.

Gewinn oder Verlust durch den Zins.

349. Nehmen wir an, dafs die Gesellschaft mehr Zins erzielt als das vorausgesetzte i per Einheit, sagen wir $i+\sigma$.

Wenn die einmalige Prämie nach einer bestimmten Zeit (n Jahr) zu dem versicherten Kapital angewachsen ist, dann ist $A(1+i+\sigma)^n = 1$.

Jetzt fragen wir, zu welchem Betrag (T) die Jahresprämien für dieselbe Versicherung in derselben Zeit n angewachsen sein würden.

Wir haben:

$$T = P \cdot (1+i+\sigma)\frac{(1+i+\sigma)^n - 1}{i+\sigma};$$

und da $(1+i+\sigma)^n = \frac{1}{A}$, so ist

$$T = \frac{1+i+\sigma}{i+\sigma} \cdot \left(\frac{P}{A} - P\right).$$

Weiter ist $\frac{P}{A} - P = \frac{i}{1+i}$, also:

$$T = \frac{1+i+\sigma}{i+\sigma} \cdot \frac{i}{1+i} = \frac{i+i^2+\sigma i}{i+i^2+\sigma i+\sigma}.$$

Demnach ist $T < 1$; d. h. in der Zeit n, wo die gezahlte einmalige Prämie durch einen hohen Zins zur Versicherungssumme angewachsen ist, haben die kapitalisirten Jahresprämien für dieselbe Versicherung bei demselben Zins nicht die versicherte Summe erreicht.

Stirbt also ein gegen einmalige Prämie Versicherter und schneidet die Gesellschaft bei ihrem höheren Zins ohne Gewinn und Verlust ab, so würde sie, wenn dieselbe Versicherung gegen Jahresprämie abgeschlossen wäre, bei gleichzeitigem Ableben verlieren. Kommt andererseits die Gesellschaft bei einmaliger Prämie mit niedrigerem als dem vorausgesetzten Zins ohne Gewinn und Verlust davon, dann würde die Gesellschaft bei Jahresprämie für dieselbe Versicherung, wenn der Tod in demselben Alter erfolgt, gewinnen. Um Letzteres einzusehen, braucht man nur σ negativ zu nehmen, dann ist $T > 1$.

Entspricht die Sterblichkeit also genau der Sterblichkeitstafel, gewinnt die Gesellschaft aber auf ihren Zins, dann ist auf die Dauer der

Gewinn bei einmaliger Prämie gröfser als bei Jahresprämie. Dies kann man auch daraus einsehn, dafs bei einmaliger Prämie die Reserve immer viel höher ist als bei Jahresprämie. Ist der Zins dagegen niedriger als vorausgesetzt, so ist der Verlust bei einmaliger Prämie gröfser als bei Jahresprämie.

Umgekehrt wie bei der Abweichung der Sterblichkeit hat also die Abweichung des Zinses einen gröfseren Einfluſs auf einmalige Prämie als auf Jahresprämie, m. a. W. das mathematische Risiko ist, was den Zins betrifft, bei einmaliger höher als bei Jahresprämie.

Das jährliche mathematische Risiko.

350. Ist q die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Ereignis stattfinden wird, und macht man eine grofse Anzahl (s) von Versuchen, dann ist die wahrscheinlichste Anzahl von Malen, dafs das Ereignis stattfinden wird, qs, oder genauer gesagt, die ganze Zahl, welche qs am nächsten kommt.

Nun wird in der Regel die Anzahl von Malen, dafs das Ereignis bei s Versuchen stattfindet, mehr oder weniger im positiven oder negativen Sinn von qs abweichen, und der mittlere Wert der positiven Abweichungen ist bei s Versuchen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{sq(1-q)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{spq} \qquad (460)$$

oder nahezu $0.4\sqrt{spq}$, worin dann $1-q=p$ gesetzt ist.

Das heifst: wenn man eine sehr grofse Anzahl (n) Male s Versuche macht, die positiven Abweichungen bei allen n verschiedenen Gruppen von je s Versuchen addirt und die Summe mit n dividirt, so mufs man eine Zahl erhalten, welche $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{spq}$ sehr nahe kommt.

Ebenso grofs ist natürlich der mittlere Wert der negativen Abweichungen.

Diesen Satz, welchen wir der Wahrscheinlichkeitsrechnung entlehnen, wendet man auch auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten an. (Vergl. auch **Th. Wittstein,** Mathematische Statistik, und **E. Dormoy,** Théorie Mathématique des Assurances sur la vie.) Man versteht dann unter s die Anzahl von Personen, unter q die Sterbenswahrscheinlichkeit, sodafs qs die wahrscheinlichste Anzahl der von den s Personen im Laufe des Jahres sterbenden wird; die mittlere positive

Abweichung der Todesfälle wird dann durch Formel (460) angegeben, und diese Zahl nennt man hier das mathematische Risiko der Todesfälle.

Ist jetzt jede der s Personen während eines Jahres für ein Kapital S auf den Todesfall versichert, dann ist die wahrscheinlichste Auszahlung während dieses Jahres Ssq und die mittlere positive Abweichung der Auszahlung ist:

$$\frac{S}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{spq}. \tag{461}$$

Man kann dieselbe das mathematische Risiko der Auszahlungen während eines Jahres für die Gruppe von s Personen, mit gleicher Sterbenswahrscheinlichkeit q und mit gleichem versicherten Betrag S, nennen.

Aus der Formel ergiebt sich, dafs bei derselben Versicherungssumme per Person das mathematische Risiko der Quadratwurzel aus der Anzahl der Versicherten proportional zunimmt.

Wächst also die Zahl der Versicherten auf das vierfache, so wird das mathematische Risiko nur zweimal so grofs.

Hieraus folgt: mit der Zunahme des versicherten Betrages mufs zwar das Sicherheits-Kapital gröfser werden, aber viel weniger als proportional.

Anders ist es mit dem relativen Risiko der Auszahlungen, worunter wir das Verhältnis des mathematischen Risikos zu der wahrscheinlichen Auszahlung verstehn wollen, und welches also ist:

$$\frac{S}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{spq}}{Sqs} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{p}{qs}}. \tag{462}$$

das relative Risiko ist also umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Zahl der Versicherten. Sind die versicherten Kapitalien gleich, so ist das relative Risiko der Auszahlungen also unabhängig vom Kapital und dem relativen Risiko der Todesfälle gleich.

351. Sei jetzt das mathematische Risiko für die verschiedenen Gruppen der Reihe nach mit E_1, E_2, E_3 u. s. w. und das mathematische Risiko im Ganzen durch E bezeichnet, so werden wir als Grundsatz annehmen:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \ldots,$$

analog dem Satze von dem mittleren Fehler in der Methode der kleinsten Quadrate.

Seien jetzt s_x Personen x Jahr alt mit der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x, s_y Personen y Jahr alt mit Sterbenswahrscheinlichkeit q_y u. s. w., dann ist die wahrscheinlichste Anzahl von Todesfällen in einem Jahr:

$$s_x q_x + s_y q_y + s_z q_z + \ldots = \Sigma (s q),$$

das mathematische Risiko der Todesfälle ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{s_x p_x q_x + s_y p_y q_y + s_z p_z q_z + \ldots} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Sigma (s p q)} \qquad (463)$$

und das relative Risiko der Todesfälle, welches bei Gleichheit der versicherten Kapitalien auch das der Auszahlungen ist, beträgt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma (s p q)}}{\Sigma (s q)}. \qquad (464)$$

352. Um auf den Fall einzugehn, daſs die der Sterblichkeit Ausgesetzten auf verschiedene Beträge versichert sind, schreiben wir die Formel (461):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{s S^2 p q}.$$

Wir fassen zu einer Gruppe alle diejenigen zusammen, welche die Sterbenswahrscheinlichkeit q_1 haben und von denen ${}^1s_1$ auf den Betrag ${}^1S_1$, ${}^2s_1$ auf den Betrag ${}^2S_1$ u. s. w. versichert sein mögen, dann ist für die Gruppe das mathematische Risiko der Auszahlungen:

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{p_1 q_1} \cdot \sqrt{{}^1s_1 ({}^1S_1)^2 + {}^2s_1 ({}^2S_1)^2 + {}^3s_1 ({}^3S_1)^2 + \ldots} \qquad (465)$$

Ist das totale mathematische Risiko der Auszahlungen E, dann ist:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \ldots,$$

wir können also das ganze mathematische Risiko der Auszahlungen ausdrücken durch:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\Sigma (s . S^2 p q)},$$

und das relative Risiko durch:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma (s . S^2 p q)}}{\Sigma (s S q)}.$$

Nichts hindert indessen, für das mathematische Risiko der Auszahlungen zu schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\Sigma(S^2 p q)} \tag{466}$$

und für das relative Risiko der Auszahlungen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma(S^2 p q)}}{\Sigma(S q)}, \tag{467}$$

wo sich nunmehr die Summe über die Produkte $S^2 p q$ bezw. $S q$ für jede einzelne Versicherung erstreckt. Die Anzahl der Versicherungen ist hierbei immer als sehr grofs vorausgesetzt.

353. Das mathematische Risiko sowohl wie das relative Risiko ist am kleinsten bei gleicher Verteilung des versicherten Betrages über die Personen.

Haben nämlich n Personen (eine grofse Anzahl) dieselbe Sterbenswahrscheinlichkeit q, und sind sie versichert für die Beträge

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots S_n,$$

welche indes nicht alle verschieden zu sein brauchen, so ist das mathematische Risiko für die Gruppe:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \ldots + S_n^2)\, p\, q}. \tag{468}$$

Ist der ganze versicherte Betrag $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$ über die n Personen gleichmäfsig verteilt, ist also eine jede versichert auf einen Betrag:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n}{n},$$

dann ist das mathematische Risiko:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3 \ldots + S_n}{n}\right)^2 n p q}. \tag{469}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n)^2 = {} & S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \ldots + S_n^2 + \\ & + 2 S_1 S_2 + 2 S_1 S_3 + \ldots + 2 S_1 S_n + \\ & + 2 S_2 S_3 + \ldots + 2 S_2 S_n + \\ & + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Da aber bei Ungleichheit der S,

$$2 S_1 S_2 < S_1^2 + S_2^2, \quad 2 S_1 S_3 < S_1^2 + S_3^2 \text{ u. s. w.,}$$

ist

$$(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n)^2 < n (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \ldots + S_n^2),$$

$$\frac{(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n)^2}{n} < S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \ldots + S_n^2.$$

Der oben ausgesprochene Satz ist also bewiesen.

354. Denken wir uns den — in der Praxis allerdings niemals vorkommenden — Fall einer Versicherung auf den Erlebensfall für ein Jahr, dann braucht man, um das mathematische oder relative Risiko der Auszahlung zu finden, im Vorigen nur die Sterbenswahrscheinlichkeit q durch die Lebenswahrscheinlichkeit p zu ersetzen. Bei denselben Kapitalien und denselben Sterbenswahrscheinlichkeiten bleibt dabei offenbar das mathematische Risiko der Auszahlung (466) unverändert; dagegen wird das relative Risiko viel geringer sein, denn der Nenner von (467) geht über in $\Sigma (S p)$ und die Lebenswahrscheinlichkeit p ist, die allerhöchsten Altersstufen der Sterblichkeitstafel ausgenommen, viel gröfser als die Sterbenswahrscheinlichkeit. Diese Betrachtung wollen wir im Folgenden verwerten.

355. Wir fassen jetzt die Versicherungen ins Auge, die nicht in einem Jahr ablaufen, und für welche Reserve gebildet wird. Wir wissen bereits, dafs die jährliche Übertragung zur Reserve als eine Ausgabe der Gesellschaft zu betrachten ist. Auf diesen Punkt wollen wir jetzt noch einmal zurückkommen, um ihn näher zu erläutern.

Es handle sich um die Versicherung der Einheit auf den Todesfall, sie sei eine temporäre, lebenslängliche oder gemischte bei irgend einer Weise der Prämienzahlung. Am Anfang des Jahres sei für die versicherte Einheit eine Reserve V, am Ende, falls der Versicherte nicht gestorben ist, die Reserve V' vorhanden. Durch den Zins ist die Reserve V im Laufe des Jahres zu $(1 + i) V$ angewachsen. Für diejenigen, welche im Laufe des Jahres sterben, wird diese Summe $(1 + i) V$ frei, und es beträgt bei der Auszahlung die eigentliche Ausgabe der Gesellschaft $1 - (1 + i) V$, während sich dieselbe für jeden am Leben Gebliebenen (Vermehrung der Reserve) auf $V' - (1 + i) V$ beläuft. Ist jetzt die Sterbenswahrscheinlichkeit q, so ist für jede einzelne Versicherung, die am Anfang des Jahres besteht, am Ende des Jahres der Wert der Ausgabe nach der Sterblichkeitstafel:

$$[1 - (1 + i) V] q + [V' - (1 + i) V] p,$$

was sich sofort reducirt zu:

$$(1 - V')\,q + V' - (1+i)\,V.$$

Diese Formel läfst sich auch in folgender Weise deuten: für jeden Versicherten, er lebe oder sterbe, beträgt die Ausgabe: $V' - (1+i)\,V$, für jeden Sterbenden beträgt sie $1 - V'$. (Man vergleiche No. 256 und 259.)

Am Anfang des Jahres ist der Wert der Ausgabe für jede Versicherung:

$$\frac{1}{1+i}(1 - V')\,q + \frac{1}{1+i}\,V' - V.$$

Bei lebenslänglicher Versicherung auf den Todesfall gegen gleichbleibende Jahresprämie hat man, wenn x das Beitrittsalter, m die bisherige Dauer der Versicherung in Jahren bezeichnet:

$$q = 1 - \frac{l_{x+m+1}}{l_{x+m}},\quad V = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x},\quad V' = 1 - \frac{a_{x+m+1}}{a_x}.$$

Durch Substitution in den obigen Ausdruck, wird dieser mit Beachtung von Formel (171):

$$\frac{1}{a_x} - \frac{i}{1+i},$$

d. h. gleich der Jahresprämie.

Hierdurch wird also verificirt, dafs die Ausgabe, bedingt durch die Sterblichkeit und die Vermehrung der Reserve, durch die Prämie gedeckt wird.

356. Bei Versicherung der Einheit auf den Erlebensfall, betrage am Anfang des Jahres die Reserve V und am Ende im Erlebensfall V'. Beim Ableben wird jetzt am Ende des Jahres $(1+i)\,V$ frei, beim Überleben beträgt die Ausgabe $V' - (1+i)\,V$. Heifst die Sterbenswahrscheinlichkeit wieder q, dann beträgt für jede einzelne am Anfang des Jahres bestehende Versicherung am Ende des Jahres der Wert der Ausgabe:

$$[V' - (1+i)\,V]\,p - (1+i)\,V\,q,$$

was sich sofort reducirt auf:

$$V' - (1+i)\,V - V'\,q = V'\,p - (1+i)\,V.$$

Diese Formel läfst sich auch dahin interpretiren, dafs für jeden am Anfang des Jahres vorhandenen Versicherten die Ausgabe am Ende des Jahres $V' - (1+i)\,V$ beträgt, von jedem Sterbenden aber V' frei wird, oder auch: dafs für jeden Überlebenden die Ausgabe V' beträgt, von jedem am Anfang des Jahres vorhandenen Versicherten aber $(1+i)\,V$ frei kommt.

Am Anfang des Jahres ist der Wert der Ausgabe für jede Versicherung:

$$v \cdot V' p - V.$$

Versichert sich ein x-jähriger für die Einheit auf den Erlebensfall nach n Jahren gegen gleichbleibende Jahresprämie während dieser Zeit, dann ist nach m-jähriger Dauer der Versicherung (No. 253):

$$V = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+m-1}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}};$$

$$V' = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m+1}} \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+m}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}},$$

während die Lebenswahrscheinlichkeit

$$p = \frac{l_{x+m+1}}{l_{x+m}} \text{ ist.}$$

Substituirt man dies in den obigen Ausdruck, dann reducirt sich dieser zu $\frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}$, d. h. zur Jahresprämie.

357. Ist für die einzelne Versicherung S der versicherte Betrag, q die Sterbenswahrscheinlichkeit, V die Reserve per Einheit am Anfang, V' am Ende des Jahres, dann ergiebt sich sofort, dafs die wahrscheinlichste Gesammt-Ausgabe für dieses Jahr ist: bei Versicherung

$$\left.\begin{array}{ll} \text{auf den Todesfall:} & \Sigma\,[S(1-V')\,q] + \Sigma\,S[V' - (1+i)\,V] \\ \text{auf den Erlebensfall:} & \Sigma\,[S\,V'p] - \Sigma\,S[(1+i)\,V] \end{array}\right\}. \quad (470)$$

Zum Überfluſs sei noch darauf hingewiesen, daſs bei jeder Zahlungsweise der Prämien, temporäre und lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall mit gleichbleibender oder veränderlicher Auszahlung sowie auch gemischte Versicherung zu einer Gruppe vereinigt werden können.

Was das mathematische Risiko für dieses Jahr betrifft, so ist in Formel (470), wie aus der Sache selbst folgt, das von der Lebens- oder Sterbenswahrscheinlichkeit unabhängige Glied ohne Einfluſs. Darum ist Formel (466) das mathematische Risiko bei der Versicherung

$$\left.\begin{array}{ll} \text{auf den Todesfall:} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\Sigma\,[S^2(1-V')^2 p\,q]} \\ \text{auf den Erlebensfall:} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\Sigma\,[S^2 V'^2 p\,q]} \end{array}\right\}. \quad (471)$$

Aus den Formeln (470) und (471) ergiebt sich als das relative Risiko bei Versicherung
auf den Todesfall:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{\sqrt{\Sigma S^2 [(1-V')^2 p q]}}{\Sigma S[(1-V')q] + \Sigma S[V' - (1+i)V]} \\ \text{auf den Erlebensfall:} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{\sqrt{\Sigma [S^2 V'^2 p q]}}{\Sigma (S V' p) - \Sigma S[(1+i)V]} \end{array}\right\}. \qquad (472)$$

Es ist ersichtlich, dafs die Pensions-Versicherung zur Versicherung auf den Erlebensfall genommen werden kann, solange die Pensionszahlung noch nicht angefangen hat; man hat dann unter S den Wert zu verstehen, welchen die Pension beim Beginn der Pensionszahlung haben wird.

Gelten V und V' für die Leibrente 1, deren Zahlung schon begonnen hat und am Ende jedes Jahres fällig ist, so beträgt die Ausgabe der Gesellschaft für jeden Überlebenden: $1 + V' - (1+i)V$, nämlich die auszuzahlende Einheit der Leibrente plus der Vermehrung der Reserve, während von jedem Gestorbenen $(1+i)V$ frei kommt.

Hierdurch findet man leicht als die wahrscheinlichste Ausgabe bei der Leibrente:

$$\Sigma[c(1+V')p] - \Sigma[c(1+i)V],$$

worin c den jährlichen Rentenbetrag für die einzelne Versicherung bedeutet. Das mathematische Risiko stellt sich auf:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Sigma[c^2(1+V')^2 p q]}.$$

358. Wir wollen jetzt einen Fall von Versicherung für zwei Personen behandeln, nämlich den der Auszahlung beim ersten Ableben.

Ist die Sterbenswahrscheinlichkeit der beiden Personen q und q', so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Auszahlung stattfinden wird, $q + q' - q\,q'$; die Wahrscheinlichkeit, dafs keine Auszahlung stattfinden wird und also eine Vermehrung der Reserve stattfinden mufs, m. a. W. die Wahrscheinlichkeit, dafs beide am Leben bleiben werden, ist:

$$p\,p' = (1-q)(1-q') = 1 - (q + q' - q\,q').$$

Um also die wahrscheinlichste Ausgabe und das mathematische Risiko bei dieser Versicherungsweise zu berechnen, braucht man in den Formeln für die Versicherung einer Person auf den Todesfall nur q zu ersetzen durch $q + q' - q\,q'$. Genau genommen setzen aber die

Formeln voraus, dafs von jeder Alterscombination eine grofse Anzahl gleichzeitig beigetreten ist; weil aber eine solche grofse Anzahl bei Alterscombinationen viel weniger erreicht wird als bei einzelnen Altersjahren, so ist die Annäherung des mathematischen Risikos bei mehr Personen wieder weniger genau als bei einer.

359. Im zuletzt besprochenen Fall konnten wir die wahrscheinlichste Ausgabe noch ausdrücken durch eine Wahrscheinlichkeit $(q + q' - q\,q')$. Dies ist nicht überall möglich; z. B. hat man bei der Überlebensversicherung drei Fälle: 1. der Versorger stirbt vor dem Versorgten und Auszahlung findet statt; 2. der Versorgte stirbt vor dem Versorger und es wird Reserve frei; 3. beide bleiben am Leben und es findet Vermehrung der Reserve statt; der Wert der Ausgabe kann also nicht mehr durch eine Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden. Die Versicherungsweise mufs zugleich als eine Versicherung auf den Todesfall und als eine auf den Erlebensfall behandelt werden. Ist — für alle Versicherungen zusammen — P das mathematische Risiko der Auszahlung, Q das für das Freiwerden der Reserve, dann ist nach dem Grundsatz von No. 351, das ganze mathematische Risiko $\sqrt{P^2 + Q^2}$. Diese Andeutung möge hier genügen.

Ist für verschiedene Versicherungsweisen das mathematische Risiko E_α, E_β, $E_\gamma \ldots$ dann ist das mathematische Risiko für die Gesellschaft (immer für ein Jahr):

$$E = \sqrt{E_\alpha^2 + E_\beta^2 + E_\gamma^2 + \ldots}$$

360. Dieses mathematische Risiko deutet den durchschnittlichen Betrag an, welchen die Gesellschaft als Gewinn während eines Jahres erwarten darf oder den sie als Verlust durch die Weise des Ablebens fürchten mufs.

Wenn also die Sterblichkeit auf die Dauer ganz und gar der Sterblichkeitstafel entspricht, so deutet das mathematische Risiko den Betrag an, der jedes Jahr aus der Einnahme an Prämien und Zinsen zur Seite gelegt werden müfse, um so die möglichen Verluste zu bestreiten. In diesem Falle ist es aber sehr wahrscheinlich, dafs dann und wann der Verlust gröfser sein wird als das jährliche mathematische Risiko, und ist es zu empfehlen, aus dem Gewinne eine Risiko-Reserve zur Seite zu legen, um diese Verluste zu decken. Dieses mathematische Risiko wird sich jedes Jahr ändern, auch wenn in Procenten der Einnahmen ausgedrückt. Darum ist es unmöglich, schon im Voraus zu bestimmen, um wieviel Procente ein Tarif erhöht werden soll, damit es für die Abweichungen der Sterblichkeit decke.

Bei einer Gesellschaft, die sich immer mehr ausbreitet, kann man annehmen, dafs zwar das mathematische Risiko jedes Jahr zunimmt, — das ist unvermeidlich und thut keinen Schaden — deshalb nimmt aber das relative Risiko noch nicht zu. Je kleiner das relative Risiko, um so besser für die Gesellschaft. Man sieht indessen, dafs es viel mehr Arbeit kostet und viel schwerer ist, das mathematische Risiko zu bestimmen als die Prämien-Reserve. Und hierbei hat man noch nicht einmal mögliche Abweichungen des Zinses berücksichtigt, ein Punkt, über welchen sich so gut wie nichts sagen läfst. Darum ist es sehr schwer, eine feste Regel dafür aufzustellen, wie grofs das Sicherheitskapital bei einer Gesellschaft sein mufs und wie es mit der Ausbreitung der Gesellschaft zunehmen mufs. Die frühere Erfahrung mufs auch hier den Weg weisen.

Wo jedoch durch die Wahl der Sterblichkeitstafeln aus der Weise des Ablebens ein Gewinn zu erwarten ist — und das ist bei den meisten Gesellschaften der Fall —, da reicht der jährliche Gewinn in der Regel aus, das Risiko der zufälligen Abweichungen der Tafel zu decken, sodafs Verluste durch die Weise des Ablebens wenig stattfinden. Bei einer solchen Wahl der Sterblichkeitstafel ist gewissermafsen in der Netto-Prämie eine Abweichungs-Prämie mit einbegriffen.

361. Ich glaubte aus verschiedenen Gründen den Begriff des jährlichen mathematischen Risikos einführen zu müssen: der Begriff desselben ist nicht nur viel einfacher als der des Risikos für die ganze Dauer der Versicherung, sondern es giebt hinsichtlich des letzteren noch so viele verschiedene Meinungen, dafs man die Theorie desselben kaum in einem Lehrbuch resumiren könnte. Es schien mir dies um so weniger notwendig, nachdem auch das mathematische Risiko für die ganze Dauer sich jedes Jahr bei jeder Versicherung ändert.

Herr **R. Schönwiese** ist der Einführung des jährlichen mathematischen Risikos gefolgt (Österreichische Versicherungs-Zeitung XXIII. Jahrgang 1896), „weil es in Folge der vielen im Laufe der Jahre eintretenden Veränderungen in einem Versicherungsstock keinen Zweck habe, das Risiko zu berücksichtigen, das eine Versicherung später mit sich bringe. Ferner ist das Risiko am Anfange der Versicherung ein gröfseres und nimmt allmählig ab. Warum also spätere kleinere Risiken in Rechnung nehmen, wenn man die gröfseren der inzwischen neu geschlossenen Versicherungen aufser Acht lassen mufs? Endlich findet die Abrechnung der Gesellschaften jährlich statt, sie müssen darnach streben in jedem einzelnen Jahr ohne Verlust zu arbeiten und dürfen nicht auf künftigen Ausgleich jetzt Einbufsen auf sich nehmen.“

In seiner Studie: „Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung“ schliefst Dr. **Karl Wagner** sich dem von **Schönwiese** und mir in dieser Hinsicht Gesagten gänzlich an. In dieser Studie findet man eine Übersicht und eine meistens verneinende Kritik der verschiedenen Theorien, nebst einer ausführlichen Angabe der deutschen Litteratur über den Gegenstand.

Als die meist hervorragenden Autoren auf diesem Gebiet sind zu nennen: **Johann Nikolaus Tetens,** Einleitung zur Berechnung der Leibrente und Anwartschaften (1786); **Carl Bremiker,** Das Risiko bei Lebensversicherungen (1859); **Theodor Wittstein,** Mathematische Statistik und deren Anwendung auf National-Ökonomie und Versicherungs-Wissenschaft (1867), und Das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften sowie aller auf dem Spiele des Zufalls beruhenden Institute (1885). Die Theorie von **Wittstein** wurde von **Max. Mack** ausgearbeitet im „Assecuranz-Jahrbuch von Ehrenzweig“, XII. Jahrgang 1891 (Das Risiko bei Lebensversicherungen). Die Ansichten des Dr. **Karl Wagner** wurden von Dr. **J. H. Peek** in seiner in No. 34 genannten Abhandlung über diesen Gegenstand angefochten.

Ich glaubte, den Begriff des relativen Risikos einführen zu müssen wegen der einfachen Wahrheit, dafs ein Verlust von 10000 Mk. für den Besitzer einer Milliarde nicht in Betracht kommt, während er den Besitzer von 10000 Mk. gänzlich ruiniren würde. Dr. **F. Hausdorf** hat mir in dem Begriff der Relativa gefolgt im „Berichte der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig“ 1897 (Das Risiko bei Zufallspielen).

Man sehe auch: „Lebensversicherungs-Mathematik“ von **G. Bohlmann,** in der „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften“ und „Über Versicherungs-Mathematik“ von **Georg Bohlmann** in „Klein und Riecke: Über angewandte Mathematik und Physik“.

Maximum der einzelnen Versicherungssummen.

362. Auch ohne Mathematik läfst sich begreifen, dafs eine Lebensversicherungs-Gesellschaft keine Kontrakte mit allzu hoher Versicherungssumme abschliefsen kann, ohne sich grofsen Verlusten auszusetzen; viel schwerer ist es aber, die Grenze zu bestimmen, bis zu welcher eine Gesellschaft hierbei gehen kann. Bei der Bestimmung des Maximums sind verschiedene Ausgangspunkte denkbar.

Wir haben gesehen, dafs jede neue Versicherung das mathematische Risiko erhöht. Das ist nicht anders möglich und schadet nichts. Dagegen kann man fordern, dafs keine neue Versicherung angenommen werden darf, durch welche das relative Risiko zunehmen würde. Wir könnten dann in Formel (472) die neue Versicherung einführen und so das zulässige Maximum bestimmen; die Möglichkeit der Feststellung ist also constatirt. Doch wollen wir die Formel für diesen allgemeinen Fall nicht entwickeln, schon deshalb nicht, weil deren Anwendung ziemlich unhandlich sein würde.

Wir wollen aber die Methode auf die Versicherung auf den Todesfall anwenden, bei welcher jeder Versicherte jährlich eine Prämie zahlt, die seinem zunehmenden Alter entspricht, bei welcher also keine Reserve gebildet wird.

Wir wissen freilich, dafs diese Versicherungsweise nur selten vorkommt; immerhin wirft dieser Fall einiges Licht auf unsere Frage.

Das relative Risiko für die schon bestehenden Versicherungen ist nach Formel (467):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma\,[S^2\,p\,q]}}{\Sigma\,(S\,q)}.$$

Sei jetzt für eine neue Versicherung vom Betrage x die Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Jahres q', dann wird durch ihren Zutritt das relative Risiko für dieses Jahr:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma\,[S^2\,p\,q] + x^2 \cdot p'\,q'}}{\Sigma\,(S\,q) + x\,q'}.$$

Wenn durch die neue Versicherung das relative Risiko kleiner werden soll, so mufs sein:

$$\frac{\sqrt{\Sigma\,(S^2\,p\,q) + x^2\,p'\,q'}}{\Sigma\,(S\,q) + x\,q'} < \frac{\sqrt{\Sigma(S^2\,p\,q)}}{\Sigma\,(S\,q)}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$x < \frac{2\,\Sigma\,(S\,q) \cdot \Sigma\,(S^2\,p\,q)}{p'\,[\Sigma\,(S\,q)]^2 - q'\,\Sigma\,(S^2\,p\,q)}. \qquad (473)$$

Nehmen wir den sehr einfachen Fall, dafs wir nur mit Personen derselben Sterbenswahrscheinlichkeit, die alle zu demselben Betrage (α) versichert sind, zu schaffen haben.

Sei s die Zahl dieser Personen, so geht Formel (473) über in:

$$x < \frac{2\,\alpha\,s\,q \cdot \alpha^2\,s\,p\,q}{p\,\alpha^2\,s^2\,q^2 - q\,\alpha^2\,s\,p\,q},$$

$$\text{oder } x < \frac{2\alpha s}{s-1}, \text{ oder auch } x < \frac{2\alpha}{1-\frac{1}{s}}.$$

Die Anzahl der Versicherten s ist hier sehr groſs vorauszusetzen, sonst hätte die Betrachtung überhaupt keinen Sinn. Setzen wir daher $\frac{1}{s} = 0$, so ergiebt sich $x < 2\alpha$.

Bei gleicher Sterbenswahrscheinlichkeit und bei derselben Versicherungssumme per Person kann man also, ohne das relative Risiko zu erhöhen, eine Versicherung mit derselben Sterbenswahrscheinlichkeit und dem doppelten Betrage abschlieſsen. Will man bei den in der Praxis gebräuchlichen Versicherungsweisen das ausführliche Rechnen vermeiden, so darf man aus dem Vorhergehenden ruhig annehmen, daſs, selbst wenn die Gesellschaft im Allgemeinen durch die Weise des Ablebens keinen Gewinn erwarten kann, *das Doppelte des mittleren versicherten Betrages per Person* ein sehr sicheres Maximum ist.

363. Wo aber im Allgemeinen Gewinn erzielt wird durch die Weise des Ablebens sowie durch Zins und Zuschlag, da kann man weiter gehen, wie dies auch die meisten Gesellschaften thun. Es ist ratsam, auf den durchgehends erzielten Gewinn Rücksicht zu nehmen, z. B. auf den durchschnittlichen Gewinn während der fünf vorhergehenden Jahre, um der Gefahr zu entgehen, daſs eine einzelne neue Versicherung durch ihren unglücklichen Ausgang den wahrscheinlichen Gewinn gröſstenteils oder gänzlich aufzehrt.

Übrigens können allerlei Gründe dafür sprechen, daſs eine Gesellschaft Personen aus gewissen Berufs- oder Gesellschaftskreisen sowie aus gewissen Gegenden eher zu einem hohen Betrage versichert als andere, und daſs sie da am vorsichtigsten ist, wo nach ihren Erfahrungen verhältnismäſsig die meisten Todesfälle mit hohen Beträgen hinfielen. Hierbei ist auch die Art der Versicherung, die Dauer und die Weise der Prämienzahlung nicht gleichgültig. Das Maximum kann höher sein bei lebenslänglicher als bei temporärer Versicherung auf den Todesfall, höher bei einmaliger als bei Jahres-Prämie, höher bei Versicherung auf den Erlebens- als auf den Todesfall.

Es versteht sich aber von selbst, daſs von allem diesem nur die Rede sein kann bei einer Gesellschaft, die schon einige Jahre bestanden hat. Eine anfangende Gesellschaft bestimmt zuerst ziemlich aufs Geratewohl ein Maximum, nur daſs sich dasselbe nach dem Sicherheitskapital richten wird, soweit ein solches vorhanden ist. Sind aber z. B.

zehn Jahre vergangen, so kann man die oben erwähnten Principien anwenden und zusehn, ob eine Erhöhung des Maximums wünschenswert ist, oder ob es vielleicht für die Gesellschaft vorteilhafter wäre, ihr Maximum niedriger zu stellen und ihre Kraft in Versicherungen zu niedrigem Betrage zu suchen.

364. Etwaige Gegner meiner Theorie über das Maximum der Versicherungssumme bitte ich im Auge zu behalten, daſs es zwei gänzlich verschiedene Standpunkte giebt: entweder man kann die Forderung stellen, daſs jede neue Versicherung die Bonität der Gesellschaft erhöhe und ihre finanzielle Lage verbessere (in welchem Falle man den Maximumbetrag suchen wird, wobei dies noch der Fall ist), oder man kann sich mit einem Maximum zufrieden geben, welches der Gesellschaft nicht gefährlich sein kann. Bei meiner Theorie habe ich ersteren Standpunkt eingenommen, ohne darum anderen Betrachtungen ihre Berechtigung abzusprechen. Ich glaube, daſs hiermit jeder scheinbare Widerspruch in meinen Auseinandersetzungen zu erklären ist.

Was die Praxis betrifft, sehe man an erster Stelle einen Aufsatz von Dr. **Thomas Bond Sprague** im „Journal of the Institute of Actuaries“ XIII. Teil: On the Limitation of Risks; being an Essay towards the Determination of the Maximum Amount of Risk to be retained by a Life Insurance Company on a Single Contingency.

Auf dem Londoner Congreſs (1898) habe ich eine Übersicht gegeben der mathematischen Theorien über den Gegenstand: Aperçu succinct des Théories du Plein de l'Assurance. Ich hatte damals an erster Stelle zu erwähnen **Hermann Laurent:** (1. Journal des Actuaires français, Teil II 1873, 2. Traité du Calcul des Probabilités, 3. Théorie et pratique des Assurances sur la vie); einen Aufsatz von Dr. **G. J. D. Mounier:** Iets over Risicoreserve im Holländischen „Archief voor de verzekeringswetenschap“; einen Artikel in den „Papers and Transactions of the Actuarial Society of America“ von **M. Clayton C. Hall:** A Method of Measuring the Maximum Amount which an Insurance Company may properly assume upon a single risk; weiter die Inaugural-Dissertation von Dr. **H. Onnen:** Het Maximum van Verzekerd Bedrag und die mehr genannte Dissertation von Dr. **J. H. Peek;** übrigens gab ich meine eigenen Gedanken über den fraglichen Gegenstand. Die oben erwähnten Abhandlungen von **R. Schönwiese** und des Dr. **F. Hausdorf** sind erst später erschienen.

Rückversicherung bei eigener Verwaltung der ganzen Reserve.

365. Wenn einer Gesellschaft eine Versicherung angeboten wird, deren Versicherungssumme über ihr festgesetztes Maximum hinausgeht, so wird sie in vielen Fällen diese höhere Versicherung annehmen, den Betrag aber, um welchen das Maximum überschritten wird, bei anderen Gesellschaften versichern. Zumeist läfst man diesen rückversicherten Betrag unverändert, sodafs die rückversichernden Gesellschaften ihre eigene Reserve bilden, die dann die rückversicherte Gesellschaft von der totalen Reserve der Hauptversicherung subtrahirt. Dieses Verfahren wird aber nicht immer angewendet. (Man vergleiche die Statuten des Vereins Deutscher Lebensversicherungs-Gesellschaften, gegründet im Jahre 1869.)

Wir setzen voraus, dafs die Gesellschaft eine Versicherung von 15000 M. abgeschlossen hat, wovon sie 10000 M. für eigene Rechnung behält. Die übrigen 5000 M. versichert sie bei einer anderen Gesellschaft, jedoch mit der Bedingung, dafs sie die Reserve selbst formirt und künftig jedes Jahr nur soviel rückversichert, dafs die rückversicherte Summe mit deren Reserve zusammen 5000 M. beträgt. Die Gesellschaft hat dann eine mit den Jahren veränderliche Rückversicherungsprämie zu zahlen, die sowohl von dem zunehmenden Alter des Versicherten wie von der vorhandenen Reserve abhängig ist, m. a. W. sie zahlt jährlich die Risiko-Prämie.

Was dem einzelnen Versicherten gegenüber nach No. 260 so gut wie unmöglich wäre, ist bei einer Gesellschaft der anderen gegenüber nicht nur möglich, sondern geschieht sogar sehr oft.

366. Indessen hat Herr Dr. **M. C. Paraira** in der Versammlung vom 17. Mai 1893 des Vereins der Mathematiker bei niederländischen Lebensversicherungs-Gesellschaften noch ein anderes Verfahren vorgeschlagen, welches Erwägung verdient.

Eine Gesellschaft, bei der das Maximum der Versicherungssumme per Person auf 10000 M. festgesetzt ist, nimmt eine Versicherung zum Betrage von 15000 M. an; nun versichert sie jedes Jahr soviel bei anderen Gesellschaften, dafs die rückversicherte Summe und die Reserve für die 15000 M. zusammen 5000 M. betragen. Sobald aber die Reserve 5000 M. übersteigt, behält die Gesellschaft die Versicherung ganz für eigene Rechnung.

Bei diesem Verfahren behält die Gesellschaft, welche die Versicherung abschliefst, soviel wie möglich (nach unserem Dafürhalten aber

doch nicht zu viel) für eigene Rechnung; sie giebt weniger an Rückversicherungsprämie aus wie bei dem vorerwähnten Verfahren; in beiden Fällen ändert sich aber die Prämie von einem Jahr zum anderen.

Mit dem Formiren von Reserve hat sich die rückversichernde Gesellschaft in keinem der beiden Fälle zu befassen, dies ist ganz und gar Sache der rückversicherten Gesellschaft, die sich jedes Jahr nur versichert für das allzu hohe Risiko während dieses Jahres.

Natürlich wird die in den einzelnen Jahren zu zahlende Prämie schon bei Beginn des Vertrages von den Gesellschaften voraus bestimmt; im Falle des Rückkaufs hat die rückversichernde Gesellschaft nichts zu zahlen.

Die Minimum-Anzahl von Versicherten.

367. Die kleinste Anzahl von Versicherten auf den Todesfall, mit welcher eine Gesellschaft anfangen kann, ist ziemlich willkürlich; dennoch läfst sich wohl darüber etwas sagen: die durchschnittliche Sterbenswahrscheinlichkeit der Versicherten kann man auf 2% per Jahr veranschlagen. Sind jetzt 50 Versicherte vorhanden, so kann man einen Todesfall im ersten Jahre erwarten, stirbt aber nur einer mehr, so ist die Sterblichkeit schon doppelt so grofs als die erwartungsmäfsige. Eine Anzahl von weniger als 50 wäre also geradezu Thorheit, und selbst 50 ist sehr gefährlich. Gewöhnlich spricht man von 500 als unterer Grenze (diese Zahl ist fast traditionell). Stirbt bei dieser Zahl einer mehr als man erwarten konnte, so ist die Sterblichkeit erst um 10% zu hoch.

Gewinn oder Verlust durch die Weise des Ablebens, der Verzinsung u. s. w.

368. Schon früher haben wir darauf aufmerksam gemacht, dafs eine für die Gesellschaft vorteilhafte Sterblichkeit öfters verbunden sein kann mit einer nachteiligen Auszahlung und umgekehrt. Dies wäre schon möglich, wenn nur Versicherungen für ein Jahr abgeschlossen würden, weil eine grofse Sterblichkeit unter den hoch Versicherten mit einer geringen Sterblichkeit unter den niedrig Versicherten zusammentreffen kann.

Noch mehr ist dies möglich bei Versicherungsweisen, für welche Reserve gebildet wird. Denn die Sterblichkeit kann unter lang Versicherten, für die schon viel Reserve vorhanden ist, gering sein, dagegen grofs unter den kurz Versicherten, für welche noch wenig oder gar

keine Reserve gebildet ist. Unter Gewinn versteht man den Uberschufs der Einnahme an Prämie und Zinsen über die Auszahlungen, die notwendigen Unkosten und die angemessenen Übertragungen zur Reserve. Wenn in einem Jahr die Einnahme nicht ausreicht, um sowohl die Auszahlungen und Unkosten zu bestreiten, als auch die Reserve so hoch zu halten, wie man soll, so hat man mit Verlust gearbeitet.

Betrachten wir zunächst die Versicherung mit Auszahlung auf den Todesfall und die gemischte Versicherung für eine oder mehr Personen einer Gruppe, die sich früher gleichzeitig in demselben Alter oder derselben Alterscombination in derselben Weise und gegen dieselbe Art der Prämien-Zahlung versichert haben, nur dafs die Versicherungssummen verschieden sind. Sei am Anfang eines Jahres der totale versicherte Betrag S, die am Anfang des Jahres per Einheit gezahlte Reserve-Prämie P, die Reserve per Einheit am Ende des vorhergehenden Jahres V, am Ende des Jahres für jede Versicherung, die noch besteht, V' per Einheit; die Auszahlungswahrscheinlichkeit sei q, indem wir $1 - q = p$ setzen. Am Ende des vorhergehenden Jahres war für die Gruppe $S \cdot V$ an Reserve vorhanden; hierzu kommt am Anfang des Jahres an Reserve-Prämie $S \cdot P$. Wenn der vorausgesetzte Zins per Einheit i ist, so sind dann Reserve und Prämie am Ende des Jahres angewachsen zu

$$S \cdot (V + P)(1 + i).$$

Von dieser Summe mufs die Auszahlung für die Gruppe bestritten und die Reserve zur Seite gelegt werden. Wir wollen diese Auszahlung am Ende des Jahres stattfindend voraussetzen.

Findet jetzt die Auszahlung nach den angenommenen Tafeln statt und ist die Sterblichkeit gleichmäfsig über hoch und niedrig Versicherte verteilt, so beträgt die Auszahlung für die Gruppe $q\,S$, und es bleibt ein Betrag (für die Überlebenden) $S - q\,S$ übrig, wofür am Ende des Jahres die Reserve $(S - q\,S)\,V' = p\,S\,V'$ sein mufs. Auf diese Weise hat man die Gleichung:

$$S(V + P)(1 + i) = q\,S + p\,S\,V'. \qquad (474)$$

Wenn aber weder Zins noch Auszahlung den angenommenen Grundlagen und der gleichmäfsigen Verteilung entsprechen, der erzielte Zins $i + \sigma$ ist statt i, die Auszahlung U statt $q\,S$, so mufs am Ende des Jahres $(S - U)\,V'$ reservirt werden, und für die Gruppe ist ein Gewinn oder Verlust entstanden vom Betrage:

$$G = S(V + P)(1 + i + \sigma) - U - (S - U)\,V'.$$

Substituirt man hierin die Gleichung (474), so ergiebt sich:

$$G = S(V + P)\sigma + (qS - U)(1 - V'). \qquad (474^*)$$

369. Ist $U = qS$, dann tritt durch die Weise des Ablebens weder Gewinn noch Verlust ein und der Gewinn ist einfach durch den Zins bedingt, nämlich:

$$G = S(V + P)\sigma,$$

er ist also negativ, d. h. Verlust, wenn σ negativ ist.

Ist aber $\sigma = 0$, dann entsteht Gewinn oder Verlust nur durch die Art des Ablebens, und zwar im Betrage:

$$G = (qS - U)(1 - V'). \qquad (475)$$

Das erste Glied der Formel (474*) deutet also den Gewinn aus dem Zins, das zweite den aus der Sterblichkeit an. Die Formel (475) hätten wir direkt hinschreiben können. Handelt es sich nämlich um eine Versicherung während eines Jahres und ist die Versicherungssumme S, die Auszahlungswahrscheinlichkeit q, dann wird, wenn keine Abweichung stattfindet, die Auszahlung qS betragen; beträgt jedoch die Auszahlung nur U, so ergiebt sich ein Gewinn: $qS - U$. Da nun aber von einer Versicherungsweise die Rede ist, bei welcher am Ende des Jahres für jeden Überlebenden eine Reserve vorhanden ist, eine Reserve vom Betrage V' per Einheit, so stellt sich die Auszahlung per Einheit für die Gesellschaft nur auf $1 - V'$ (No. 259), der Gewinn beträgt also nur $(qS - U)(1 - V')$.

Die Formel (475) kann man auch auf die einzelnen Versicherungen anwenden, wenn man für jede Versicherung, die noch besteht, $U = 0$ und für jede Versicherung, die ausgezahlt ist, $U = S$ nimmt. Durch jede Versicherung, die noch besteht, für sich genommen, ist ein Gewinn vom Betrage $qS_1(1 - V')$ entstanden, durch jede Versicherung aber, für welche eine Auszahlung stattgefunden hat, ein Verlust $pS_2(1 - V')$ (siehe auch No. 355). Die Gröfsen S haben wir hier durch Indices unterschieden, weil die versicherten Kapitalien gewöhnlich nicht gleich sind.

Summirt man jetzt den Gewinn aus allen Versicherungen, für die keine Auszahlung stattgefunden hat, und den Verlust aus allen Versicherungen, für welche Auszahlung stattgefunden hat, dann ergiebt der Vergleich beider Summen, ob Gewinn oder Verlust durch die Weise des Ablebens eingetreten ist.

370. Bei Versicherung einer Person auf den Todesfall und also auch bei gemischter Versicherung bedeutet q die Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Jahres; wenn bei gemischter Versicherung die

bestimmte Anzahl von Jahren abgelaufen ist, dann mufs die Auszahlung stattfinden, gleichgültig, ob der Versicherte noch lebt, oder ob er im letzten Jahre gestorben ist, die Auszahlung veranlafst dann weder Gewinn noch Verlust, weil $V' = 1$ ist. Bei Versicherung auf das erste Ableben einer Person aus einem Paar ist q die Wahrscheinlichkeit, dafs von den zwei Personen wenigstens eine im Jahre sterben wird. Bei Versicherung für Auszahlung beim letzten Ableben zweier Personen hat q vor und nach dem ersten Ableben verschiedene Bedeutung, die man leicht finden kann. Bei dem Überlebenskapital deutet q die Wahrscheinlichkeit an, dafs während eines Jahres der Versorgte den Versorger überleben wird. Die Formeln gelten auch für Überlebensrenten, wenn man nur S entsprechend auffafst. Ist das Alter der Frau am Anfang des Jahres y, die versicherte jährliche Pension α, dann ist $S = \alpha \cdot a_{y+1}$, während q dieselbe Bedeutung hat wie beim Überlebenskapital; bei Überlebensrente hat S also einen veränderlichen Wert.

Je kürzer bei derselben Versicherung die Zeit der Prämien-Zahlung festgesetzt wird, desto gröfser ist die Reserve, also $1 - V'$ desto kleiner; hieraus ergiebt sich sofort, dafs unter sonst gleichen Verhältnissen der Gewinn oder der Verlust durch die Weise des Ablebens kleiner ist, je kürzere Zeit die Prämien-Zahlung dauert. Der Gewinn oder der Verlust ist also am geringsten bei Zahlung einmaliger Prämie. Das mathematische Risiko ist demnach bei einmaliger Prämie kleiner als bei Jahresprämie, und die Ergebnisse von No. 347 werden hier auf ganz anderem Wege bestätigt. Was sich dort für den Verlauf vieler Jahre ergab, bestätigt sich hier für jedes einzelne Jahr. Dasselbe kann man auch aus Formel (470) ableiten, denn es ist deutlich, dafs bei Zahlung einmaliger Prämie sowohl $1 - V'$ wie auch $V' - (1+i)\,V$ kleiner ist als bei Zahlung von Jahresprämie: $1 - V'$, weil bei einmaliger Prämie V' gröfser ist als bei Jahresprämie, $V' - (1+i)\,V$, weil im Laufe eines Jahres bei einmaliger Prämie die Reserve V zu V' anwächst durch Zins und Lebenswahrscheinlichkeit, bei Jahresprämie aber aufserdem durch Prämie, die Zunahme der Reserve per Person also bei Jahresprämie gröfser ist als bei einmaliger Prämie. Bei Zahlung von Jahresprämie ist diese Zunahme $A_{(m+1)} - (1+i)\,A_{(m)} + [1+i)\,a_{(m)} - a_{(m+1)}]\,P$; das zweite Glied, welches offenbar positiv ist, fällt weg bei Zahlung einer einmaligen Prämie.

371. Wir kommen jetzt zur Versicherung auf den Erlebensfall. Es handle sich wieder um eine Gruppe gleichzeitig in demselben Alter Beigetretener, die das versicherte Kapital nach derselben Zeit im Erlebensfall ausgezahlt haben wollen; die Zahlen V, S, V' und P behalten

ihre frühere Bedeutung, q sei wieder die Sterbenswahrscheinlichkeit, also $q\,S$ der Betrag, der nach der Sterblichkeitstafel durch das Absterben in Wegfall kommt.

Nun mufs für unsere Gruppe offenbar $S(V+P)(1+i)$ die Reserve für das Kapital $p\,S$ bilden, welches nach der Sterblichkeitstafel übrig ist; man hat also die Gleichung:

$$S(V+P)(1+i) = p\,S\,V'. \qquad (476)$$

Erzielt aber die Gesellschaft den Zins $i+\varrho$ und ist U statt $q\,S$ an Kapital verfallen, sodafs die Reserve am Ende des Jahres $(S-U)\,V'$ beträgt, dann bleibt am Ende des Jahres

$$G = S(V+P)(1+i+\sigma) - (S-U)\,V' \text{ übrig.}$$

Substituirt man hierin (476), so ergiebt sich:

$$G = S(V+P)\,\sigma + (U-q\,S)\,V'. \qquad (477)$$

Wird nur gefragt nach Gewinn oder Verlust aus der Weise des Ablebens, so nimmt man $\sigma = 0$ und erhält:

$$G = (U-q\,S)\,V'. \qquad (478)$$

Man hat also hier nur dann einen Gewinn, wenn $U > q\,S$, d. h. wenn durch Ableben mehr versicherter Betrag verfallen ist als der Sterbenswahrscheinlichkeit entspricht, gerade das Gegenteil wie im vorhergehenden Fall, eine Thatsache, die auch unmittelbar aus der Sache selbst zu folgern ist. Hier aber ist bei gleicher Sterblichkeit der Gewinn (und ebenso das mathematische Risiko) gröfser bei einmaliger als bei jährlicher Prämie.

Für jede einzelne Versicherung ist $U = 0$, wenn der Versicherte am Leben bleibt, und $U = S$, wenn er stirbt. Man kann deshalb sagen: die Gesellschaft hat an jedem einzelnen Versicherten, der am Leben bleibt, einen Verlust $q\,S_1\,V'$ und an jedem Versicherten, der stirbt, einen Gewinn $p\,S_2\,V'$; indem man alle einzelnen Gewinne und Verluste summirt, zeigt sich schliefslich, ob bei dieser Versicherungsweise aus dem Ableben Gewinn oder Verlust erwachsen ist.

372. Wie gesagt, bedeutet V' die Reserve (per Einheit) am Ende des Jahres. Bei ihrer Berechnung kann man die Prämien-Zahlungen, welche in die erste Hälfte des Jahres fallen, auf den Anfang, diejenigen, welche auf die zweite Hälfte fallen, auf das Ende des Jahres verlegt denken. Ähnlich kann man mit den im Laufe des Jahres Beigetretenen verfahren, sodafs die in der zweiten Hälfte des Jahres Zugetretenen

für das erste Jahr ganz aufser Betracht bleiben. Die Ausgetretenen können für das ganze Jahr oder überhaupt nicht in Betracht gezogen werden, je nachdem ihre Policen in der zweiten oder ersten Hälfte des Jahres anullirt worden sind.

373. Auf diesem Wege den Gewinn oder Verlust aus der Weise des Ablebens zu bestimmen ist indessen eine Arbeit, die noch umständlicher ist als die Berechnung der Reserve. Darum ist es ratsam, einen anderen Weg einzuschlagen und nach der folgenden Vorschrift zu verfahren, die keines Beweises bedarf.

Man nehme die totale Reserve am Ende des vorhergehenden Jahres, füge den Teil der Prämien (Reserve-Prämien) hinzu, der für die eigentliche Versicherung bestimmt wurde, lasse das Ganze den gesetzten Zins eintragen und subtrahire von dem Resultate die Summe der Auszahlungen, der Rückkaufssummen und der Reserve am Ende des Jahres. Die Differenz bildet dann den Gewinn, der durch die Weise des Ablebens, durch die Anullirungen und Rückkäufe zusammen entstanden ist.

Sind die Anullirungen und Rückkäufe nicht zahlreich, so kann man den Gewinn, der dadurch entstanden ist, für sich gesondert berechnen und von dem Ganzen subtrahiren, um alsdann rein den Gewinn durch Ableben übrig zu behalten.

Was das Bestimmen der Prämie betrifft, insoweit sie für die eigentliche Versicherung bestimmt ist, mufs man sich zur Vermeidung allzugrofser Weitläufigkeiten mit einer Annäherung begnügen. So wird man bei jeder gut eingerichteten Gesellschaft verzeichnet finden, welche jährliche Einnahme an Reserve-Prämie man von dem Betrag erwarten kann, der am Ende des vorhergehenden Jahres versichert war, und wie grofs die am Ende des Rechnungsjahres zu erwartende Prämien-Einnahme ist; das Mittel aus beiden Gröfsen, vermehrt um die im Laufe des Jahres eingenommenen einmaligen Netto-Prämien, läfst sich dann als die Prämien-Einnahme ansehn. Man setze voraus, dafs der Prämien-Empfang durchschnittlich mitten im Jahre stattfindet und ebenso die Auszahlungen und Rückkäufe. Ist jetzt die totale Reserve am Ende des vorhergehenden Jahres V, die totale taxirte Prämien-Einnahme P, die Auszahlungssumme U, die Rückkaufssumme R, die totale Reserve am Ende des Jahres V', der vorausgesetzte Zins i per Einheit, so hat man als Gewinn:

$$V(1+i)+P(1+\tfrac{1}{2}i)-(U+R)(1+\tfrac{1}{2}i)-V'.$$

Wo man nicht mit Netto-Prämie, sondern mit einer Reserve-Prämie rechnet, die auf die ersten Unkosten Rücksicht nimmt, und wo P also die taxirte Reserve-Prämie bedeutet, wie sie vom zweiten Jahre an gezahlt wird, da hat man die Zahl P allzu grofs genommen und thäte am besten, die Hälfte der ersten Unkosten der neuen Versicherungen davon zu subtrahiren.

Wir haben hier die Versicherungsweisen nicht auseinander gehalten, und man kann auch wirklich alle Versicherungen zusammenfassen, wenn man nur das Gesammtresultat im Auge hat; es hat aber für eine Gesellschaft doch auch sein Interesse zu wissen, wie sich der Gewinn auf die verschiedenen Rubriken verteilt. So kann man 4 Arten unterscheiden: 1° Versicherung auf den Todesfall und gemischte für eine oder mehr Personen; 2° Kapitalversicherung auf den Erlebensfall, Pensionsversicherung und sofort beginnende Leibrente; 3° Witwen-Kapital und -Pension (sobald bei den letzteren der Versorger stirbt, betrachtet man den ganzen Wert der Pension als Passivum und bringt die Versicherung unter 2°), 4° Waisenpension und Ausstattungsversicherung, wo die Prämie bis zum Tode eines Versorgers gezahlt wird.

Ein solcher Unterschied ist nützlich, weil bei 1° eine niedrige, bei 2° eine hohe Sterblichkeit im Interesse der Gesellschaft liegt, während bei 3° und 4° niedrige oder hohe Sterblichkeit für Versorger und Versorgte zugleich wenigstens angenähert dasselbe Ergebnis haben können.

Die gesetzlich vorgeschriebene Öffentlichkeit.

374. Mehrere Regierungen legen den Gesellschaften bestimmte Staaten zur Ausfüllung vor, damit sie auf diese Weise Auskunft geben über ihren Geschäftsgang. Es ist kaum möglich, der verschiedenen Vorschriften aller Regierungen hier Erwähnung zu thun. Dennoch erscheint es nicht überflüssig, wenigstens mittels eines Beispiels zu zeigen, welche Ziffern von dem mathematischen Bureau einer Gesellschaft verlangt werden können, um den Gewinn oder den Verlust näher zu beleuchten. Ich wähle die Vorschriften der österreichischen Regierung, welche ich zur Hand habe und gebe dieselben ohne irgend welche Kritik, ohne jedoch zu verschweigen, dafs sie jedenfalls lehrsam sind.

Die von dem mathematischen Bureau einzufüllenden Staaten sind vier an der Zahl.

I. Stand der directen Kapitalversicherungen (ohne Abzug der Rückversicherungen) am Schlusse des Rechnungsjahres nach Operationsgebieten.

Operationsgebiete.

1. Inland,
2. Länder der ungarischen Krone,
3. Ausland und zwar (jedes Land separat):

Direct abgeschlossen in Summe.
In Rückversicherung genommen.
Zusammen.
Hiervon in Rückversicherungen gegeben.
Verbleiben für eigene Rechnung.

Die verschiedenen Versicherungen sind wie folgt eingeteilt:

Todesfallversicherungen.
Gemischte Versicherungen (einschliefslich Kapitalversicherungen mit eventuell zweimaliger Auszahlung).
Erlebensversicherungen (einschliefslich garantirte Associationen).
Summe der Kapitalversicherungen.

Für jedes Operationsgebiet und für jede der genannten Versicherungsarten sind nachstehende Daten anzuführen:

Policen, Versicherungssumme, Prämienreserve.

II. Nachweisung zur Bildung der Prämienreserve.

Versicherungskombinationen nach Hauptgruppen.

1. Kapitalversicherung auf den Todesfall.
2. Gemischte Kapitalversicherungen (einschliefslich Kapitalversicherungen mit eventuell zweimaliger Auszahlung).
3. Kapitalversicherungen auf den Erlebensfall (einschliefslich garantirte Associationen).

Sämmtliche Kapitalversicherungen.

4. Rentenversicherungen und zwar auf:
   a) unmittelbare Leibrente;
   b) aufgeschobene Rente;
   c) Invaliditätsrente;
   d) combinirte Invaliditäts- und Altersrente;
   e) Überlebensrente.

Sämmtliche Rentenversicherungen.

5. Gegenversicherungen.
6. Zeichnerversicherungen.

Summe aller Versicherungskombinationen.

Zu jeder der Rubriken 1—6 sind nachstehende Daten anzuführen:

Prämienreserve am Schlusse des Vorjahres (ohne Prämienübertrag auf das folgende Rechnungsjahr).

Bruttoprämie für das Rechnungsjahr (Bruttoprämie, einschliefslich Prämienübertrag des Rechnungsjahres, abzüglich Prämienübertrag auf das folgende Rechnungsjahr).

Dem Versicherten in Anrechnung gebrachter Betrag der Prämienreserve bei
Reduktionen,
Abänderungen, Teilungen u. s. w.

Rückgestellte Reserve für Verpflichtungen, welche wegen Eintritt des versicherten Ereignisses im Rechnungsjahre erwachsen sind, jedoch künftig fällig werden.

Im Rechnungsjahre fällig gewordene Erlebenskapitalien und Renten.

An Prämienreserven wurden frei:
wegen Eintritt des Ablebens oder der Invalidität des Versicherten;
durch Storno ohne Rückersatz;
wegen Rückkauf;
wegen Reduktionen;
wegen Teilung, Abänderung u. s. w.

Prämienreserve am Schlusse des Rechnungsjahres (ohne Prämienübertrag auf das folgende Rechnungsjahr).

Anmerkung (aufserordentliche Dotation der Prämienreserve).

III. Vergleich der wahrscheinlichen und der thatsächlich eingetretenen Todesfälle bei den Kapitalversicherungen auf den Todesfall (einschliefslich gemischte Kapitalversicherungen) nach Altersklassen.

Altersklassen, bis 25, 26—30, 30—35, 36—40, 41—45, 46—50, 51—55, 56—60, 61—65, 66—70, 71—75, 76—80, 81—85, 86 und darüber.

Mittlerer Versicherungsstand im Rechnungsjahre (halbe Summe aus dem Bestand am Anfang und am Ende des Rechnungsjahres)
Personen, mit Polizen, Versicherungssumme.
Es waren zu erwarten
Todesfälle, mit einer Versicherungssumme.
Es sind thatsächlich eingetreten
Todesfälle, mit einer Versicherungssumme.
Es starben gegen Erwartung
weniger, Personen, mit einer Versicherungssumme.
mehr, Personen, mit einer Versicherungssumme.
Anmerkung (für Erklärung von allfälligen Unterschieden zwischen der fällig gewordenen und liquidirten Schadenssumme).

IV. Nachweisungen für Berechnung des Gewinnes und Verlustes aus der Sterblichkeit nach Tarifen.

Versicherungskombinationen nach Hauptgruppen.
Kapitalversicherungen auf den Todesfall.
Gemischte Kapitalversicherungen (einschliefslich Kapitalversicherungen mit eventuell zweimaliger Auszahlung).
Sämmtliche Kapitalversicherungen auf den Todesfall.
Kapitalversicherungen auf den Erlebensfall (nur nachzuweisen an den Kombinationen mit Prämienrückgewähr).
Fällige Leibrenten.

Es sollen nachfolgende Daten angegeben werden:
Mittlerer Versicherungsstand im Rechnungsjahre (halbe Summe aus dem Bestande am Anfange und am Ende des Rechnungsjahres).
Versicherungssumme der Kapitalversicherungen auf den Todesfall (einschliefslich gemischte Kapitalversicherungen), Prämienreserve.
Für Todesfälle des Rechnungsjahres
erwartungsgemäfs
zahlbare Versicherungssumme, verfügbare Prämienreserve;
thatsächlich
angemeldete Versicherungssumme, verfügbare Prämienreserve.
Es wurde demnach gegen Erwartung
bezahlt an Kapital;
mehr weniger;
in Anspruch genommen an Prämienreserve;
mehr weniger.

Verteilung des Gewinns.

375. Viele Gesellschaften geben ihren Versicherten einen Anteil am Gewinn. Bei Gesellschaften auf Gegenseitigkeit, bei welchen man nicht eigentlich von Gewinn, sondern nur von zu viel Gezahltem sprechen kann, ist eine solche Verteilung durchaus am Platze, weil die Versicherten auch etwaigen Verlust selbst tragen müssen. Weniger notwendig ist eine Gewinnbeteiligung der Versicherten bei Aktien-Gesellschaften, weil das Aktien-Kapital die Verluste bestreiten mufs. Dennoch gewährt man sie und ahmt sich hierin gegenseitig nach. Es giebt sogar Gesellschaften, die zwei Arten von Tarifen, einen mit und einen ohne Gewinnbeteiligung haben. Man kann erwarten, dafs hier besonders viel Willkür herrschen wird, welche die Quelle arger Enttäuschungen werden kann, und dafs für die Direction die Versuchung grofs sein wird, die Bilanz um jeden Preis einen Gewinn aufweisen zu lassen. Andere Gesellschaften wieder nehmen diejenigen Versicherungsweisen aus, welche gewöhnlich nur zu geringem Gewinn Veranlassung geben, wie Versicherung auf den Erlebensfall, Leibrente und dergleichen.

Die Art, wie man die Totalziffer des den Versicherten auszuzahlenden Gewinns berechnet, ist sehr verschieden; so werden z. B. von dem Gewinn, wie ihn die Bilanz angiebt, zuerst Commissären und Directoren bestimmte Procente ausgezahlt (nicht alle Gesellschaften denken hierbei auch an andere Beamte), dann wird der Rest, z. B. zur einen Hälfte, den Actionären, zur anderen den Versicherten ausgezahlt.

Einige Gesellschaften verteilen den Gewinn alle fünf Jahre, andere alle zwei oder drei Jahre, wieder andere jedes Jahr. Eine Verteilung, welche immer in fünf Jahren stattfindet, ist gewifs deshalb vorzuziehn, weil dann die Wahrscheinlichkeit gröfser ist, dafs die weniger guten Jahre, die doch nicht ausgeschlossen sind, sich gegen die guten ausgleichen.

376. Besonders bei Gesellschaften auf Gegenseitigkeit ist es angemessen, dafs der Gewinn so genau wie möglich den Quellen zu teil wird, aus denen er geflossen ist, und man verfährt nicht nur nach diesem Princip, sondern verteilt sogar den Gewinn aus verschiedenen Quellen auf verschiedene Weise.

Wir wollen die Hauptquellen des Gewinns betrachten. Sie sind:

1°. Der Zins — und zu dem Gewinn, der hieraus entsteht, mufs man auch den aus der Kapitalanlage rechnen. Es geht sowohl aus der Sache selbst wie auch aus den Formeln (474) und (477) hervor, dass

der Gewinn von der Höhe der Reserve und der Prämie seit der letzten Verteilung des Gewinns bedingt ist; für diese Quelle des Gewinns wäre also die Höhe der Reserve für die einzelnen Versicherungen im Zeitpunkt der Verteilung ein guter Maſsstab.

2°. Der Zuschlag. Der Gewinn, den man durch die Weise der Administration, d. h. durch Überschüsse bei der Unkostenrechnung erzielt, sollte verteilt werden nach dem von den Versicherten seit der letzten Verteilung gezahlten Zuschlag. Besonders dann, wenn man die verschiedenen Versicherungsweisen unterscheidet, können die Prämien selbst seit der letzten Verteilung passend den Maſsstab bilden.

3°. Die Weise des Ablebens. Bei den Gesellschaften, welche bei jeder Versicherungsweise den Versicherten einen Anteil am Gewinn geben, wie dies bei Gesellschaften auf Gegenseitigkeit auch durchaus richtig ist, muſs man vor der Verteilung die Gröſse des Gewinns für die verschiedenen Rubriken berechnen, wie wir dies z. B. in No. 373 gezeigt haben.

Wenn in einer Rubrik Verlust vorkommt, so thut man am besten, diesen Verlust durch die anderen Rubriken zu bestreiten, und zwar deren Gewinnziffern proportional, wodurch letztere natürlich vermindert werden.

Wenn die Ziffern auf diese Weise festgestellt sind, muſs man beachten, daſs nach Formel (475) bei den Versicherungsweisen, wo das Ableben Auszahlung mit sich führt, der durch die Weise des Ablebens erzielte Gewinn aus der Differenz besteht zwischen $\Sigma[q\,S(1-V')]$ und $\Sigma[U(1-V')]$, wo U den wegen des Ablebens ausgezahlten Betrag (oder Wert der Rente), V' die Reserve per Einheit darstellt. Die genaueste Proportionszahl für jede einzelne Versicherung ist also $q\,S(1-V')$, d. h. die Differenz zwischen dem versicherten Kapital (eventuell Rente; siehe No. 370) und der Reserve für die Versicherung im Augenblick der Gewinnverteilung, multiplicirt mit der durchschnittlichen Sterbenswahrscheinlichkeit (Auszahlungswahrscheinlichkeit) seit der letzten Gewinnverteilung. Ein Vergleich mit No. 259 zeigt, daſs diese Art der Verteilung mit einer der Risiko-Prämie proportionalen auf dasselbe hinauskommt.

Ganz unbedenklich ist freilich auch diese Verteilung nicht, denn das eine Alter kann zu Verlust, das andere zu Gewinn geführt haben, es können sogar die Versicherungen verschiedener Personen desselben Alters wegen der Veränderlichkeit der Lebensumstände oder des Gesundheitszustandes für die Gesellschaft z. T. vorteilhaft, z. T. nachteilig

geworden sein. Eine ganz gerechte Verteilung ist, wie man sieht, durchaus unmöglich.

Wenn $q\,S(1-V')$ die Proportionszahl zu der Verteilung des Gewinns bildet, nimmt bei derselben Versicherungssumme S und demselben Beitrittsalter der Anteil mit dem Alter weniger zu bei Jahresprämie als bei einmaliger Prämie, weil für V' das Umgekehrte gilt; bei gemischter Versicherung von nicht langer Dauer nähme er sogar mit der Zunahme des Alters ab, was man aus anderen Gesichtspunkten nicht gern sieht, auch wenn es der Billigkeit entspräche.

Stellt bei Versicherung auf den Erlebensfall U den Betrag dar, der durch den Tod verfallen und wofür die Reserve V' per Einheit ist, dann entsteht Gewinn oder Verlust, je nachdem $U\,V'$ gröfser oder kleiner ist als $q\,S\,V'$; die genaueste Verhältniszahl zur Verteilung des Gewinns wäre also für jede Versicherung die Reserve, multiplicirt mit der Sterbenswahrscheinlichkeit. Diese Proportionszahl nimmt mit dem Alter noch in höherem Mafse zu als die Reserve.

Wo man bei Versicherung auf den Erlebensfall und bei Leibrente den Versicherten Anteil am Gewinn gewährt, da ist es, sowohl was den Zins als was die Weise des Ablebens betrifft, zur Vermeidung allzu umständlicher Rechnung am besten und bequemsten, die Reserve als Mafsstab zu wählen.

377. Es giebt eine Anschauungsweise, die weniger den eigentlichen Quellen des Gewinns nachgeht, sondern die Versicherungen vom Standpunkt des Glücksspiels betrachtet; wenn die Auszahlung stattfinden mufs, nachdem erst wenig gezahlt worden ist, so ist die Ziehung eine glückliche (wenn auch zumeist aus anderen Gesichtspunkten der Tod kein Glück ist), dagegen ist die Ziehung für diejenigen unglücklich, welche auf die Länge der Zeit unter Einrechnung des Zinses viel mehr als den versicherten Betrag zahlen. Darum sind viele der Meinung — und hierfür läfst sich besonders bei Aktien-Gesellschaften manches sagen — dafs diesen lange Zahlenden der gröfste Anteil am Gewinn gebührt; sie bevorzugen m. a. W. einen sogenannten steigenden Anteil (Dividende), wobei die Proportionszahl mit der Dauer der Versicherung zunimmt und deshalb die Versicherten mehr Interesse haben, mit ihrer Versicherung zu verwachsen.

378. Es wäre durchaus unmöglich, hier alle verschiedenen Systeme der Gewinnverteilung zu besprechen; sie sind sehr zahlreich, und es giebt darunter sehr complicirte und darum unzweckmäfsige.

Die wichtigsten und einfachsten wollen wir jedoch nennen.

Der auf jede einzelne Versicherung entfallende Anteil am Gewinn kann bestimmt werden im Verhältnis:

1°. Des versicherten Kapitals. Dieses System, dem noch immer hier und da gehuldigt wird, ist sehr einfach; es ist aber auch fast das Einzige, was sich zu seinen Gunsten sagen läfst.

2°. Der seit der vorhergehenden Gewinnverteilung gezahlten Prämie. Hierbei erhalten diejenigen, welche einmalige Prämie gezahlt haben, nur einmal einen Gewinn-Anteil, und bei temporärer Prämie hört die Beteiligung am Gewinn mit der Prämien-Zahlung auf. Man kann dies umgehn, wenn man alle Zahlungsweisen von Prämien rechnerisch auf die von gleichbleibender Jahresprämie zurückführt.

3°. Der ganzen, von Anfang der Versicherung an gezahlten Prämie. Dies ist ein System mit steigendem Gewinn-Anteil, wenigstens für diejenigen, welche gleichbleibende oder zunehmende Prämien zahlen; das System wird viel angewendet. Auch hier verfährt man passend, wie wir am Ende von 2° angaben.

4°. Der Reserve. Bei diesem System erhalten diejenigen, welche einmalige Prämie zahlen, immer einen sehr grofsen und steigenden Anteil; bei Jahresprämie ist er kleiner, steigt aber in stärkerem Verhältnis. Auch hier könnte man dasselbe thun wie bei 2° und 3°.

5°. Des Produkts aus dem versicherten Betrage und der Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Jahres, wobei dann im Fall der Überlebensrente unter der Sterbenswahrscheinlichkeit die des Versorgers, und unter dem Betrag der Wert gemeint ist, den die Pension haben würde, wenn der Versorger in dem Jahre stürbe. Dieses System giebt einen Anteil, der von der Weise der Prämien-Zahlung unabhängig und gleich grofs ist, mag es sich um eine lebenslängliche oder eine gemischte Versicherung handeln, wenn nur Betrag und Alter bei der Gewinnverteilung dieselben sind. Dieses System giebt gleichfalls einen steigenden Anteil am Gewinn.

6°. Der Differenz zwischen dem Total der eingezahlten Prämien und der Reserve.

7°. Der Differenz zwischen der Versicherungssumme und der Reserve.

8°. Des Zuschlages.

9°. Als ein System, welches besser als die vorgenannten auf die verschiedenen Weisen der Prämien-Zahlung Rücksicht nimmt, möchte ich vorschlagen, den Gesammtgewinn, insoweit derselbe den Versicherten zugewendet wird, in zwei gleiche Teile zu zerlegen und die eine Hälfte

nach dem Maſsstab aller, die andere Hälfte der seit der letzten Gewinnverteilung gezahlten Prämien zu verteilen. Übrigens ist die Combination verschiedener Systeme schon jetzt üblich.

379. Will man aus Gesichtspunkten, wie sie in No. 377 erwähnt sind, den Anteil am Gewinn als Entschädigung für diejenigen auffassen, welche sehr lange Prämie und also ihre Versicherung, von ihrem Standpunkte aus betrachtet, teuer bezahlt haben, dann läſst sich viel dafür sagen, daſs keine Auszahlung von Gewinn stattfindet, bevor die Versicherten die mathematische Dauer (No. 348) der Versicherung durchlebt und also ihre ganze Versicherung bezahlt haben; von da ab könnte man ihnen Beteiligung am Gewinn gewähren und als Proportionszahl die Prämien nehmen, welche seit jenem Zeitpunkt gezahlt sind, vermehrt um die Zinsen der Reserve seit dieser Zeit. Für diejenigen, welche einmalige Prämie gezahlt haben oder deren Prämien-Zahlung aufgehört hat, besteht die Proportionszahl also nur aus diesem Zins. Bei Benutzung dieses Systems würde man naturgemäſs einigen Versicherungsweisen, wie z. B. temporärer Versicherung auf den Todesfall mit nicht langer Dauer und der Versicherung im Erlebensfall jeden Anteil am Gewinn verweigern. Bei diesem System hat man also ein von Willkür freies Merkmal dafür, wer Anspruch auf Anteil am Gewinn erheben kann, wer nicht. Ich kann nicht umher, hier noch zu bemerken, daſs der von mir eingeführte Begriff einer mathematischen Dauer nicht in dem Maaſse unnütz erscheint, wie solches von gewisser Seite behauptet wurde.

380. Für jedes System lieſse sich etwas sagen. Es ist ungerecht, ein System zu bekämpfen, weil die Reclame es bisweilen miſsbraucht, indem sie z. B. unerfüllbare Versprechungen daran knüpft, z. B. als sicher hinstellt, daſs die Versicherten alljährlich 3 % von der ganzen bisher gezahlten Prämie erhalten werden, ihre Prämien-Zahlung also allmählich in Renten-Empfang übergehen wird.

Nicht weniger Enttäuschung kann das Accumulations- (oder Tontinen-) System bereiten. Bei diesem wird für jede bestimmte Gruppe aller Gewinn während einer vorher bestimmten Anzahl von Jahren angesammelt und verzinst; Rückkauf wird den Teilhabern nicht gewährt, der Wert der annulirten Versicherungen also zu dem Gewinn geschlagen; am Ende der Periode wird der Gewinn unter die dann noch Lebenden verteilt. Es kommt auch vor, daſs blos der Gewinn der Versicherungen accumulirt wird, also Rückkauf auch innerhalb der bestimmten Anzahl von Jahren bewilligt wird (Halb-Tontinen-System).

Dieses Accumulations-System wird sehr heftig bekämpft, weniger seiner selbst wegen — denn es läfst sich sehr wohl verteidigen — als wegen der riesenhaften Resultate, die in Aussicht gestellt werden und am Ende doch nicht zu erreichen sind.

Noch giebt es Gesellschaften, die ein System haben, welches man ein Anweisungs-System nennen könnte, und bei welchem, um Kunden anzulocken, der Gewinn verloost wird, etwa wie bei einem Abreifs-Kalender eine Villa oder eine Nickel-Uhr.

Bei der Lebensversicherung mufs die Hauptsache bleiben: Linderung des Unglücks Weniger durch Viele; in einigen Fällen möge sie das Sparen erleichtern, eine Kapitalanlage aber soll und kann sie im Allgemeinen nicht sein. Wenn einige durch die Versicherung einen finanziellen Vorteil haben, so mufs dem notwendig ein Nachteil anderer gegenüberstehn, ein Nachteil, den diese für ihre Sicherheit in den Kauf nehmen müssen.

381. Der Anteil am Gewinn wird den Versicherten nicht immer bar in Geld ausgezahlt. Es giebt Gesellschaften, die ihn zur Ermäfsigung der zukünftigen Prämie dienen lassen. Um diese Abnahme zu berechnen, braucht man nur nachzusehen, mit welcher jährlichen Leibrente, unter Berücksichtigung des Alters des Versicherten, der Betrag des Gewinns übereinstimmt.

Wieder andere benützen den Anteil am Gewinn zur Erhöhung des versicherten Betrages, und bei diesem System ist gewifs das Princip „Versicherung“ so weit wie möglich durchgeführt. Noch andere Gesellschaften lassen dem Versicherten die Wahl zwischen beiden Arten. Wenn aber diese Wahl erst zu treffen wäre, wenn bereits der Gewinn zur Verteilung kommt, läge für die Gesellschaft die Veranlassung vor, ärztliche Untersuchung zu fordern, im Falle dafs Vergröfserung des versicherten Kapitals verlangt wird. Anders liegt die Sache, wenn die Wahl schon am Anfang der Versicherung getroffen ist.

Schliefslich bemerken wir noch, dafs einige Gesellschaften selbst den Erben derjenigen Versicherten, die seit der vorhergehenden Gewinnverteilung gestorben sind, Gewinn auszahlen. Auch dies kann man billigen, besonders wenn es sich um den Gewinn bei Versicherung auf den Erlebensfall handelt, denn hier sind es eben die Ablebenden (in der Lotterie die Unglücklichen), welche den gröfsten Teil des Gewinns liefern.

Kapitel XIII.

Die Prämien als analytische Functionen.

Die continuirliche Leibrente.

382. Hierfür haben wir im Kapitel IX Formeln aufgestellt, indem wir von der jährlichen Leibrente ausgingen. Wenn wir ein eigentliches Sterblichkeitsgesetz hätten, könnten wir unseren Zweck mittels Integral-Rechnung erreichen, nur dafs dann noch die Schwierigkeit des Integrirens zu überwinden wäre.

Wenn $f(x)$ die Anzahl der Lebenden des Alters x (in Jahren) bedeutet, dann ist nach No. 212 der Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente vom Betrage 1 per Jahr in n gleichen Raten zu Gunsten eines x-jährigen:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{n}\left[f(x) + \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}{(1+i)^{\frac{1}{n}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{f\left(x+\frac{2}{n}\right)}{(1+i)^{\frac{2}{n}}} + \frac{f\left(x+\frac{3}{n}\right)}{(1+i)^{\frac{3}{n}}} + \ldots\right];$$

hierfür kann man schreiben:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{z=0}^{z=\infty} \frac{f(x+z)}{(1+i)^z},$$

wo dann z jedesmal um $\frac{1}{n}$ zunimmt. Läfst man jetzt n unbegrenzt zunehmen, sodafs $\frac{1}{n} = dz$ gesetzt werden kann, dann erhält man als Wert der continuirlichen Leibrente:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{f(x)} \int_0^\infty \frac{f(x+z)}{(1+i)^z}\, dz. \qquad (479)$$

Augenscheinlich wird der Wert der continuirlichen Leibrente während n Jahren ausgedrückt durch

$$\frac{1}{f(x)} \int_0^n \frac{f(x+z)}{(1+i)^z} dz. \tag{480}$$

Nun kann man schreiben:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{f(x)} \int_0^n \frac{f(x+z)}{(1+i)^z} dz + \frac{1}{f(x)} \int_n^\infty \frac{f(x+z)}{(1+i)^z} dz.$$

Durch Substitution von $z = n+y$ im zweiten Gliede der rechten Seite, geht dieses bei Beachtung, dafs für $z = n$, $y = 0$ ist, über in

$$\frac{1}{f(x)} \int_0^\infty \frac{f(x+n+y)}{(1+i)^{n+y}} dy =$$

$$= \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \int_0^\infty \frac{f(x+n+y)}{(1+i)^y} dy =$$

$$= \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{f(x+n)}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x+n)} \cdot \int_0^\infty \frac{f(x+n+y)}{(1+i)^y} dy =$$

$$= \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{f(x+n)}{f(x)} \cdot \bar{a}_{x+n},$$

sodafs

$$\bar{a}_x = \frac{1}{f(x)} \int_0^n \frac{f(x+z)}{(1+i)^z} dz + \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{f(x+n)}{f(x)} \cdot \bar{a}_{x+n}.$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist nichts anderes als der Wert der n Jahre aufgeschobenen Leibrente.

Leibrente und lebenslängliche Versicherung mittels der mittleren Lebensdauer.

383. Die Formel (479) für die continuirliche Leibrente kann man auch schreiben:

$$\frac{(1+i)^x}{f(x)} \int_x^\infty \frac{f(z)}{(1+i)^z} dz.$$

Nimmt man hierin $i = 0$, dann geht sie über in

$$\frac{1}{f(x)} \int_x^\infty f(z)\, d(z),$$

die mittlere Lebensdauer des x-jährigen.

Je niedriger man den Zinsfuſs nimmt, um so mehr nähert sich der Wert der Leibrente vom Betrage 1 per Jahr der mittleren Lebensdauer, und rechnet man so, als wenn das Geld überhaupt keinen Zins einträge, dann ist der Wert der Leibrente der mittleren Lebensdauer gleich.

Um eine Leibrente schnell näherungsweise zu finden, hat man wohl folgendermaſsen gerechnet: Es handle sich um eine Leibrente für einen 60-jährigen. Wir finden, daſs er eine mittlere Lebensdauer von 14 Jahren hat und also betrachten wir den Wert der Leibrente des 60-jährigen als den einer Annuität während 14 Jahren. Statt der mittleren Lebensdauer hat man auch auf dieselbe Weise die wahrscheinliche Lebensdauer angewendet.

Daſs diese Rechnungsweise sehr ungenau ist, läſst sich leicht einsehen; zu welchen Ungereimtheiten sie führen kann, zeigt am besten folgendes Beispiel:

Nehmen wir eine Leibrente für zwei Personen, die bei dem ersten Ableben gänzlich auf den Längstlebenden übergeht. Der eine (A) sei 50 Jahr, der andere (B) 60 Jahr alt. A hat eine mittlere Lebensdauer von 21, B von 14 Jahren. Rechnen wir jetzt wie oben, so müssen wir sagen: B erhält die Rente mit A zusammen 14 Jahre lang und stirbt, dann lebt A noch 7 Jahre, die Rente wird also im Ganzen 21 Jahre genossen. Bei dieser Schluſsweise, die ebenso folgerichtig ist wie bei der Leibrente für eine Person, hätte die Leibrente für zwei Personen mit gänzlichem Übergang denselben Wert wie die Leibrente für die jüngere von ihnen. Und genau dasselbe würde für die Leibrente einer willkürlichen Anzahl von Personen von gleichbleibendem Betrage bis zum letzten Ableben gelten.

Auf diese Weise fände man einen viel zu geringen Wert für die Leibrente, denn wo viele Personen sind, ist es so gut wie sicher, daſs einige von ihnen länger, ja viel länger leben werden, als ihre mittlere Lebensdauer beträgt.

Zu solchen Ungereimtheiten führen bisweilen populäre Begriffe.

384. Es erscheint hier am Platze, genau ins Licht zu stellen, welchen Fehler man begeht, wenn man den Wert der Leibrente gleich der während der mittleren Lebensdauer zahlbaren Annuität stellt.

Die unvollständige mittlere Lebensdauer beträgt:

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots}{l_x}.$$

Es wird e_x in der Regel nicht eine ganze, sondern eine gemischte Zahl bilden und wir setzen also:

$$e_x = n + k,$$

worin k ein echter Bruch ist.

Der Wert der (unvollständigen, postnumerando) Leibrente stellt sich wie folgt dar:

$$a_x = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{1}{(1+i)^2}\cdot\frac{l_{x+2}}{l_x} + \frac{1}{(1+i)^3}\cdot\frac{l_{x+3}}{l_x} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\cdot\frac{l_{x+n}}{l_x} + \\ + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\cdot\frac{l_{x+n+1}}{l_x} + \ldots$$

Der Wert der während $n+k$ Jahr zahlbaren Annuität beträgt:

$$t = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{(1+i)^k - 1}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^{n+k}}.$$

Als Differenz zwischen t und a_x finden wir demnach:

$$t - a_x = \frac{1}{1+i}\cdot\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) + \frac{1}{(1+i)^2}\cdot\left(1 - \frac{l_{x+2}}{l_x}\right) + \frac{1}{(1+i)^3}\cdot\left(1 - \frac{l_{x+3}}{l_x}\right) + \\ + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\cdot\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right) + \frac{(1+i)^k - 1}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^{n+k}} - \\ - \left[\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\cdot\frac{l_{x+n+1}}{l_x} + \frac{1}{(1+i)^{n+2}}\cdot\frac{l_{x+n+2}}{l_x} + \ldots\right]. \qquad (481)$$

Die Größe $t - a_x$ stellt sich geringer, je nachdem sich die zu addirenden Zahlen geringer und die zu subtrahirenden Zahlen höher stellen; dieselbe stellt sich also geringer, wenn wir jeden der Koeffizienten der n Ausdrücke:

$$1 - \frac{l_{x+1}}{l_x},\ 1 - \frac{l_{x+2}}{l_x}, \ldots 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

ersetzen durch den kleineren Koeffizienten $\frac{1}{(1+i)^{n+1}}$ und jeden der Koeffizienten der Ausdrücke:

$$\frac{l_{x+n+1}}{l_x},\ \frac{l_{x+n+2}}{l_x}, \ldots$$

durch deren größten: $\frac{1}{(1+i)^{n+1}}$.

Man findet also

$$t - a_x > \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\cdot\left[n - \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots l_{x+n}}{l_x}\right] + \frac{1}{(1+i)^{n+k}}\cdot\frac{(1+i)^k - 1}{i} - \\ - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\cdot\frac{l_{x+n+1} + l_{x+n+2} + \ldots}{l_x}.$$

Vereinigen wir das erste und dritte Glied der rechten Seite in dieser Ungleichung, so kommt:

$$t - a_x > \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \cdot \left[n - \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x}\right] + \frac{1}{(1+i)^{n+k}} \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i}.$$

Nun ist

$$\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots}{l_x} = n + k,$$

und man findet also:

$$t - a_x > \frac{(1+i)^k - 1}{i(1+i)^{n+k}} - \frac{k}{(1+i)^{n+1}},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$t - a_x > \frac{1 + i - (1+i)^{1-k} - ki}{i(1+i)^{n+1}}, \text{ oder } t - a_x > \frac{1 + (1-k)i - (1+i)^{1-k}}{i(1+i)^{n+1}}.$$

Es ist

$$(1+i)^{1-k} = 1 + (1-k)i - \frac{k(1-k)}{2} i^2 + \ldots$$

Weil nun k und i beide kleiner als die Einheit sind, geht hieraus hervor, dafs $(1+i)^{1-k}$ kleiner als $1 + (1-k)i$ ist; deshalb ist das rechte Glied obiger Ungleichung, also auch $t - a_x$ positiv; der Wert der Annuität ist also gröfser als der Wert der Leibrente.

Hiermit erscheint folgender Satz erwiesen:

Der Wert einer Leibrente ist kleiner als der Wert der während der mittleren Lebensdauer zahlbaren Annuität.

Es fällt bekanntlich die Differenz zwischen t und a_x weg, wenn $i = 0$ ist.

Stellt sich i gröfser, so stellen sowohl die positiven als die negativen Glieder von (481) sich niedriger; aber die Factoren, womit infolge des höheren Wertes von i die positiven Glieder multiplicirt werden, sind gröfser als diejenigen, womit die negativen Glieder multiplicirt werden, sodafs infolge des erhöhten Zinsfufses die positiven Glieder in geringerem Maafse als die negativen verringern; die Differenz zwischen t und a_x stellt sich also gröfser, je nachdem der Zinsfufs höher ist.

Der Satz bleibt ebenfalls gültig, wenn von einer vollständigen Leibrente die Rede ist, denn in diesem Falle mufs nach dem Tode noch durchschnittlich ein halbes Jahr Rente ausgezahlt werden; aber dann ist auch die mittlere Lebensdauer eine vollständige, und also die Annuität um ein halbes Jahr länger zahlbar.

385. Man hat es versucht, die einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall annähernd zu bestimmen,

indem man sie ersetzte durch eine Auszahlung, welche am Ende der mittleren Lebensdauer stattfinden würde.

Sei $n+k$ die mittlere Lebensdauer, wenn das Absterben am Anfang des Jahres vorausgesetzt wird, so ist

$$a_x < \frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}+\frac{(1+i)^k-1}{i(1+i)^{n+k}},$$

also:

$$a_x < 1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}+\frac{(1+i)^k-1}{i(1+i)^{n+k}}$$

oder

$$a_x < \frac{1-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}}{1-\frac{1}{1+i}}+\frac{(1+i)^k-1}{i(1+i)^{n+k}}.$$

Es ist

$$1-\frac{1}{1+i}=\frac{i}{1+i},$$

und man hat also:

$$\frac{i}{1+i}\cdot a_x < 1-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}+\frac{(1+i)^k-1}{(1+i)^{n+k+1}},$$

woraus sich sogleich ergiebt:

$$\frac{i}{1+i}\cdot a_x < 1-\frac{1}{(1+i)^{n+k+1}},$$

Hieraus folgt:

$$1-\frac{i}{1+i}a_x > \frac{1}{(1+i)^{n+k+1}}.$$

Nachdem sich die einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung auf

$$A_x = 1-\frac{i}{1+i}a_x$$

stellt, findet man:

$$A_x > \frac{1}{(1+i)^{n+k+1}}.$$

Weil $n+k$ die mittlere Lebensdauer ist, wenn das Absterben am Anfang des Sterbejahres gestellt ist, so stellt sich die mittlere Lebensdauer, wenn das Absterben am Ende des Sterbejahres gestellt ist, auf $n+k+1$. Hiermit erscheint folgender Satz erwiesen:

Die einmalige Prämie für ein versichertes Kapital im Ablebensfalle ist gröfser als der Barwert desselben

Kapitals, welches am Ende der mittleren Lebensdauer ausgezahlt werden soll.

Es ist dies gleichfalls zutreffend, wenn die Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben stattfinden mufs, denn dann findet die Auszahlung durchschnittlich um ein halbes Jahr früher statt, und die mittlere Lebensdauer stellt sich um ein halbes Jahr kürzer.

Sollte man bei der Berechnung der Jahresprämie annehmen, dafs der Versicherte am Ende seiner mittleren Lebensdauer sterben werde, so wäre der Fehler verhältnismäfsig noch gröfser als bei einmaliger Prämie; denn in $\frac{A}{a}$ nimmt man dann den Zähler zu klein und den Nenner zu grofs.

Continuirliche Verbindungsrente.

386. Wenn wir zwei Sterblichkeitstafeln benutzen, eine für den x-jährigen, nach welcher die Anzahl der Lebenden des Alters x durch $f(x)$, und eine für den y-jährigen, nach welcher diese Anzahl mit $\varphi(y)$ bezeichnet werde, dann ist, wie man leicht einsehen kann, der Wert der continuirlichen Verbindungsrente für zwei x und y Jahr alte Personen:

$$\bar{a}_{x\,y} = \frac{1}{f(x)\cdot\varphi(y)} \int_0^\infty \frac{f(x+z)\,\varphi(y+z)}{(1+i)^z}\,dz. \qquad (482)$$

Nur wenn wir für beide Personen dieselbe Sterblichkeitstafel wählen, ist $\bar{a}_{x\,y} = \bar{a}_{y\,x}$.

Einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung der Einheit, zahlbar unmittelbar nach dem Ableben.

387. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Person, die jetzt x Jahr alt ist, nach z Jahren am Leben und nach $z+t$ Jahr gestorben sein wird, findet man in folgender Weise:

Wenn der jetzt x-jährige nach z Jahren noch lebt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dafs er nach weiteren t Jahren gestorben sein wird:

$$\frac{f(x+z) - f(x+z+t)}{f(x+z)} = 1 - \frac{f(x+z+t)}{f(x+z)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit aber, dafs der jetzt x-jährige nach z Jahren noch am Leben sein wird, ist $\frac{f(x+z)}{f(x)}$, also ist die gesuchte Wahr-

scheinlichkeit für den x-jährigen, in einem Alter zwischen $x+s$ und $x+s+t$ Jahren zu sterben:

$$\frac{f(x+s)}{f(x)} \cdot \left(1 - \frac{f(x+z+t)}{f(x+z)}\right),$$

und daher die Wahrscheinlichkeit, in dem Zeitelement zwischen dem Alter von $x+z$ und $x+z+dz$ zu sterben:

$$\frac{f(x+z)}{f(x)} \cdot \left(1 - \frac{f(x+z+dz)}{f(x+z)}\right) =$$
$$= \frac{f(x+z) - f(x+z+dz)}{f(x)} = -\frac{f'(x+z)}{f(x)}\,dz.$$

Die Einheit, die in dem Augenblick zwischen den Zeitpunkten nach z und $z+dz$ Jahren auszuzahlen ist, hat jetzt den Wert $\frac{1}{(1+i)^z}$, und also ist die einmalige Prämie für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall:

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{f(x)} \int_0^\infty \frac{f'(x+z)}{(1+i)^z}\,dz. \qquad (483)$$

Durch partielle Integration ergiebt sich:

$$\int \frac{f'(x+z)}{(1+i)^z}\,dz = \int \frac{df(x+z)}{(1+i)^z} =$$
$$= \frac{f(x+z)}{(1+i)^z} + L(1+i) \int \frac{f(x+z)}{(1+i)^z}\,dz.$$

Wenn man zu den Grenzen 0 und ∞ übergeht, mit $f(x)$ dividirt und das Vorzeichen umkehrt, folgt:

$$\bar{A}_x = 1 - L(1+i)\,\frac{1}{f(x)} \int_0^\infty \frac{f(x+z)}{(1+i)^z}\,dz,$$

und deshalb ist nach Formel (479)

$$\bar{A}_x = 1 - \bar{a}_x\, L(1+i) = 1 - \delta \cdot \bar{a}_x. \qquad (484)$$

Jetzt zeigt sich, daſs die Formel (341), welche abgeleitet ist unter Annahme eines gleichmäſsigen Ablebens während jedes Jahres, mathematisch streng ist auch ohne eine solche Voraussetzung.

Die einmalige Prämie für die Versicherung auf den Todesfall während n Jahren ist augenscheinlich:

$$-\frac{1}{f(x)} \cdot \int_0^n \frac{f'(x+z)}{(1+i)^z}\,dz. \qquad (485)$$

Aus No. 28 erfolgt, dafs die Auszahlung der Einheit am Ende des Jahres der Auszahlung von $\frac{L(1+i)}{i}$ per Jahr aber in unendlich vielen, gleichmäfsig über das Jahr verteilten Raten entspricht.

Darum ist der Wert der postnumerando zahlbaren Leibrente vom Betrage 1 per Jahr bis zum Moment des Ablebens derselbe wie derjenige der continuirlichen Leibrente vom Betrage $\frac{L(1+i)}{i}$ per Jahr, und demnach ist der Wert $\mathring{a}_x$ der postnumerando zahlbaren Leibrente vom Betrage 1 per Jahr bis zum Moment des Ablebens:

$$\mathring{a}_x = \frac{L(1+i)}{i}\,\bar{a}_x, \text{ also } \bar{a}_x\, L(1+i) = i\,\mathring{a}_x.$$

Substituirt man dies in Formel (484), so ergiebt sich als Barwert der Lebensversicherung:

$$\bar{A}_x = 1 - i\,\mathring{a}_x, \tag{486}$$

die einfachste Formel, was die Form betrifft, und am leichtesten zu erklären.

Einmalige Prämie für Auszahlung unmittelbar nach dem ersten Ableben einer Person aus einem Paar.

388. Um diese zu bestimmen, braucht man nur in Formel (483) die Function f zu ersetzen durch $f(x+z)\,\varphi(y+z)$, wenn die zwei Personen x und y Jahr alt sind und für beide zwei verschiedene Sterblichkeitstafeln benützt werden; an Stelle von $f'(x+z)$ tritt:

$$f'(x+z)\,\varphi(y+z) + f(x+z)\,\varphi'(y+z) = \frac{d\,[f(x+z)\,\varphi(y+z)]}{d\,z},$$

sodafs die einmalige Prämie ist:

$$\bar{A}_{xy} = -\frac{1}{f(x)\,\varphi(y)} \int_0^\infty \frac{d\,[f(x+z)\,\varphi(y+z)]}{d\,z} \cdot \frac{1}{(1+i)^z}\, d\,z, \tag{487}$$

woraus sich ebenso wie im vorhergehenden Abschnitt ergiebt:

$$\bar{A}_{xy} = 1 - \delta \cdot \bar{a}_{xy}, \tag{488}$$

und dieser Ausdruck nimmt auf dieselbe Weise wie oben die Form (486) an.

Überlebenskapital.

389. Sei x das Alter des Versorgers, y des Versorgten.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs nach z Jahren Versorger und Versorgter beide am Leben sein werden, nach $z+dz$ Jahr nur der Versorger gestorben sein wird, ist

$$-\frac{f'(x+z)\,\varphi(y+z)}{f(x)\,\varphi(y)}\,dz,$$

also ist die einmalige Prämie für das Überlebenskapital:

$$\bar{A}^1_{xy} = -\frac{1}{f(x)\,\varphi(y)}\cdot\int_0^\infty \frac{f'(x+z)\,\varphi(y+z)}{(1+i)^z}\,dz. \qquad (489)$$

Mittels dieser Formel läſst sich die einmalige Prämie $\bar{A}^1_{xy}$ näherungsweise in der continuirlichen Verbindungsrente ausdrücken.

Substituiren wir nämlich (No. 42):

$$f'(x+z) = f(x+z+1) - f(x+z),$$

dann wird:

$$\bar{A}^1_{xy} = \frac{1}{f(x)\,\varphi(y)}\cdot\int_0^\infty \frac{f(x+z)\,\varphi(y+z)}{(1+i)^z}\,dz -$$

$$-\frac{f(x+1)}{f(x)}\cdot\frac{1}{f(x+1)\,\varphi(y)}\cdot\int_0^\infty \frac{f(x+1+z)\,\varphi(y+z)}{(1+i)^z}\,dz,$$

d. h. nach Formel (482):

$$\bar{A}^1_{xy} = \bar{a}_{xy} - \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\bar{a}_{x+1.y}.$$

Genauer noch wird die Formel, wenn man substituirt:

$$f'(x+z) = \frac{f(x+z+1) - f(x+z-1)}{2},$$

wodurch man erhält:

$$\bar{A}^1_{xy} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{f(x-1)}{f(x)}\,\bar{a}_{x-1.y} - \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\bar{a}_{x+1.y}\right].$$

Wenn in der Sterblichkeitstafel die Zahl der Ablebenden

$$f(x) - f(x+1)$$

einen allzu unregelmäſsigen Verlauf nimmt, so kann man diese Un-

regelmäßigkeit verbessern, indem man $f'(x+z)$ von zwei mehr auseinander gelegenen Werten für $f(x)$ abhängen läßt, also z. B. substituirt:

$$f'(x+z) = \frac{f(x+z+5) - f(x+z-5)}{10},$$

wodurch sich ergiebt:

$$A^1_{xy} = \tfrac{1}{10}\left[\frac{f(x-5)}{f(x)}\,\bar{a}_{x-5.y} - \frac{f(x+5)}{f(x)}\,\bar{a}_{x+5.y}\right].$$

Indessen ist es möglich, den Wert des Überlebenskapitals analytisch auszudrücken mittels des Werts der Verbindungsrente.

Der Wert des Überlebenskapitals, auszuzahlen am Ende des Sterbejahres des Versorgers, wenn der Versorgte am Anfang dieses Jahres am Leben war, ist nach Formel (260):

$$\frac{1}{1+i} \cdot \left(a_{xy} - \frac{f(x+1)}{f(x)}\,a_{x+1.y}\right).$$

Findet die Auszahlung statt am Ende desjenigen n^{ten} Teils des Jahres, in welchem der Versorger gestorben ist, wenn der Versorgte am Anfang dieses n^{ten} Jahresteils am Leben war, so ist der Wert des Überlebenskapitals:

$$n \cdot \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{n}}} \cdot \left(a^{(n)}_{xy} - \frac{f_i\left(x+\frac{1}{n}\right)}{f(x)} \cdot a^{(n)}_{x+\frac{1}{n}.y}\right),$$

was sich schreiben läßt:

$$-\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) \cdot a^{(n)}_{x+\frac{1}{n}.y} - f(x) \cdot a^{(n)}_{xy}}{\frac{1}{n}}.$$

Geht man über zur Grenze $n = \infty$, $\frac{1}{n} = dx$, so hat man als Wert des Überlebenskapitals, zahlbar unmittelbar nach dem Tode des Versorgers, wenn der Versorgte am Leben ist:

$$-\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial\,[f(x)\,\bar{a}_{xy}]}{\partial x}. \qquad (490)$$

Substituirt man hierin für $\bar{a}_{xy}$ die Formel (482) und beachtet, dafs

$$\frac{\partial f(x+z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+z)}{\partial z}$$

ist, so kommt man wieder auf Formel (489).

Continuirlicher Zins.

390. In den bisherigen Formeln wird vorausgesetzt, dafs der Zins jährlich nur einmal kapitalisirt wird und dafs man bei Anlegung innerhalb eines Jahres Rücksicht darauf nimmt; alsdann ist $(1+i)^x$ der Aufzinsungsfactor sowohl für ganze wie auch für gebrochene Werte von z.

Setzt man aber voraus, dafs der Zins jeden p^{ten} Teil des Jahres $\frac{1}{p}i$ beträgt und dafs die Kapitalisirung des Zinses im Laufe des Jahres eine continuirliche ist, so wächst in einem Jahre die Einheit an zu e^i (No. 9).

Die Formel für die continuirliche Leibrente wird also, wenn man continuirliche Kapitalisirung des Zinses voraussetzt

$$\bar{a} = \frac{1}{f(x)} \int_0^\infty \frac{f(x+z)}{e^{iz}}\, dz. \qquad (491)$$

Bei derselben Voraussetzung wird die einmalige Prämie für die Lebensversicherung:

$$\bar{A} = -\frac{1}{f(x)} \int_0^\infty \frac{f'(x+z)}{e^{iz}}\, dz. \qquad (492)$$

Nun ist

$$\int \frac{f'(x+z)}{e^{iz}}\, dz = \frac{f(x+z)}{e^{iz}} + i \int \frac{f(x+z)}{e^{iz}}\, dz.$$

Geht man zu den Grenzen über, dividirt mit $f(x)$ und kehrt das Vorzeichen um, so erhält man:

$$\bar{A} = 1 - i \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \int_0^\infty \frac{f(x+z)}{e^{iz}}\, dz.$$

Wir gelangen also wieder zu der einfachsten Form für diese einmalige Prämie:

$$\bar{A} = 1 - i\,\bar{a}.$$

Verschiedene Formen für den Wert der Lebensversicherung nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

391. Sei die Wahrscheinlichkeit des Versicherten, im ersten Jahr zu sterben ${}_1q$, im zweiten Jahr ${}_2q$, im dritten Jahr ${}_3q$ u. s. w., so kann man den Barwert der Einheit, die am Ende des Sterbejahres ausgezahlt werden mufs, darstellen durch

$$A = \Sigma\,({}_nq \cdot v^n), \qquad (493)$$

worin $v = \frac{1}{1+i}$ ist und die Summe sich über alle ganzen Werte von n bis zum höchsten Alter erstreckt. Dieser Ausdruck ist einfach eine andere Schreibweise für Formel (185). Es giebt indessen eine andere Form, die besonders aus einem wissenschaftlichen Gesichtspunkte wichtig ist.

Wir setzen voraus, dafs λ Personen an der Versicherung teilhaben, dann ist nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeit, dafs im ersten Jahr α, im zweiten Jahr β, im dritten Jahr γ Personen u. s. w. sterben werden:

$$\frac{\lambda!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\,{}_1q^{\alpha} \cdot {}_2q^{\beta} \cdot {}_3q^{\gamma} \cdots,$$

wo $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=\lambda$ sein mufs und $\lambda!$ das Produkt $1.\ 2.\ 3 \ldots \lambda$ bedeutet.

Der discontirte Wert aller Auszahlungen ist bei dieser Verteilung der Todesfälle:

$$\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + \ldots,$$

und also hat der gesuchte Barwert die Form:

$$A = \frac{1}{\lambda}\,\Sigma\left[\frac{\lambda!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\,{}_1q^{\alpha} \cdot {}_2q^{\beta} \cdot {}_3q^{\gamma} \ldots\ldots (\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + \ldots)\right], \qquad (494)$$

wo das Summirungszeichen Σ andeutet, dafs für α, β, γ ... alle Kombinationen der ganzen positiven Zahlen von 0 bis λ genommen werden müssen, welche die Bedingung $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=\lambda$ erfüllen.

Es ist eine eigenartige, obschon etwas langwierige algebraische Übung, Formel (494) bei einem allgemeinen Wert für λ wieder in (493) umzubilden, wie dies einmal in der österreichischen Versicherungs-Zeitung vorgenommen worden ist. Dafs für $\lambda = 1$ die Formeln (493) und (494) übereinstimmen, ist unmittelbar ersichtlich und die Übereinstimmung ist auch für $\lambda = 2$ leicht zu verificiren, wobei man beachte, dafs ${}_1q + {}_2q + {}_3q + \ldots = 1$ ist.

Formel (494) kann als Ausgangspunkt für die Entwicklung des mathematischen Risikos der Prämien dienen, wobei man dann voraussetzt, dafs λ sehr grofs ist.

Kapitel XIV.

Annäherungen.

Erlaubte Abkürzungen.

392. Mit vollstem Recht kann man sagen, dafs alle Prämien- und Reserve-Rechnungen nur Annäherungen sind, und zwar, wenigstens vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet, ziemlich rohe Annäherungen. Obgleich wir schon an verschiedenen Stellen Annäherungs-Methoden angewendet haben, weil eine genauere allzu ausführliche und aufserdem nutzlose Rechnungen erfordern würde, so giebt es doch noch mehr Fälle, wo Abkürzungen möglich und zulässig sind. Besonders sind solche notwendig, wenn dem Mathematiker auf dem Gebiete der Lebensversicherung einzelne Aufgaben über complicirte Fälle gestellt werden, in welcher Richtung die Agenten wunderbar erfinderisch sein können. Die Anwendung einer genaueren Methode würde dann bisweilen ein ungeheuer umständliches Rechnen bedingen.

Bei Anwendung solcher Abkürzungen mufs man jedoch darauf achten, dafs immerhin die Genauigkeit, soweit sie notwendig ist, erreicht wird.

Die Hauptmethoden der Annäherung wollen wir entwickeln.

Interpolation.

393. Bei einigen Tarifen, z. B. für Versicherung auf den Erlebensfall nach einer bestimmten Anzahl von Jahren, ändern sich die Prämien für die verschiedenen Beitrittsalter nur wenig, ausgenommen die allerjüngsten von 0 bis 5 Jahren.

Für solche Fälle ist es nicht notwendig, die Prämien für jedes Alter besonders zu berechnen, wie man sich leicht überzeugen kann; wenn z. B. die Prämien für die Altersstufen 5, 10, 15, 20 ... Jahr

nahezu eine gewöhnliche arithmetische Reihe bilden, dann kann man die Prämien für 6, 7, 8 Jahr u. s. w. leicht interpoliren, indem man die Differenzen in der Prämie den Differenzen im Alter proportional setzt, und es ist unwahrscheinlich, dafs der Fehler der interpolirten Prämien gröfser sein wird als $\frac{1}{8}$ der Differenz der Prämien, zwischen welche interpolirt wird.

Sind indessen die Differenzen allzu unregelmäfsig und zu grofs, so kann man die Glieder betrachten, als wenn sie eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bildeten.

Nimmt bei gleicher Differenz von z. B. jedesmal 5 Jahren im Alter (oder in der Dauer) die Prämie immer mehr mit dem Alter (oder der Dauer) zu, und man setzt beim Interpoliren die Differenz in den Prämien der Differenz im Alter (oder in der Dauer) proportional, so wird die interpolirte Prämie zu hoch; ebenso wenn die Prämie mit der Zunahme des Alters (oder der Dauer) immer weniger abnimmt. Eine einfache mathematische Figur, bei welcher das Alter (oder die Dauer) Abscisse, die Prämie Ordinate ist, bringt dies leicht zur Anschauung, denn grofse Unregelmäfsigkeiten in den gesuchten Prämien sind dann nicht wahrcheinlich und alle Prämien würden, wenn sie berechnet wären, die Punkte einer Curve geben, welche ihre convexe Seite der Abscissen-Axe zuwendet.

394. Wo es sich um eine Versicherung handelt, die eine bestimmte Anzahl von Jahren dauert, haben öfters zwar nicht die Jahresprämien selbst, aber die sämmtlichen Prämien für verschiedene Dauer einen regelmäfsigen Verlauf.

Sei für dasselbe Beitrittsalter zu einer gewissen Versicherung, z. B. auf den Erlebensfall oder zu gemischter, die Jahresprämie bei der Dauer von 5 Jahren ${}_5P$, bei der Dauer von 10 Jahren ${}_{10}P$, von 15 Jahren ${}_{15}P$ u. s. w., dann kommt es vor, dafs $5\,{}_5P$, $10\,{}_{10}P$, $15\,{}_{15}P$ nahezu eine gewöhnliche arithmetische Reihe bilden. Um dann z. B. die Prämie für die Dauer von 8 Jahren zu bestimmen, kann man setzen:

$$8\,{}_8P = 5\,{}_5P + \tfrac{3}{5}\,(10\,{}_{10}P - 5\,{}_5P),$$

woraus sich ergiebt:

$${}_8P = \tfrac{1}{8}\,(2\,{}_5P + 6\,{}_{10}P) = \tfrac{1}{4}\,({}_5P + 3\,{}_{10}P).$$

Diese Methode ist von **D. J. A. Samot** angegeben worden.

395. Die Prämien für die Rückgewähr der Einheit an Jahresprämie, die sonst beim Ableben der Gesellschaft verfiele, nehmen ziem-

lich steigend mit der Daner der Versicherung zu und gestatten also für andere Dauer keine Interpolation mit proportionalen Differenzen; dividirt man aber diese Rückgewähr-Prämie mit der Dauer, so werden die Differenzen einander ziemlich gleich. Sind dann die Jahresprämien für die Rückgewähr der Einheit an Jahresprämie der Reihe nach ${}_5P$, ${}_{10}P$, ${}_{15}P$... bei der Dauer von 5, 10, 15 Jahren, so bilden $\frac{1}{5} \cdot {}_5P$, $\frac{1}{10} \cdot {}_{10}P$, $\frac{1}{15} \cdot {}_{15}P$ näherungsweise eine arithmetische Reihe.

Dies vorausgesetzt, darf man z. B. annehmen, dafs

$$\frac{1}{7} \cdot {}_7P = \frac{1}{5} \cdot {}_5P + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{10} \cdot {}_{10}P - \frac{1}{5} \cdot {}_5P\right) \text{ ist.}$$

Zuweilen erscheint es zweckmäfsig zu interpoliren zwischen den reciproken Werten der Prämien. Man erhält dann auch die reciproken Werte der gesuchten Prämien. Es läfst sich mathematisch beweisen, dafs die auf diese Weise interpolirten Prämien immer geringer sind als wenn man direct zwischen den Prämien selbst interpolirt. (Man sehe einen Artikel des Verfassers im IV. Teil des holländischen „Archiefs“.)

396. Bei einigen Versicherungsweisen, z. B. bei Versicherung auf den Erlebensfall mit Rückerstattung der Prämie bei früherem Ableben, ändern sich die Prämien mit dem Beitrittsalter so wenig, dafs einige Gesellschaften mit vollem Recht die Prämien nicht für jedes Alter angeben, sondern sie nur für Altersgruppen berechnen.

397. Wenn man bei Versicherung für zwei Personen alle Prämien für diejenigen Alterscombinationen kennt, bei denen die Differenz im Alter 0 oder ein vielfaches von 5 ist, so läfst sich auf zweierlei Weisen interpoliren. Um z. B. P_{38-26} zu finden, kann man entweder zwischen P_{38-23} und P_{38-28} interpoliren oder zwischen P_{36-26} und P_{41-26}. Man interpolire dann zwischen die beiden, deren Differenz am kleinsten ist. Letzteres wird am häufigsten für die niedrigsten Alter, im obigen Falle also für P_{38-23} und P_{38-28} zutreffen.

Sind die Prämien bei zwei Leben nur gegeben für diejenigen Alter, die man durch 5 dividiren kann, dann hat man im Allgemeinen dreimal zu interpoliren. Um z. B. P_{38-26} zu finden, interpolire man zuerst P_{38-25} zwischen P_{35-25} und P_{40-25}; dann P_{38-30} zwischen P_{35-30} und P_{40-30}; endlich P_{38-26} zwischen P_{38-25} und P_{38-30}.

Aus denselben vier Werten kann man die gesuchte Prämie auf eine zweite Weise ableiten:

P_{35-26} aus P_{35-25} und P_{35-30}; P_{40-26} aus P_{40-25} und P_{40-30}; P_{38-26} aus P_{35-26} und P_{40-26}.

Man wird sich leicht überzeugen können, dafs bei gewöhnlicher Interpolation durch proportionale Differenzen beide Ableitungen das-

selbe Resultat geben müssen. Diese Übereinstimmung kann aber das Zutrauen zu den gewonnenen Zahlen nicht erhöhn, vielmehr mufs man sich auch hier vergewissern, ob der Verlauf der Prämien diese einfache Interpolation gestattet, oder ob man mit zweiten Differenzen arbeiten mufs.

Es erscheint an dieser Stelle nachstehende Bemerkung nicht überflüfsig: Wünscht man aus den Prämien

$$P_x,\ P_{x+5},\ P_{x+10},\ P_{x+15},\ P_{x+20},\ldots$$

die zwischenliegenden mit Beachtung von zweiten Differenzen zu bestimmen, so berechne man

P_{x+3}, P_{x+4}, P_{x+6} und P_{x+7} aus P_x, P_{x+5} und P_{x+10},

P_{x+8}, P_{x+9}, P_{x+11} und P_{x+12} aus P_{x+5}, P_{x+10} und P_{x+15} u. s. w.,

damit die interpolirten Prämien nicht allzu weit entfernt seien von denjenigen, zwischen welchen sie interpolirt wurden. (Man sehe No. 67.)

Nur im Anfang und am Ende ist man genötigt, eine Ausnahme zu machen. Sei P_x die erste Prämie, so ist man gezwungen, P_{x+1} und P_{x+2} abzuleiten aus P_x, P_{x+5} und P_{x+10}.

Abgekürzte Summation.

398. Der Barwert dieser oder jener Versicherung, die nur mit dem Tode aufhört, hat einen Wert, der sich in der Form

$$A = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{u. s. w.}$$

darstellt.

Die Absicht der Methode ist, A näherungsweise zu finden, ohne dafs man alle Zahlen u benützt. Es sind schon mehrere Annäherungs-Methoden dieser Art gegeben worden, u. a. von **Lobatto** für Leibrente und von **Stamkart** für Verbindungsrente; wir glauben aber, dafs die nachfolgende Methode, die keinen Unterschied macht zwischen einem und mehr Leben, wegen ihrer Einfachheit und Genauigkeit, sowie auch deshalb vorzuziehn ist, weil sie nicht wie die genannten von der Voraussetzung ausgeht, dafs immer während 5 Jahren ein gleichmäfsiges Ableben stattfindet.

Es mögen u_0, u_n, u_{2n}, u_{3n} u. s. w. berechnet worden sein. Wir setzen jetzt:

$$u_0 = U_0,\ u_n = U_1,\ u_{2n} = U_2 \text{ u. s. w.}$$

Um von

$$u_0 + u_n + u_{2n} + \ldots \text{ zu } u_0 + u_1 + u_2 + \text{ u. s. w.}$$

zu gelangen, müssen wir von

$$P = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots \text{ zu } P' = U_0 + U_{\frac{1}{n}} + U_{\frac{2}{n}} + \ldots$$

übergehn.

Nehmen wir nun an, dafs die U näherungsweise eine arithmetische Reihe dritter Ordnung bilden, so haben wir ähnlich wie in No. 212:

$$P' = n\,P - \frac{n-1}{2}\,U_0 - \frac{n^2-1}{24\,n}\,(3\,U_0 - 4\,U_1 + U_2).$$

Setzt man jetzt:

$$u_0 + u_n + u_{2n} + \ldots = Q;\; u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = Q',$$

so hat man:

$$Q' = n\,Q - \frac{n-1}{2}\,u_0 - \frac{n^2-1}{24\,n}\,(3\,u_0 - 4\,u_n + u_{2n}). \qquad (495)$$

Nehmen wir als Beispiel den Wert der praenumerando zahlbaren Leibrente für den x-jährigen, dann ist:

$$u_m = \frac{D_{x+m}}{D_x},$$

und die Annäherungsformel wird:

$$a_x = \frac{1}{D_x}\left[n(D_x + D_{x+n} + D_{x+2n} + \ldots) - \right.$$

$$\left. - \frac{n-1}{2}\,D_x - \frac{n^2-1}{24\,n}\,(3\,D_x - 4\,D_{x+n} + D_{x+2n})\right].$$

Für $n = 10$ wird:

$$a_x = \frac{1}{D_x}\left[10\,(D_x + D_{x+10} + D_{x+20} + \ldots) - \right.$$

$$\left. - \tfrac{9}{2}\,D_x - \tfrac{33}{80}\,(3\,D_x - 4\,D_{x+10} + D_{x+20})\right].$$

So ist

$$a_{20} = \frac{1}{D_{20}}\left[10\,(D_{20} + D_{30} + D_{40} + D_{50} + \ldots) - \right.$$

$$\left. - \tfrac{9}{2}\,D_{20} - \tfrac{33}{80}\,(3\,D_{20} - 4\,D_{30} + D_{40})\right].$$

Natürlich erhält man einen noch genaueren Wert, wenn man $n = 5$ setzt; dann ist:

$$a_x = \frac{1}{D_x}\left[5\,(D_x + D_{x+5} + D_{x+10} + D_{x+15} + \ldots) - \right.$$
$$\left. - 2\,D_x - \tfrac{1}{6}\,(3\,D_x - 4\,D_{x+5} + D_{x+10})\right].$$

Bei zwei Leben hat man ebenso für $n = 10$:

$$a_{xy} = \frac{1}{l_x\,D_y}\left\{10\,(l_x\,D_y + l_{x+10}\,D_{y+10} + l_{x+20}\,D_{y+20} + \ldots) - \right.$$
$$\left. - \tfrac{9}{2}\,l_x\,D_y - \tfrac{33}{80}\,(3\,l_x\,D_y - 4\,l_{x+10}\,D_{y+10} + l_{x+20}\,D_{y+20})\right\}.$$

Bei lebenslänglicher Versicherung auf den Todesfall findet man als Näherungswert der einmaligen Prämie:

$$A_x = \frac{1}{D_x}\left\{10\,(C_x + C_{x+10} + C_{x+20} + C_{x+30} + \ldots) - \right.$$
$$\left. - \tfrac{9}{2}\,C_x - \tfrac{33}{80}\,(3\,C_x - 4\,C_{x+10} + C_{x+20})\right\}.$$

Die Annäherungen geben sehr genügende Resultate, wie man sich durch Versuche überzeugen kann, und sind sehr zu empfehlen für Fälle, wo, wie bei mehr Personen, die strenge Methode sehr umständlich werden kann; sie sind überall am Platze, wenn man nach einer gewissen Sterblichkeitstafel möglichst rasch eine einzelne Prämie berechnen will.

Wenn wir hier auch nur die Näherungs-Formel für die einmalige Prämie einer Lebensversicherung haben finden wollen, so behalte man doch im Auge, dafs die Prämien für die meisten Versicherungen sich auf Leibrenten zurückführen lassen.

Die Annäherung als bestimmtes Integral.

399. Wie wir schon gesehen haben, lassen sich die einmaligen Prämien als bestimmte Integrale darstellen, wenn man voraussetzt, dafs die Leibrente eine continuirliche ist und die Auszahlung der Kapitalien oder das Anfangen der Rente auf den Todesfall unmittelbar nach dem Ableben stattfindet. Diese Werte lassen sich in vielen Fällen unmittelbar benützen; bei der Leibrente lassen sie sich leicht mit ausreichender Genauigkeit auf diejenigen für jährliche, halbjährliche u. s. w. Termine zurückführen.

Wir wollen die bestimmten Integrale näherungsweise angeben, dabei jedoch stets voraussetzen, dafs die Versicherung lebenslänglich ist; die anderen Fälle werden darauf zurückgeführt.

Sei $f(z)$ eine ganz algebraische Function dritten Grundes:

$$f(z) = k + lz + mz^2 + nz^3,$$

dann ist:

$$\int_0^1 f(z)\,dz = k + \tfrac{1}{2}l + \tfrac{1}{3}m + \tfrac{1}{4}n,$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = k + \tfrac{1}{2}l + \tfrac{1}{4}m + \tfrac{1}{8}n.$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^1 f(z)\,dz = \tfrac{1}{6}[f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}) + f(1)].$$

Setzt man $z = \frac{1}{2h}y$ und $f\left(\frac{y}{2h}\right) = F(y)$, dann ist

$$\int_0^{2h} F(y)\,dy = \frac{h}{3}[F(0) + 4F(h) + F(2h)].$$

Substituirt man weiter $y + 2h = u$ und schreibt $F(y + 2h) = \varphi(u)$, so ergiebt sich:

$$\int_{2h}^{4h} \varphi(u)\,du = \frac{h}{3}[\varphi(2h) + 4\varphi(3h) + \varphi(4h)],$$

u. s. w.

Wenn man jetzt zu f und zu z zurückkehrt, erhält man:

$$\int_0^{2h} f(z)\,dz = \frac{h}{3}[f(0) + 4f(h) + f(2h)],$$

$$\int_{2h}^{4h} f(z)\,dz = \frac{h}{3}[f(2h) + 4f(3h) + f(4h)],$$

$$\int_{4h}^{6h} f(z)\,dz = \frac{h}{3}[f(4h) + 4f(5h) + f(6h)],$$

u. s. w.

Diese Formeln sind streng, wenn $f(z)$ ein algebraischer Ausdruck dritten oder niedrigeren Grades ist; wir wollen sie aber auch anwenden, wenn $f(z)$ eine andere (unbekannte) Function bedeutet, wobei wir dann voraussetzen, dafs die dritten Differenzen der Werte von $f(z)$ wenig

von einander abweichen, und zwar für jede der folgenden Reihen von Werten:

$$f(0),\ f(1),\ f(2) \ldots \text{ bis } f(2h);$$
$$f(2h),\ f(2h+1),\ f(2h+2) \ldots \text{ bis } f(4h),$$
u. s. w.

Wir erhalten auf diese Weise:

$$\int_0^\infty f(z)\,dz = \frac{h}{3}\Big[f(0)+2\{f(2h)+f(4h)+f(6h)+\ldots\}$$
$$+4\{f(h)+f(3h)+f(5h)+\ldots\}\Big], \qquad (496)$$

welche Formel um so genauer ist, je kleiner h gewählt wird.

Nimmt man z. B. $h=10$, dann ist:

$$\int_0^\infty f(z)\,dz = \tfrac{10}{3}\Big[f(0)+2\{f(20)+f(40)+f(60)+\ldots\}$$
$$+4\{f(10)+f(30)+f(50)+\ldots\}\Big].$$

Da

$$\bar{a}_x = \frac{1}{D_x}\cdot\int_0^\infty D_{x+z}\,dz$$

ist, findet man also näherungsweise:

$$\bar{a}_x = \tfrac{10}{3}\cdot\frac{1}{D_x}\cdot\Big[D_x+2\{D_{x+20}+D_{x+40}+D_{x+60}+\ldots\}+$$
$$+4\{D_{x+10}+D_{x+30}+D_{x+50}+\ldots\}\Big].$$

400. Man könnte zu Formel (496) noch viele ähnliche hinzufügen; es läfst sich aber bei derselben Anzahl von Werten der Function $f(z)$ eine noch gröfsere Genauigkeit erreichen, wenn man eine der Annäherungs-Formeln von **Gaufs** anwendet. Einen vereinfachten Beweis der Gaufsischen Formeln gab **Jacobi** in **Crelle's** Journal für die reine und angewandte Mathematik, I. Bd.; man kann ihn auch finden in **Boole's** Finite Differences. Die Formel, welche ich hier gebe und welche entstanden ist aus einer geringen Abänderung der Methode von **Gaufs**, habe ich zuerst gefunden in **Lobatto's** Lessen over de Differentiaal- en Integraal-Rekening (1852). Man begegnet derselben Formel (nach dem Jacobi'schen Gedankengang entwickelt) in einem Artikel von Herrn **G. F. Hardy** in dem Journal of

the Institute of Actuaries, vol. XXIV (1884): On some Formulas for Approximate Summation.

Jene Näherungs-Formel ist nun:

$$\int_0^1 f(z)\,dz = \tfrac{1}{12}[f(0)+f(1)]+\tfrac{5}{12}[f(\alpha)+f(\beta)],$$

worin α und β die Wurzeln der Gleichung $5z^2-5z+1=0$ sind, sodafs:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{5}}),\quad \beta = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{5}}).$$

Als Kettenbruch dargestellt ist:

$$\sqrt{5} = 2+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\ldots$$

Näherungsweise nehmen wir:

$$\sqrt{5} = 2+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4},$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{5}} = \tfrac{4}{9},\quad \alpha = \tfrac{3}{18},\quad \beta = \tfrac{5}{18},$$

dann ist:

$$\int_0^1 f(z)\,dz = \tfrac{1}{12}[f(0)+f(1)]+\tfrac{5}{12}[f(\tfrac{3}{18})+f(\tfrac{5}{18})].$$

Setzt man hierin $z = \dfrac{1}{76h}y$ und kehrt dann zu der Variablen s zurück, so ergiebt sich:

$$\int_0^{76h} f(s)\,dz = \tfrac{19}{3}h\left[f(0)+f(76h)+5\left\{f(21h)+f(55h)\right\}\right].$$

Weiter hat man:

$$\int_{76h}^{152h} f(z)\,dz = \tfrac{19}{3}h\left[f(76h)+f(152h)+5\left\{f(97h)+f(131h)\right\}\right].$$

Durch Addition erhält man das Integral von 0 bis $152h$.

Nun ist bei Lebensversicherungsformeln $f(z)=0$, sobald z ein Alter andeutet, das etwas mehr als 100 beträgt. Infolge dessen ist, wenn man $h=1$ setzt:

$$\int_0^{\infty} f(z)\,dz = \tfrac{19}{3}\left[f(0)+2f(76)+5\left\{f(21)+f(55)+f(97)\right\}\right]. \quad (497)$$

Z. B. ergiebt sich für $f(z) = D_{x+z}$ nach Division mit D_x als Annäherung der continuirlichen Leibrente:

$$\bar{a}_x = \tfrac{19}{3} \cdot \frac{1}{D_x} \cdot \left[D_x + 2\, D_{x+76} + 5 \left\{ D_{x+21} + D_{x+55} + D_{x+97} \right\} \right].$$

Für $x = 30$ erhält man:

$$\bar{a}_{30} = \tfrac{19}{3} \left[1 + 5 \cdot \frac{D_{51} + D_{85}}{D_{30}} \right].$$

Obgleich wir hier nur mit drei Werten der Funktion D rechnen, giebt diese einfache Formel ein Resultat, dessen Genauigkeit in vielen Fällen genügt; die Genauigkeit wird geringer, je nachdem die Personen älter sind. Besonders wenn es sich um mehrere Leben handelt, kann die Formel gute Dienste leisten.

Auf dieselbe Weise wie (497) lassen sich noch sehr viele Formeln ableiten, wie man denn auch in der zuletzt genannten belangreichen Abhandlung deren mehrere findet. Wie man sieht, liegt die Kraft der Methode in der Weise, wie man nach **Hardy**'s Beispiel in den Gaufsischen Näherungs-Formeln für

$$\int_0^1 f(z)\, dz$$

die zwischenliegenden z, welche in der Regel irrationale Zahlen sind (hier die α und β), durch rationale Brüche ersetzen kann; in dem Beispiel sind die rationalen Brüche $\frac{21}{76}$ und $\frac{55}{76}$ genommen für die irrationellen Werte von z.

Die Verbindungsrente für zwei Personen, zurückgeführt auf eine Leibrente für eine Person.

401. Die Verbindungsrente für zwei bezw. x und y Jahr alte Personen ist aus Gliedern der Form

$$\frac{f(x+z)\, f(y+z)}{(1+i)^z\, f(x)\, f(y)}$$

zusammengesetzt, wenn für beide Personen dieselbe Sterblichkeitstafel benutzt wird und $f(x)$ die Anzahl der Lebenden vom Alter x nach dieser Tafel bedeutet.

Die Leibrente für eine w Jahr alte Person besteht nach derselben Sterblichkeitstafel aus Gliedern der Form:

$$\frac{f(w+z)}{(1+i)^z f(w)}.$$

Wenn jetzt eine willkürliche Verbindungsrente — sie sei lebenslänglich, temporär oder aufgeschoben — für zwei Personen durch eine Leibrente von derselben Dauer für eine Person soll ersetzt werden können, dann mufs für willkürliche Werte von x, y und z die Beziehung

$$\frac{f(x+z)\,f(y+z)}{f(x)\,f(y)} = \frac{f(w+z)}{f(w)} \tag{498}$$

bestehen.

Wenn wir logarithmiren und alsdann nach z differenziren, so ergiebt sich:

$$\frac{f'(x+z)}{f(x+z)} + \frac{f'(y+z)}{f(y+z)} = \frac{f'(w+z)}{f(w+z)}. \tag{499}$$

Wir setzen zur Abkürzung $\frac{f'(y)}{f(y)} = \varphi(y)$, wo dann $-\varphi(y)$ die Sterbe-Intensität für das Alter y (No. 39) ist.

(499) läfst sich nunmehr schreiben:

$$\varphi(x+z) + \varphi(y+z) = \varphi(w+z), \tag{500}$$

woraus bei Differentiation nach x folgt:

$$\varphi'(x+z) + \varphi'(y+z) = \varphi'(w+z). \tag{501}$$

Setzen wir in (500) und (501) $w+z=0$, dann wird:

$$\begin{aligned} \varphi(x-w) + \varphi(y-w) &= \varphi(0) \\ \varphi'(x-w) + \varphi'(y-w) &= \varphi'(0). \end{aligned}$$

Nun sind x und y und also $x-w$ und $x-w$ willkürliche Gröfsen. Setzen wir daher $x-w=u$, $y-w=v$, so gehn letztere Gleichungen über in:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(u) + \varphi(v) &= \varphi(0) \\ \varphi'(u) + \varphi'(v) &= \varphi'(0) \end{aligned}\right\}. \tag{502}$$

Differenzirt man beide Gleichungen nach der als unabhängige Variable aufgefafsten Gröfse u, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(u) + \varphi'(v)\frac{dv}{du} &= 0 \\ \varphi''(u) + \varphi''(v)\frac{dv}{du} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{503}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} = \frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}. \tag{504}$$

Weil nun u und v willkürlich sind, mufs $\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}$ constant sein.

Wir setzen darum $\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} = C_1$, woraus durch Integration folgt:

$$L\frac{\varphi'(u)}{C_2} = C_1 u,$$

sodafs $\varphi'(u) = C_2 e^{C_1 u}$ ist. e^{C_1} aber ist auch eine Constante, die wir mit r bezeichnen wollen.

Wir erhalten demnach:

$$\varphi'(u) = C_2 r^u,$$

oder nach Integration:

$$\varphi(u) = C_3 + \frac{C_2}{Lr} \cdot r^u.$$

Den constanten Wert $\frac{C_2}{Lr}$ ersetzen wir durch C_4, sodafs wir erhalten:

$$\varphi(u) = C_3 + C_4 r^u.$$

Substituiren wir dies in (500), dann folgt:

$$C_3 + C_4 r^{x+z} + C_3 + C_4 r^{y+z} = C_3 + C_4 r^{w+z},$$

d. h.

$$C_4 (r^x + r^y) r^z + 2C_3 = C_4 r^w \cdot r^z + C_3.$$

Diese Gleichung kann für willkürliche z nur erfüllt sein, wenn $C_3 = 0$ ist, und folglich:

$$\varphi(u) = C_4 r^u, \tag{505}$$

während w bestimmt wird durch:

$$r^w = r^x + r^y. \tag{506}$$

Die Verbindungsrente für die x und y Jahr alten Personen ist dann der Leibrente für eine w-jährige Person gleich, d. h. $a_{xy} = a_w$.

Setzt man in (505) $C_4 = -C$, dann ergiebt sich die Formel:

$$-\varphi(u) = -\frac{f'(u)}{f(u)} = Cr^u \tag{507}$$

oder in Worten: jede Verbindungsrente für zwei Personen kann nur dann genau durch eine Leibrente für eine Person nach derselben Sterblichkeitstafel ersetzt werden, wenn die Sterbe-Intentität für das Alter u sich in der Form Cr^u darstellen läfst, d. h. wenn die Sterblichkeitstafel dem **Gompertz**'schen Gesetz (No. 47) entspricht.

Indessen entsprechen die meisten Sterblichkeitstafeln diesem Gesetz zu wenig, um das Verfahren anders als auf Verbindungsrenten mit kurzer Dauer und geringem Altersunterschied der betreffenden Personen anwenden zu können; denn wenn man bei einer bestimmten Sterblichkeitstafel versuchen wollte, die r näherungsweise zu finden, würde man dafür Werte erhalten, die für niedriges und hohes Alter allzu sehr verschieden sind.

Die Verbindungsrente für drei Personen, zurückgeführt auf eine solche für zwei Personen.

402. Diese Methode (von **Simpson**) setzt voraus, dafs man Tafeln für eine und für zwei Personen hat.

Es sei gefragt nach der Verbindungsrente $a_{45,\,32,\,21}$ für drei bezw. 45, 32 und 21 Jahr alte Personen.

Man suche dann in der Tafel für zwei Personen den Wert der Verbindungsrente $a_{32,\,21}$ und sehe in der Tafel für eine Person nach, für welches Alter x die Leibrente $a_x = a_{32,\,21}$ ist. Dieses x wird in der Regel zwischen zwei ganzen Zahlen liegen. Nunmehr wählt man:

$$a_{45,\,32,\,21} = a_{45,\,x},$$

sodafs die Combination der beiden 32 und 21 Jahr alten Personen durch eine x Jahr alte Person ersetzt ist.

Wie man sieht, ist diese Berechnung auf drei Weisen ausführbar, indem man für $a_{45,\,32,\,21}$ auch $a_{32,\,y}$ und $a_{21,\,z}$ finden kann.

Zwischen den drei gefundenen Werten kann man dann den mittleren als den besten wählen.

Simpson selbst ersetzte nur die beiden ältesten Personen durch eine Person.

Diese Methode giebt zumeist genügende Resultate für einzelne Fälle; die Anzahl der verschiedenen Alters-Combinationen ist allzu zahlreich, um vollständige Tafeln zusammenzustellen.

Wenn keine Tafeln für zwei Personen vorliegen, könnte man die notwendigen Combinationen näherungsweise nach einer der vorher-

gehenden Methoden finden und nachher die hier behandelte Methode anwenden; man läuft dabei jedoch die Gefahr, dafs zu viele Zahlen näherungsweise gefunden werden müssen, und wendet daher bei drei Personen besser gleich eine der Methoden No. 398—400 an. Wenn indessen eine Sterblichkeitstafel dem Gompertz'schen Gesetz ziemlich genau entspricht (was, wie man weifs, für die ersten Lebensjahre durchaus unmöglich ist) oder dieselbe nach diesem Gesetz ausgeglichen ist, dann kann man eine Verbindungsrente für drei x, y und z Jahr alte Personen auf eine Leibrente für eine w Jahr alte Person zurückführen, sodafs $a_{xyz} = a_w$ wird, wo sich w aus der Gleichung ergiebt:

$$r^w = r^x + r^y + r^z.$$

Zurückführung ungleicher Altersstufen auf gleiche.

403. Wenn es möglich sein soll, jede Verbindungsrente für zwei x und y Jahr alte Personen einer Verbindungsrente gleich zu setzen, bei welcher die Personen gleich alt sind, sodafs

$$a_{xy} = a_{ww}$$

ist, dann müssen x, y, w für jeden Wert die Beziehung erfüllen können:

$$\frac{f(x+z)}{f(x)} \cdot \frac{f(y+z)}{f(y)} = \left[\frac{f(w+z)}{f(w)}\right]^2, \qquad (508)$$

denn die Verbindungsrente für zwei Personen, von denen jede w Jahr alt ist, besteht aus Gliedern der Form:

$$\frac{1}{(1+i)^z} \cdot \frac{f(w+z)}{f(w)} \cdot \frac{f(w+z)}{f(w)}.$$

Verfährt man jetzt mit (508) wie in No. 401 mit (498), so ergiebt sich an Stelle von (500):

$$\varphi(x+z) + \varphi(y+z) = 2\varphi(w+z). \qquad (509)$$

Bei weiterem Vorgehn wie in No. 401 erhält man wie dort:

$\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} =$ constant und dann genau wie dort:

$$\varphi(u) = C_3 + C_4 r^u. \qquad (510)$$

Hier aber fängt der Unterschied an; C_3 braucht nicht $= 0$ zu sein, denn wenn man (510) in (509) substituirt, ergiebt sich:

$$\ldots \quad C_4(r^x + r^y) \cdot r^z + 2C_3 = 2C_4 r^x r^z + 2C_3.$$

Diese Gleichung wird für willkürliche Werte von z erfüllt, wenn

$$2r^w = r^x + r^y. \tag{511}$$

Formel (510) für $\varphi(u)$ zeigt, dafs nur dann in aller Strenge jede Verbindungsrente für zwei Personen durch eine andere ersetzt werden kann, bei welcher die Personen gleich alt sind, wenn die Sterblichkeitstafel dem **Makeham**schen Gesetz genügt (No. 48).

Hat man also die Sterblichkeitstafel nach diesem Gesetz ausgeglichen, so erhält man: $a_{xy} = a_{ww}$; w wird berechnet aus:

$$2r^w = r^x + r^y,$$

während die Gröfse r aus der Sterblichkeitstafel selbst bekannt ist.

404. Aber auch wenn eine Sterblichkeitstafel jenem Gesetze nicht genügt, kann man dennoch annehmen, dafs dies näherungsweise aufser bei den allerjüngsten Altersstufen der Fall sein wird, sodafs man für die gewählte Sterblichkeitstafel den Wert r näherungsweise finden kann.

Nach Formel (91) ist die Anzahl der Lebenden des Alters x nach der Sterblichkeitstafel, welche Makeham's Gesetz entspricht:

$$l_x = ck^x g^{r^x},$$

und folglich die Lebenswahrscheinlichkeit während eines Jahres für den x-jährigen:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = kg^{(r-1)r^x}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\log p_x = \log k + r^x (r-1) \log g,$$

ebenso

$$\log p_{x+m} = \log k + r^{x+m} (r-1) \log g,$$
$$\log p_{x+2m} = \log k + r^{x+2m} (r-1) \log g.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\log p_x - \log p_{x+m} = r^x (1 - r^m) (r-1) \log g,$$
$$\log p_{x+m} - \log p_{x+2m} = r^{x+m} (1 - r^m) (r-1) \log g,$$

und nunmehr durch Division:

$$r^m = \frac{\log p_{x+m} - \log p_{x+2m}}{\log p_x - \log p_{x+m}}. \tag{512}$$

Hierbei thut man am besten, x an den Anfang der Sterblichkeitstafel zu verlegen, jedoch nicht auf eine der sehr jungen Altersstufen, wo die Sterbenswahrscheinlichkeit noch im Abnehmen begriffen ist,

$x + 2m$ dagegen wählt man zweckmäfsig am Ende der Tafel, wieder aber nicht ganz am Ende, wo die Sterbenswahrscheinlichkeit fast 1 ist. Zwar kann man auf diese Weise für r verschiedene Werte finden; um dies zu corrigiren, kann man Methoden benützen, wo alle Altersstufen nach einem gewissen Alter ab aufgenommen werden. No. 75 zeigt einen der Wege, die sich hierbei einschlagen liefsen, allein zu unserem Zweck wird bei zweckmäfsiger Wahl der x und m eine Berechnung genügen. Wenn also r einmal für die gewählte Sterblichkeitstafel bestimmt worden ist und man die Verbindungsrente für die x und y Jahr alten Personen durch eine für zwei Personen desselben Alters w ersetzen will, so dient zur Bestimmung von w die Gleichung:

$$2\,r^{w} = r^{x} + r^{y}.$$

Ist jetzt $y > x$, so kann man schreiben:

$$2\,r^{w} = r^{x}(1 + r^{y-x}),\quad r^{w} = r^{x} \cdot \frac{1 + r^{y-x}}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$w = x + \frac{\log \frac{1 + r^{y-x}}{2}}{\log r}. \qquad (513)$$

Es ist merkwürdig, dafs für die gebräuchlichsten Sterblichkeitstafeln die Werte der sich aus ihnen ergebenden r nur wenig von einander abweichen. Man könnte denn auch, um eine Verbindungsrente auf diesem Weg näherungsweise zu finden, ohne nähere Untersuchung einfach nehmen: $\log r = 0.04$, mit welcher Sterblichkeitstafel man auch rechnet.

Man kann eine kleine Tafel zusammenstellen, welche für jede der Altersdifferenzen $y - x$ der beiden Personen den Wert von $\frac{\log \frac{1}{2}(1 + r^{y-x})}{\log r}$ angiebt. Bei derselben Altersdifferenz sind dann die x mit derselben Zahl zu erhöhen, damit man w bekomme.

405. Es ist leicht einzusehen, dafs eine Leibrente für drei Personen ungleichen Alters sich auf eine für drei Personen gleichen Alters zurückführen läfst, sodafs

$$a_{x\,y\,z} = a_{w\,w\,w}$$

und dafs dann w bestimmt wird durch:

$$3\,r^{w} = r^{x} + r^{y} + r^{z}.$$

Ähnlich $\quad a_{x\,y\,z\,u} = a_{w\,w\,w\,w}$,

wenn $\quad 4\,r^{w} = r^{x} + r^{y} + r^{z} + r^{u}.$

Das Berechnen der Leibrente für mehr Personen ist also mit grofser Annäherung aus Tafeln für Personen gleichen Alters möglich, und weil sich vielerlei Versicherungen schliefslich auf lebenslängliche Leib- und Verbindungsrenten reduciren lassen, so kann man bisweilen sehr zusammengesetzte Versicherungsweisen ziemlich einfach näherungsweise bestimmen.

406. Hat man aber keine Verbindungstafel für gleiches Alter, so rechne nach einer der Methoden von No. 398—400.

Der Mathematiker mufs dergleichen Annäherungs-Methoden anwenden, wenn er beauftragt wird, den Wert dieser oder jener Geld-Verbindlichkeit, welche an sehr complicirte Bedingungen geknüpft ist, zu schätzen. Dies ist recht oft der Fall, z. B. wenn der Wert eines Kapitals angegeben werden soll, von welchem fünf Personen den Nieſsbrauch haben; derartige Aufgaben sind nicht blos Übungsprobleme, sondern kommen in der Praxis häufig vor.

Wir haben hier darauf hinweisen wollen, dafs man in solchen Fällen eine Annäherung suchen kann und dadurch mit Erfolg einer allzu beschwerlichen Rechnung aus dem Wege gehn wird.

Annähernde Berechnung bei Änderung des Zinsfufses.

407. Wenn eine Gesellschaft ihren Berechnungen einen anderen als den bisher bei ihr üblichen Zinsfufs zu Grunde zu legen wünscht, ist sie genötigt, auf Grund dieses Zinsfufses neue Grundtafeln zusammenzustellen.

Es kommt aber öfters vor, dafs man für einen speciellen Fall eine Prämie oder irgend eine andere Gröfse auf einen Zinsfufs basirt, für welchen die Grundzahlen nicht vorhanden sind. In einem solchen Fall kann man sich mit einer Annäherung zufrieden geben; und es giebt hierfür verschiedene Methoden.

Sucht man z. B. den Wert der Leibrente nach einer gegebenen Sterblichkeitstafel mit $3\frac{1}{4}$ % und ist man im Besitz dieser Werte für 3 %, $3\frac{1}{2}$ %, 4 %, $4\frac{1}{2}$ %, so kann man den Wert für $3\frac{1}{4}$ interpoliren, indem man die vier gegebenen Werte betrachtet als Glieder einer arithmetischen Reihe dritter Ordnung.

Man kann sich auch helfen mittels Extrapolirungen, indem man aus den für die Zinsfufse $4\frac{1}{4}$, 4 und $3\frac{3}{4}$ % den Wert für einen niedrigeren Zinsfufs sucht.

Sucht man z. B. den Wert für $3\frac{1}{2}$ %, so betrachte man die 3 gegebenen Zahlen als Glieder einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung, und zwar erleichtert es die Arbeit, wenn man für die Ordnung der gegebenen Zahlen annimmt: -1, 0, $+1$, die Zahl für den Zinsfuſs $3\frac{1}{2}$ ist dann von der Ordnung $+2$.

Man kann aber dem Extrapoliren umgehen, indem man den Wert auch für den Zinsfuſs 0 berechnet, was in der Regel leicht sein wird. Wenn man dann die Werte für $4\frac{1}{4}$, 4, $3\frac{3}{4}$ und 0 als das 1^{ste}, 2^{te}, 3^{te} und 18^{te} Glied einer arithmetischen Reihe der dritten Ordnung betrachtet, kann der gesuchte Wert für den Zinsfuſs $3\frac{1}{4}$ als 4^{tes} Glied der Reihe berechnet werden. (Man sehe **L. Fontaine,** Note sur le calcul des Rentes viagères, à différents taux par interpolation, in dem „Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français“ 1892).

408. Bei diesen Methoden sind aber stets die Zahlen für mehrere Zinsfüſse erforderlich. Sind dieselben nur für einen Zinsfuſs vorhanden, so kann von keiner Interpolation die Rede sein. Man soll also eine Methode zu finden suchen, nach welcher man die Änderung angeben kann, welche eine auf einen gewissen Zinsfuſs gegründete Zahl untergeht, wenn dieser Zinsfuſs sich (um ein geringes, z. B. um $\frac{1}{2}$ %) höher oder niedriger stellt.

Man kann hierbei von einem einfachen Sterbegesetz ausgehen, welches annäherungsweise gelten soll. Nach der Hypothese von **De Moivre** wird die Anzahl Lebender des Alters x durch die Formel

$$l_x = 86 - x$$

angegeben.

In dem obengenannten „Bulletin trimestriel“ giebt **Achard** eine Methode an, welche er auf die mehr allgemeine Hypothese

$$l_x = Ax^m$$

gründet, worin A und m Constanten sind. Diese Methode wendet er an zur Annäherung der Leibrente bei Änderung des Zinsfuſses.

409. Besser sind aber diejenigen Methoden, welche nicht nur für Leibrenten, sondern für alle Zahlen, welche in der Lebensversicherungs-Mathematik vorkommen, verwendbar sind. Derartige Methoden zeigen auf directem Wege, welche Änderung eine gewisse Function des Zinsfuſses i erfährt, wenn dieser von i in $i + \triangle i$ übergeht, es sei dann $\triangle i$ positiv oder negativ.

Schon **James Meikle** (Journal of the Institute of Actuaries, III. Teil) hat nach dieser Methode den Wert der Leibrente für einen gegebenen

Zinsfuſs abgeleitet aus dem bekannten Wert für anderen Zinsfuſs, mit diesem Unterschied, daſs er diesen Wert nicht betrachtet hat als eine Function von i, sondern als eine Function von $v = \frac{1}{1+i}$, sodaſs es hier nicht die Rede ist von einem Übergang von i in $i + \Delta i$, sondern von einem solchen von v in $v + \Delta v$.

Einfacher erscheint es, die Zahlen unmittelbar als Functionen von i zu betrachten, wie **Laurent** in seinem Büchlein: Théorie et pratique des assurances sur la vie, und Prof. **D. T. Lundgren** in seinem Artikel: Über eine Methode zur Anwendung einer Grundtafel für Berechnungen mit veränderlichem Zinsfuſse in der „Österreichischen Versicherungs-Zeitung“ vom 1. October 1898. Diese beiden haben sich auf eine erste Annäherung beschränkt.

Nach dem Tailor'schen Satz ist

$$F(i+\Delta i) = F(i) + \frac{dF}{di}\Delta i + \tfrac{1}{2}\frac{d^2F}{di^2}(\Delta i)^2 + \ldots$$

Es erscheint überflüssig weiter zu gehen als die zweite Potenz von Δi, und es ist sogar mehrmals erlaubt, die zweite Potenz von Δi zu vernachlässigen, und zwar um so eher je nachdem sich Δi niedriger stellt.

Diese Formel könnte man benutzen bei jeder beliebigen Zahl, welche man in der Lebensversicherung anwendet, also z. B. auf A_x, P_x, ${}_mV_x$, u. s. w.

Alle diese Zahlen sind aber auf Leibrenten zurückzuführen, sodaſs es genügend erscheint, die Methode auf Leibrenten anzuwenden. Es kommt noch dazu, daſs die Anwendung bei Leibrenten nicht nur am leichtesten ist, sondern gleichzeitig die genauesten Resultate giebt.

Wir nehmen also:

$$a_x = v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + v^3 \cdot {}_3p_x + v^4 \cdot {}_4p_x + \ldots,$$

wofür man zur Abkürzung auch schreiben kann:

$$a_x = \sum_{n=1} v^n \cdot {}_np_x = \sum_{n=1} \frac{{}_np_x}{(1+i)^n} \qquad (514)$$

und worin

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \text{ ist.}$$

Wenn man den Wert von a_x, bei dem veränderten Zinsfuſs $i + \Delta i$ mit a'_x bezeichnet, so hat man:

$$a'_x = a_x + \frac{da_x}{di} \cdot \Delta i + \tfrac{1}{2}\frac{d^2a_x}{di^2} \cdot (\Delta i)^2. \qquad (515)$$

Es ist

$$\frac{d\left\{\frac{{}_np_x}{(1+i)^n}\right\}}{di} = -\frac{n\cdot {}_np_x}{(1+i)^{n+1}}.$$

$$\frac{d^2\left\{\frac{{}_np_x}{(1+i)^n}\right\}}{di^2} = \frac{n(n+1)\cdot {}_np_x}{(1+i)^{n+2}}.$$

Also stellt sich nach (514)

$$\frac{da_x}{di} = -\frac{1}{1+i}\cdot \sum_{n=1} \frac{n\cdot {}_np_x}{(1+i)^n} =$$

$$= -\frac{1}{1+i}\cdot \sum_{n=1}\left\{\frac{n}{(1+i)^n}\cdot\frac{l_{x+n}}{l_x}\right\} = -\frac{1}{1+i}\cdot \Sigma\left(n\cdot\frac{D_{x+n}}{D_x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{1+i}\cdot\frac{D_{x+1}+2D_{x+2}+3D_{x+3}+\cdots}{D_x} =$$

$$= -\frac{1}{1+i}\cdot\frac{N_x+N_{x+1}+N_{x+2}+\cdots}{D_x} = -\frac{1}{1+i}\,\frac{\Sigma N_x}{D_x}$$

$$= -v\cdot\frac{\Sigma N_x}{D_x}.$$

Offenbar ist $\frac{\Sigma N_x}{D_x}$ der Wert einer postnumerando zahlbaren Leibrente, welche zunimmt nach der arithmetischen Reihe erster Ordnung 1, 2, 3, 4, u. s. w.

$$\frac{d^2a_x}{di^2} = \sum_{n=1}\frac{n(n+1)\cdot {}_np_x}{(1+i)^{n+2}} = \frac{2}{(1+i)^2}\cdot\sum_{n=1}\left\{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)\cdot {}_np_x}{(1+i)^n}\right\} =$$

$$= \frac{2}{(1+i)^2}\cdot\sum_{n=1}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{D_{x+n}}{D_x}\right\} =$$

$$= \frac{2}{(1+i)^2}\cdot\frac{D_{x+1}+3D_{x+2}+6D_{x+3}+10D_{x+4}+\cdots}{D_x} =$$

$$= \frac{2}{(1+i)^2}\cdot\frac{\Sigma N_x+\Sigma N_{x+1}+\Sigma N_{x+2}+\cdots}{D_x} =$$

$$= \frac{2}{(1+i)^2}\cdot\frac{\Sigma\Sigma N_x}{D_x} = 2v^2\cdot\frac{\Sigma\Sigma N_x}{D_x}.$$

Hierin ist $\frac{\Sigma\Sigma N_x}{D_x}$ der Wert der postnumerando zahlbaren Leibrente, welche zunimmt nach der arithmetischen Reihe zweiter Ordnung 1, 3, 6, 10 u. s. w., deren allgemeines Glied $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist.

Substituirt man die gefundenen Ausdrücke für $\frac{d\,a_x}{di}$ und $\frac{d^2\,a_x}{di^2}$ in (515), so findet man die Näherungsformel:

$$\acute{a}_x = a_x - v \cdot \frac{\Sigma N_x}{D_x} \cdot \Delta i + v^2 \cdot \frac{\Sigma\Sigma N_x}{D_x} (\Delta i)^2. \qquad (516)$$

Bei denjenigen Gesellschaften, welche einigermafsen vollständige Grundzahlen (bei einem gewissen Zinsfufs) besitzen, sind die Zahlen ΣN_x gewifs vorhanden, denn man braucht dieselben mehrmals. Die Zahlen $\Sigma\Sigma N_x$ hingegen werden nicht überall vorhanden sein. Weil aber

$$\Sigma\Sigma N_x = \Sigma N_x + \Sigma N_{x+1} + \Sigma N_{x+2} + \Sigma N_{x+4} + \ldots$$

ist, so ist es unschwer, die Zahl $\Sigma\Sigma N_x$ für einen bestimmten Fall zu bilden.

Nach vorgenommenen Proben giebt die einfache Näherungs-Formel (516) Resultate, welche in den Decimalen, die für Leibrenten in Betracht kommen, beinahe ganz genau erscheinen.

Mehrmals kann man sich auch mit der roheren Formel:

$$\acute{a}_x = a_x - v \cdot \frac{\Sigma N_x}{D_x} \cdot \Delta i.$$

begnügen.

Die Formel (516) verdankt man einem Artikel des Dr. **R. H. van Dorsten:** Benaderingsformules bij verandering van rentevoet im mehr genannten holländischen „Archief voor de Verzekerings-Wetenschap“ IV. Teil. In demselben Artikel findet man auch eine ausführliche Behandlung der anderen Methoden und eine Vergleichung ihrer Resultate.

Das Studium dieses Gegenstandes wurde aber noch fortgesetzt. So findet man im V. Teil des „Archiefs“ einen kleinen Aufsatz über denselben von Prof. Dr. **J. C. Kluyver,** und Herr **Jac. M. Vaz Dias** hat in einer der Sitzungen des holländischen Vereins von Actuaren eine Vorlesung gehalten, worin er eine ganz elementäre neue Methode der Annäherung giebt. Diese Vorlesung gelangte in der soeben erschienenen neuen Lieferung des erwähnten V. Teiles des Archiefs zum Abdruck.

Bezeichnungsweise.

Verzinsung.

i = wirklicher Zinsfufs, nämlich der Zins, der von dem Kapital 1 im Laufe eines Jahres erzielt wird, wenn der Zins nur einmal und zwar am Ende des Jahres fällig ist.

$v = \frac{1}{1+i}$ = Barwert des nach 1 Jahr fälligen Kapitals 1 (Abzinsungsfactor).

$d = \frac{i}{1+i} = 1 - v$ = Discont von 1, nach einem Jahr zahlbar.

$j_n = n\,[(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1]$ = nomineller Zinsfufs oder n-faches des terminlichen Zinses vom Kapital 1, wenn der Zins n-mal im Jahre fällig ist.

$\delta = j_\infty = \operatorname{Lim} n\,[(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1]\ (n = \infty) = L\,(1+i) = -L(1-d) =$ = Zins- oder Discontkraft (Zins-Intensität) (L bedeutet log nat).

Sterblichkeitszahlen.

Ein Buchstabe in Klammern, wie (x) bedeutet „eine Person vom Alter x".

l_x = Zahl der Lebenden beim Alter x in der Sterblichkeitstafel.

$d_x = l_x - l_{x+1}$ = Zahl der Sterbefälle zwischen den Altern x und $x+1$.

p_x = Wahrscheinlichkeit, dafs (x) ein Jahr überlebt.

$q_x = 1 - p_x$ = Wahrscheinlichkeit, dafs (x) innerhalb eines Jahres stirbt.

μ_x = Sterbe-Intensität $= -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{d\,l_x}{d_x}$.

m_x = Centrales Sterblichkeitsverhältnis für die Altersstrecke x bis $x+1$.
e_x = mittlere Lebensdauer, wenn das Ableben am Anfang des Sterbejahres gestellt wird.
$\mathring{e}_x$ = volle mittlere Lebensdauer, näherungsweise $= e_x + \frac{1}{2}$.

Versicherungszahlen.

a_x = Ganzjährige Leibrente 1, für die Lebensdauer von (x), postnumerando zahlbar.
a_x = dieselbe Leibrente, praenumerando zahlbar.
a_{xy} = ganzjährige, postnumerando zahlbare Verbindungsrente von 1 (bis zum Tode des Erststerbenden laufende Rente) für (x) und (y)
$a_{\overline{xy}}$ = ganzjährige, postnumerando zahlbare Rente für (x) und (y) bis zum Tode der Letztlebenden.
A_x = Barwert oder einmalige Prämie der Versicherung von 1, zahlbar am Ende desjenigen Jahres, in welchem (x) stirbt.
A_{xy} = Barwert oder einmalige Prämie der Versicherung von 1, zahlbar am Ende desjenigen Jahres, in welchem die Verbindung von (x) und (y) erlischt.
$\mathring{a}_x$ = complete Leibrente (wobei für die nach dem letzten regelmässigen Zahlungstermin durchlebte Zeit eine proportionale Zahlung zu leisten ist).
$a_x^{(n)}$ = Leibrente von 1, zahlbar in n Raten innerhalb des Jahres mit je $\frac{1}{n}$.
$\bar{a}_x$ = continuirliche Leibrente von jährlich 1.
$\overline{A}_x$ = Versicherung von 1, zahlbar im Augenblick des Todes.
$a_{x\,\overline{n}|}$ = oder $|_n\,a_x$ = Leibrente von 1, zahlbar während der Dauer des Lebens von (x) innerhalb der bestimmten Zeit von n Jahren, d. i. eine kurze Leibrente für n Jahre auf das Leben von (x), postnumerando zahlbar.
$\mathrm{a}_{x\,\overline{n}|}$ oder $|_n\,\mathrm{a}_x$ = dieselbe Leibrente, praenumerando zahlbar.
${}_n|\,a_x$ = Leibrente von 1 auf das Leben von (x), um n Jahre aufgeschoben, postnumerando zahlbar.
${}_n|\,\mathrm{a}_x$ = dieselbe Leibrente, praenumerando zahlbar, welche also zum ersten Male nach n Jahren fällig wird.
$A_{x\,\overline{n}|}$ = einmalige Prämie der Versicherung von 1, zahlbar am Ende des Todesjahres von (x), falls dieser innerhalb der Zeit von n Jahren stirbt, oder nach Ablauf von n Jahren, wenn (x) dann noch am

Leben ist, also eine abgekürzte (gemischte, alternative) Versicherung für n Jahre.

$A_{x\,y\,\overline{n}|}$ = einmalige Prämie für die gemischte Versicherung auf das Leben von (x) und (y) mit der Dauer von n Jahren.

${}_{m|n}\mathfrak{a}_x$ = unterbrochene Leibrente von 1, nämlich Leibrente auf das Leben von (x), welche m Jahre aufgeschoben ist und weil praenumerando zahlbar, zum ersten Male nach m Jahren zahlbar ist und n Jahre läuft.

${}_{m|n}a_x$ = dieselbe Leibrente, aber weil postnumerando zahlbar, zum ersten Male nach $m+1$ Jahren gezahlt wird.

$A_{x\,\overline{n}|}^{\,1}$ oder ${}_nE_x$ = Wert der Versicherung 1 auf den Lebensfall für (x), zahlbar nach n Jahren.

${}_{n|}A_x$ = einmalige Prämie der Versicherung von 1 auf das Leben von x, zahlbar am Ende des Sterbejahres, wenn das Ableben innerhalb n Jahren stattfindet.

${}_{n|}A_x$ = einmalige Prämie der Versicherung von 1 auf das Leben von x, zahlbar am Ende des Sterbejahres, wenn das Ableben nicht innerhalb n Jahren stattfindet (aufgeschobene Ablebensversicherung oder Ablebensversicherung mit n-jähriger Karenzzeit).

$A_{x\,y}^{1}$ = Wert einer einseitigen Überlebensversicherung von 1 auf das Leben von (x) zu Gunsten von (y).

$a_{x|y}$ = Überlebensrente von 1 für (y), zum ersten Male zahlbar am Ende des Todesjahres von (x) oder im Durchschnitt sechs Monate nach dem Tode von (x).

P = Jahresprämie.

V = Prämienreserve.

W = reducirte beitragsfreie Versicherung.

Diese Symbole sind mit den Symbolen zu verbinden, welche die Barwerte oder einmaligen Prämien darstellen; man gebraucht sie aber auch selbständig.

Demgemäfs ist

$P\,(A_{x\,\overline{n}|})$ oder $P_{x\,\overline{n}|}$ = Jahresprämie einer abgekürzten (gemischten) Versicherung zum Betrage von 1, auf das Haupt eines x-jährigen, für die Dauer von n Jahren.

${}_mV\,(P_{x\,\overline{n}|})$ = Prämienreserve einer abgekürzten (gemischten) Versicherung von 1 nach m Jahren.

${}_mW\,(P_x)$ = reducirte beitragsfreie Versicherung an Stelle einer gewöhnlichen Versicherung auf den Todesfall von 1, die auf das Leben von (x) abgeschlossen und m Jahre in Kraft war.